

2014年6月10日

[板書:35分]

Carnotサイクルの熱効率の導出

[スライド: 20分]

復習: 状態量・第2法則・サイクル

[10分] 中間試験の講評と反省

[10分] 演習

理想気体の可逆Carnotサイクルの熱効率に関するポイント

1. 熱効率を、**入熱量と放熱量**だけで表す式は、「**結果**」であって「**定義ではない**」。熱力学第一法則を吸収している。
2. **サイクル**を描くときは、必ず、「**矢印**」を付けて「**変化の方向**」を明示すること(不可逆ならばどうなるか?)。各状態に番号などを付けて明示すること。**1周**していなければ、**サイクルではない**。
3. **熱力学第一法則**をどの範囲で立てるか、すなわち、**始点と終点**に注意を払う。**サイクル一周なのか、一部の過程なのか**。
4. 既習概念である「**系**」と「**外界**」と「**境界**」に加えて、「**サイクル**」と「**熱源**」と「**仕事源**」という概念を導入した。
5. 変化が**準静的**であり、作動流体が**理想気体**であることを仮定した。前者は pdV の積分計算を行ったこと、後者は状態方程式を用いたことから明らかである(確かめよ)。

理想気体の可逆Carnotサイクルの熱効率に関するポイント

6. 理想気体の断熱過程の状態量を関係づけるPoissonの式は、指数の煩雑さゆえに、全てを記憶することはすすめない。たとえば、 $pV^\kappa = \text{const.}$ の一つだけ覚えて(要導出)、違う状態量に対しても自由自在に書き換えられることが重要である。

(基礎)Poissonの式を圧力と比容積 v [m^3/kg] を使って書け。

(練習)Poissonの式を、圧力と体積、体積と絶対温度、圧力と絶対温度の三通りに対して導き直せ。

7. 理想気体Carnotサイクルの熱効率は、**入熱量と放熱量の比(非状態量)から、高温と低温の比(状態量！)で表現し直せる。**

8. 等温過程は、実際には実現しがたい。

9. Carnotサイクル特有の $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ (Clausiusの関係式)は、**エントロピーにつなげる**べく、極めて重要となる。

理解を深めるために取り組むべき問題群

(問1) 板書では、時間的制約もあり、熱だけを議論して理想気体のCarnotサイクルの熱効率を導いた。熱効率を入熱量と放熱量だけで表す表式は、導出済みとして用いた。熱効率の定義式、すなわち、**仕事と入熱量の比**という出発点に立ち戻り、板書で示した誘導過程の不十分な箇所を補完せよ。したがって、**断熱膨張(2から3)と断熱圧縮(4から1)における仕事も計算**して、全仕事を入熱で割るという熱効率の定義にしたがって、再導出せよ。

[ヒント] した仕事(総和): $W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$

断熱膨張では、 $W_{23} = mc_v(T_1 - T_2) = C_v(T_1 - T_2)$

ここに c_v は**定容比熱**, C_v は**定容熱容量**(混同しない)

(問2) 単位質量あたりで考える。この場合、熱効率の定義式も、熱効率を入熱と放熱の比で表す式も、何ら変わらない。確かめよ。

(問3) 全ての議論を単位質量あたりで進めて、理想気体のCarnotサイクルの熱効率を再導出せよ。

単位質量あたりの入熱量 $q = Q/m$ (m は質量),

単位質量あたりのする仕事 $w = W/m$ を使う。

(問4) 定容熱容量 C_V を用いて同様に再導出せよ。

どのように導いても、熱効率は $1 - T_2/T_1$ となる。

導出に慣れた上での結果の記憶も重要である。

熱力学第1法則

エネルギーの「量」(quantity)

熱力学第2法則

エネルギーの「質」(quality)

サイクル (Cycle)

系1から系2などを経由して系1に戻るのがサイクル
(重要) 一周するのだから, 状態量は不変!

(注意) 系は完全に元に戻るが, 外界には変化を与える

熱力学では仕事(work)[J]で論ずるが, 実際(熱機関工学)
は仕事率(動力: power)[$W = J/s$]を使うことが多い

(入熱) - (仕事) = (内部エネルギー変化)

(収入: 仕送り) - (支出: 家賃+食費+交遊...)
= (残金: 財布の中身)

* 残金は、財布を開けば一意に定まる「状態量」

(a) 10万円を5か月溜めても、

(b) 50万円のボーナスが一度に入っても、同じ。

経路ではなく始点と終点のみに依存し、その時点で決まる。

* 収入と支出は、経路(稼ぎ方・使い方)による「非状態量」

* 内部エネルギーとのアナロジー(analogy):

内部エネルギーは状態量

熱と仕事は「非」状態量 => 扱いづらい

=> 状態量に書