



筑波大学
University of Tsukuba



車 Vehicle-Bridge Interaction System 両-橋梁相互作用システム問題

環境エネルギー総合工学 01

システム情報系 助教

山本亨輔

yamamoto_k@kz.tsukuba.ac.jp

作成日 : 2017年11月7日
修正日 : 2017年11月8日
 : 2018年10月31日



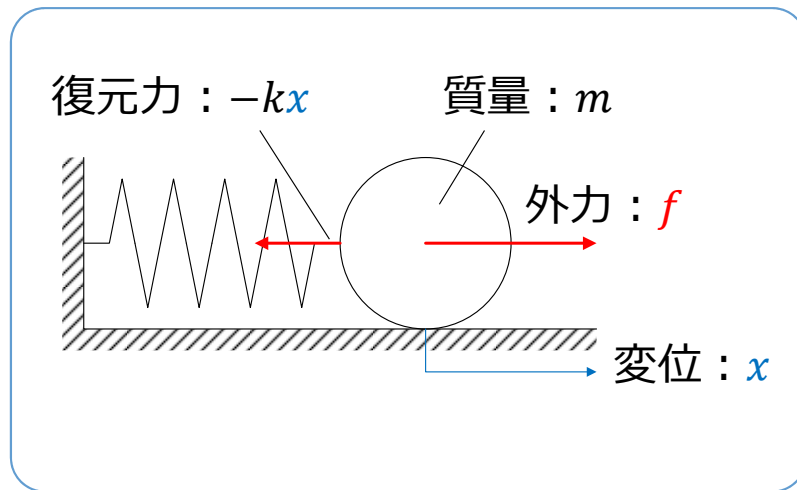
今回の講義で理解してほしいこと

1. 車両や橋梁は**線形**システムとしてモデル化できる

2. 車両と橋梁の相互作用システムは**非線形**である

力学的システムは微分方程式で記述可能

解が関数になる (例: $x(t)$ 等)



運動方程式 ($ma = F$)

$$m\ddot{x} = f - kx$$

線形微分方程式

$$m\ddot{x} + kx = f$$

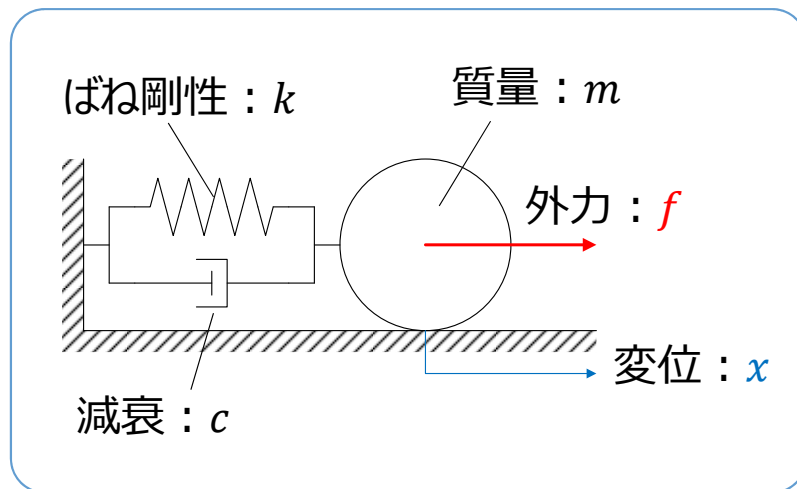
順問題 (よくある問題)

f が既知のとき, x を求めよ

逆問題 (難しい, 研究テーマにしやすい)

$\ddot{x}$ を計測した. f を推定せよ

力学系は**質量・バネ・減衰**で構成されることが多い



運動方程式 ($ma = F$)

$$m\ddot{x} = f - kx - c\dot{x}$$

線形微分方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

線形微分方程式は, 周波数領域で「関数の掛け算」になる

フーリエ変換

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad \text{とする。このとき,}$$

数学的には
厳密じゃないけれど

$$\dot{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega)$$

$$\ddot{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 X(\omega) \quad \text{なので}$$

解が得られた！！
あとは、逆フーリエ変換するだけ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad \text{は,}$$

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)} \\ = H(\omega) F(\omega)$$

周波数応答関数という

分母側の次数が大きい複素関数（周波数領域ではこういう関数が普通）
分子側の次数が大きいと「適切でない」システムになる→カオス系

フーリエ変換は，元の時間関数に含まれる
周波数成分を表すのに便利！

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\cos(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)}{2}$$

$$\sin(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\sqrt{2\pi} \cdot \frac{\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)}{2}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

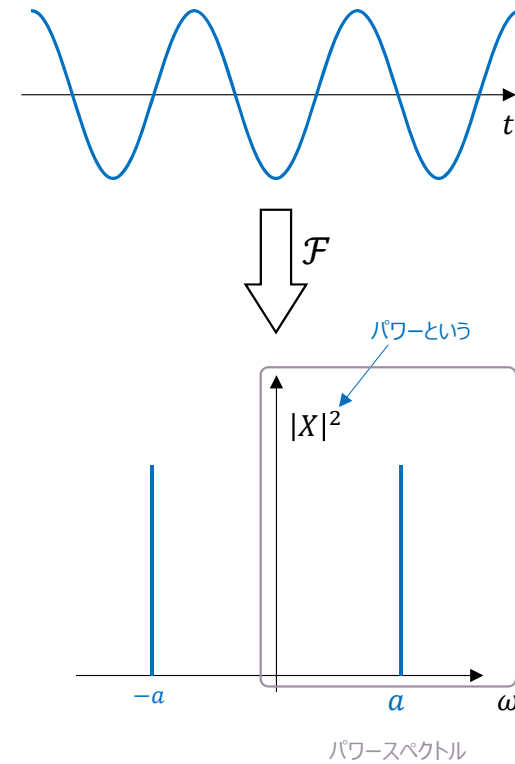
$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n X$$

$$x_1 \cdot x_2 \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1 \otimes X_2$$

畳み込み積分

$$\delta \otimes f = f(0)$$



$f(t)$ がパルス入力： $\delta(t)$ と仮定する（自由減衰振動）

ここで $t > 0$ で、 $\delta(t) = 0$ なので
 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ を解けばよい

解を $x(t) = A \exp(\lambda t)$ と仮定すると

$$A (m\lambda^2 + c\lambda + k) \exp(\lambda t) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

となる.

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-c}{2m} \pm j \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot \underbrace{\exp\left(\frac{-c}{2m} t\right)}_{\text{減衰項}} \cdot \cos(\omega_1 t)$$

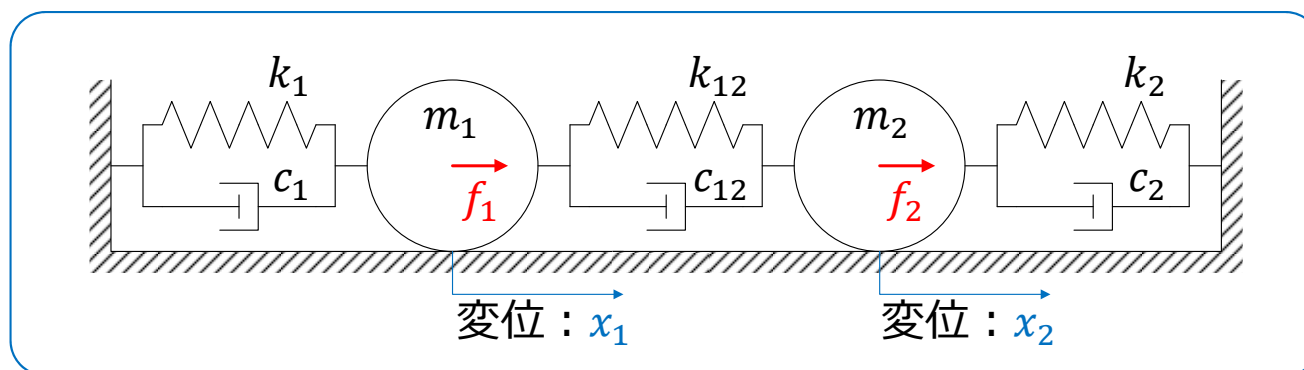
固有角振動数
という

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

非減衰固有角振動数

一方, フーリエ変換の結果から $X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)}$

多自由度系の運動方程式も単自由度系と形は同じ！



$$m_1 \ddot{x}_1 = f_1 - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_{12}(x_1 - x_2) - c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = f_2 - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 - k_{12}(x_2 - x_1) - c_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

システム
パラメータ

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

システム入力



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix}$$

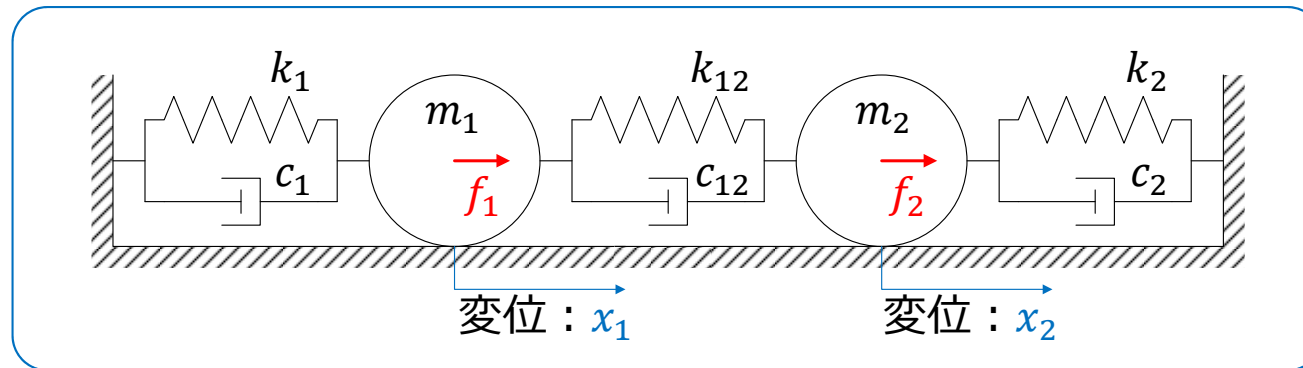
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

システム出力

多自由度系の固有振動数を求めよ



$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 自由減衰振動は、周波数応答関数の逆フーリエ変換！

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$



モード形状

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} \exp \lambda t$$

基準座標

解

を仮定する



非減衰振動のみ考える

$$\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\mathbf{a} \exp \lambda t = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = -\mathbf{M}\lambda^2\mathbf{a}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{a} = -\lambda^2\mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$ は $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ の固有ベクトル, λ^2 は固有値 $\rightarrow$ 解は2つあるので $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ と λ_1^2 , λ_2^2 が対応

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} -\lambda_1^2 & \\ & -\lambda_2^2 \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]^{-1}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} -\lambda_1^2 & \\ & -\lambda_2^2 \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]^{-1}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{a} = -\lambda^2\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

もし, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}$ が逆行列を持つなら, $\mathbf{a} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

となって不適! ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$ は求めたい解ではない) よって,

$$|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}| = 0 \quad -\lambda^2 = \frac{k}{m}\alpha$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}| &= \left| \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-\lambda^2) & \\ & (-\lambda^2) \end{bmatrix} \right| = \frac{k}{m} \begin{vmatrix} 2-\alpha & -1 \\ -1 & 2-\alpha \end{vmatrix} = \frac{k}{m} ((2-\alpha)^2 - 1) \\ &= \frac{k}{m} (\alpha^2 - 4\alpha + 3) = \frac{k}{m} (\alpha - 3)(\alpha - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$-\lambda^2 = \frac{k}{m}, \frac{3k}{m}$$

$$\lambda = j\sqrt{\frac{k}{m}}, j\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

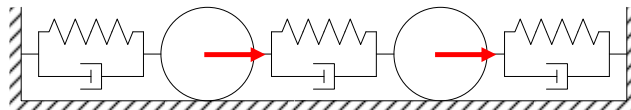
$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda^2\mathbf{E})\mathbf{a} = \begin{cases} \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

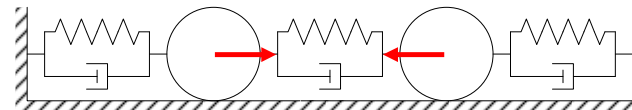
$$\mathbf{x}(t) = A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \exp\left(j\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \exp\left(j\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

実数部分だけ取り出すと

$$\mathbf{x}(t) = A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

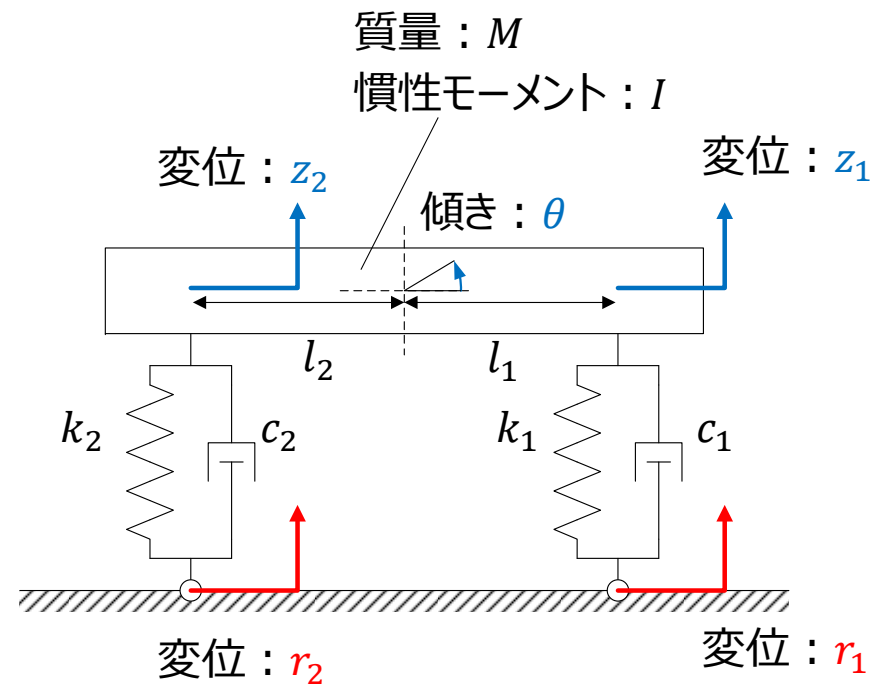


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

車両の運動方程式を求めよ



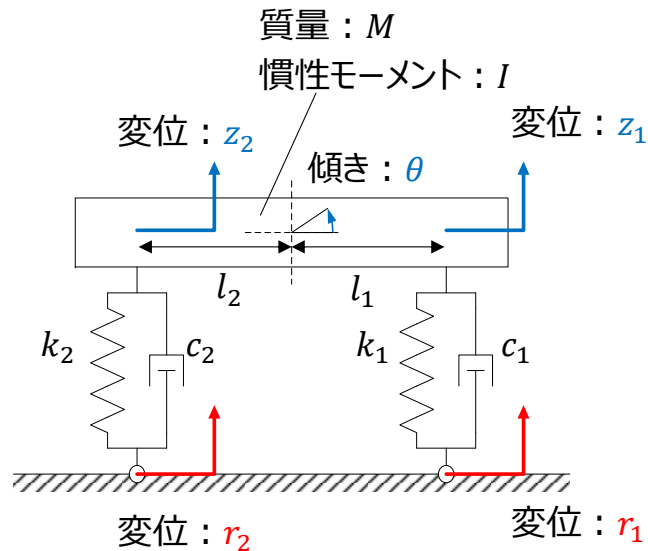
クルマは、サスペンション（バネ+ダンパー）で支えられた剛体系と考えることができる
入力は『路面凹凸』で、路面プロファイルという出力は『車体応答』（車体の鉛直振動）

並進の運動方程式（重心位置）：（ $ma = F$ ）

$$M \frac{l_2 \ddot{z}_1 + l_1 \ddot{z}_2}{l_1 + l_2} = \underbrace{-k_1(z_1 - r_1) - k_2(z_2 - r_2)}_{\text{復元力}} - \underbrace{c_1(\dot{z}_1 - \dot{r}_1) - c_2(\dot{z}_2 - \dot{r}_2)}_{\text{減衰力}}$$

回転の運動方程式（重心＝回転中心）：（ $m\ddot{\theta} = l \times F$ ）

$$I \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{l_1 + l_2} = \underbrace{-l_1 \times k_1(z_1 - r_1) + l_2 \times k_2(z_2 - r_2)}_{\text{復元力のトルク}} - \underbrace{l_1 \times c_1(\dot{z}_1 - \dot{r}_1) + l_2 \times c_2(\dot{z}_2 - \dot{r}_2)}_{\text{減衰力のトルク}}$$



まとめると

$$\mathbf{M}_V \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_V \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_V \mathbf{z} = \mathbf{C}_P \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_P \mathbf{r}$$

$$\mathbf{M}_V = \begin{bmatrix} \frac{l_2 M}{l_1 + l_2} & \frac{l_1 M}{l_1 + l_2} \\ I & -I \\ \frac{l_1 M}{l_1 + l_2} & \frac{l_2 M}{l_1 + l_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_V = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ l_1 c_1 & -l_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_V = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 k_1 & l_2 k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}$$

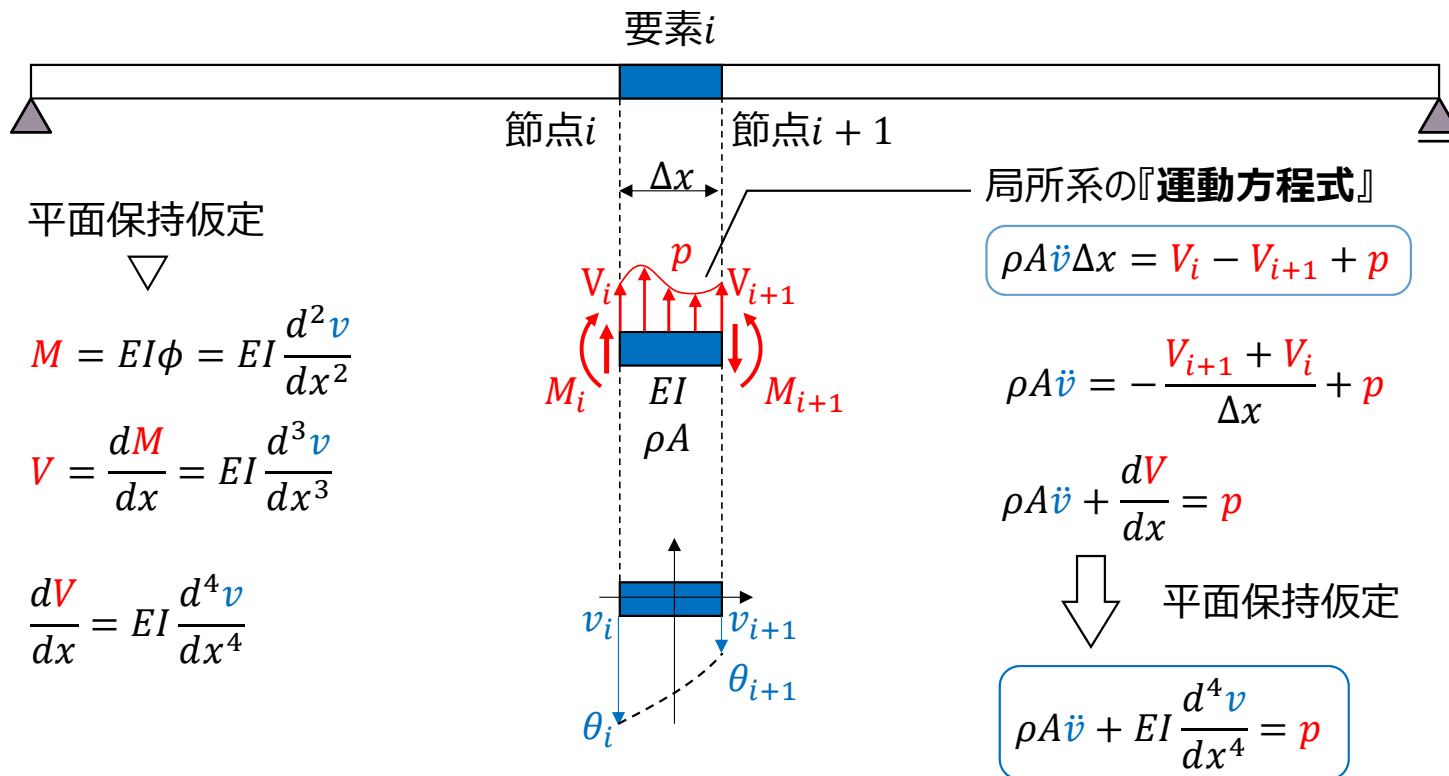
モデルによっては
[]_V ≠ []_P
なので、別々に定義する

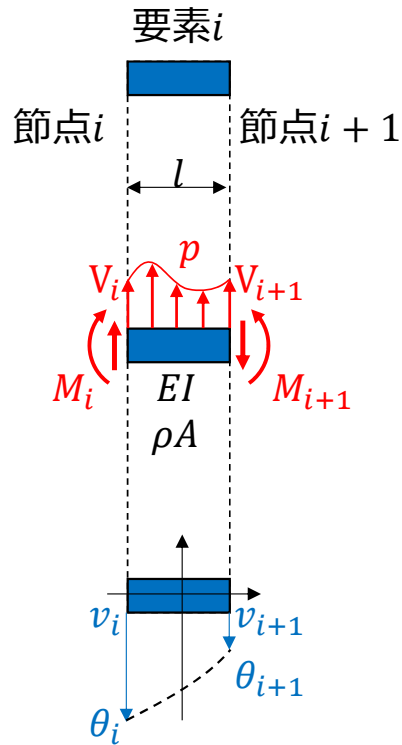
$$\mathbf{C}_P = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ l_1 c_1 & -l_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 k_1 & l_2 k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

橋梁の運動方程式を考える





$$\rho A \ddot{v} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p$$

$$v(t, x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{と仮定する} \quad \Rightarrow \quad \phi(t, x) = 6ax + 2b$$

$$\theta(t, x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$v'''(t, x) = 6a$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(t, 0) \\ \theta(t, 0) \\ v(t, l) \\ \theta(t, l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \\ c \\ al^3 + bl^2 + cl + d \\ 3al^2 + 2bl + c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ 3l^2 & 2l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(i)} = EI \begin{Bmatrix} v'''(t, 0) \\ \phi(t, 0) \\ v'''(t, l) \\ \phi(t, l) \end{Bmatrix}^{(i)} = EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(i)} = EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ 3l^2 & 2l & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

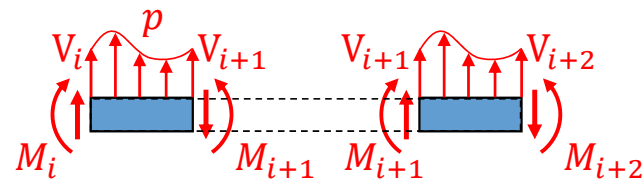
$$= EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

節点*i*

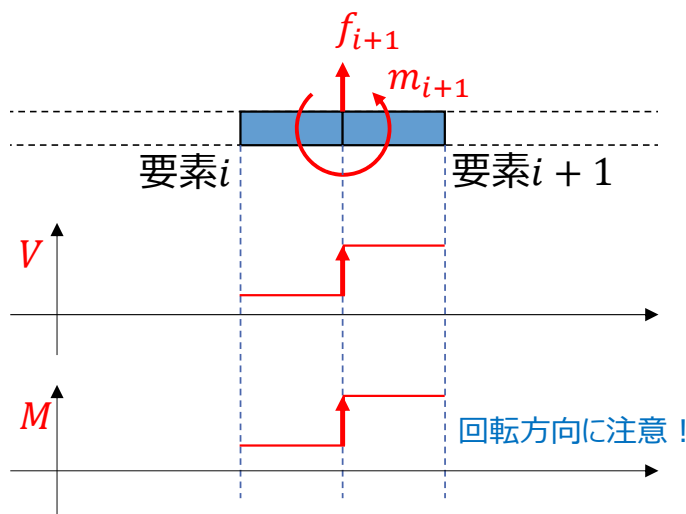
節点*i* + 1

節点*i* + 2



要素*i*

要素*i* + 1



要素剛性マトリクス

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ -M_i \\ -V_{i+1} \\ M_{i+1} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{i+1} \\ m_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_i \\ -M_i \\ -V_{i+1} \\ M_{i+1} \end{Bmatrix}^{(i)} + \begin{Bmatrix} V_{i+1} \\ -M_{i+1} \\ -V_{i+2} \\ M_{i+2} \end{Bmatrix}^{(i+1)}$$



要素剛性マトリクスを組み合わせて
全体剛性マトリクスを作る

これは『平面保持仮定』から得られる結論

運動方程式 $\rho A \ddot{v} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p$

↓ 平面保持仮定

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix}$$

合わせるために
なんとなく

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho Al}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho Al}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

集中質量マトリクス

最終的に同じ形で書ける

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix}$$



車両の接地力を代入する

$$\begin{Bmatrix} p \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{LM}_P(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{z}}) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

数学的部分をちゃんとしないと気がすまない人には,

$$\frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

整合質量マトリクス

というもある・・・(重み付き残差法・仮想仕事の定理などから導く)
ただし、必ずしも精度が良いわけではない

車両の接地力を記述する： $\mathbf{L}\mathbf{M}_p(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{z}})$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ (l-x_1)/l & (l-x_2)/l \\ x_1/l & x_2/l \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{節点}i \\ \text{節点}i+1 \end{matrix}$$

軸重1を分配

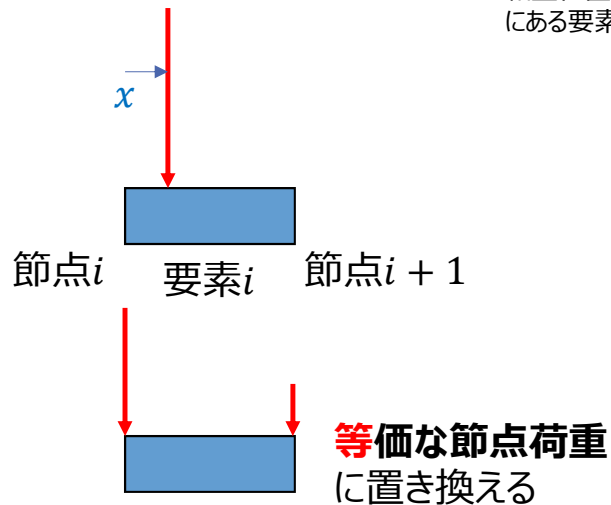
節点数×軸重のマトリクス

軸重位置の範囲外にある要素は全てゼロ

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} \frac{M}{2} \\ \\ M \\ \frac{M}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} -g \\ -g \end{Bmatrix}$$

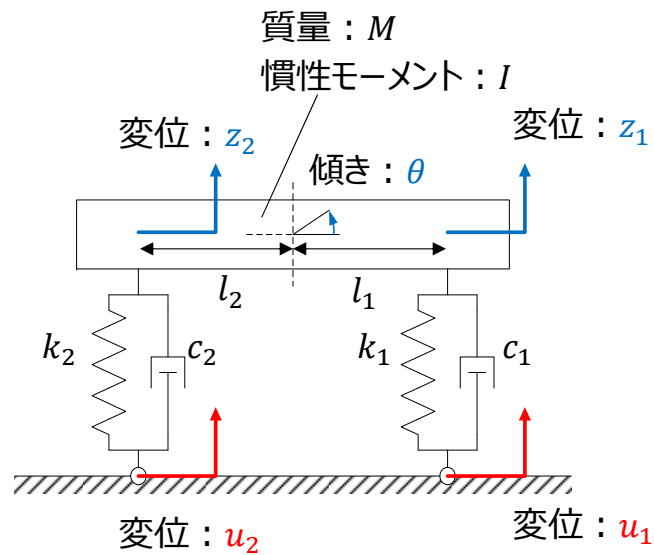
$$\ddot{\mathbf{z}} = \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix}$$



接地力とは
クルマの**重さ**から**慣性力**を差し引いたもの
または**バネの復元力**（ただし、**自然長基準**）
今、使っているモデルは
つりあい位置基準

橋梁のモデル化は**有限要素法**に基づいている。
有限要素法の立式過程においては、『**重み付き残差法**』が
最も汎用性が高く、ここで用いる『**内挿**』の概念を用いれば
数式は高度だけど、もう少し統一的に理解できるはず
このとき $m \neq 0$

橋梁からの**強制変位**を車両モデルに追加する



位置に関する
路面凹凸の関数

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(x_1, t) \\ v(x_2, t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R(x_1) \\ R(x_2) \end{Bmatrix}$$

車両位置の
橋梁振動成分
(節点位置ではない)

$$\begin{Bmatrix} y(x_1, t) \\ y(x_2, t) \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{v}$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

としてちゃんと三次曲線でも求められるが
大規模化するとやや面倒になってくる

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

車両と橋梁の相互作用モデルが記述できた

$$\mathbf{M}_V \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_V \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_V \mathbf{z} = \mathbf{C}_P \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_P \mathbf{u}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{M}_P (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{z}})$$



$$\mathbf{M}_V \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_V \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_V \mathbf{z} = \mathbf{C}_P (\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{L}^T \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{K}_P (\mathbf{r} + \mathbf{L}^T \mathbf{y})$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{M}_P (\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{z}})$$



※橋梁にも減衰を導入する（ずっと自由振動してしまうので）

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_V & \\ \mathbf{L} \mathbf{M}_P & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_V & -\mathbf{C}_P \mathbf{L}^T \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_V & -\mathbf{K}_P \mathbf{L}^T \\ & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_P \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_P \mathbf{r} \\ \mathbf{L} \mathbf{M}_P \mathbf{g} \end{Bmatrix}$$

MCKシステムとして記述できる！

でも、M, C, Kのそれぞれが時間変化するLを含んでいるので線形ではない！

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{L}^T \mathbf{y}$$

数値シミュレーションを実装するには？

ここまでの解説内容：

空間の離散化

$$v(x) \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ \vdots \\ N_n(x) \end{Bmatrix}$$

空間偏微分の
離散的処理

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v \cdot \frac{\partial N}{\partial x}$$

偏微分方程式の解 $v(x)$ を求める問題（難しい）を
多変数連立方程式の解 v を求める問題（かんたん）に変換する



あとは、**時間の離散化**を行えば良い

変分法を用いるのが一般的

※ 有限要素法で離散化すると、計算負荷が大きくなりすぎる

※ 変分法・・・陽解法と陰解法

① テイラー展開の高次項を無視

② Newmark- β 法（2階微分の高精度解法）

$$\begin{Bmatrix} v(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{Bmatrix} v(t_1) \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} v(t_T) \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} N_1(t) \\ \vdots \\ N_T(t) \end{Bmatrix}$$

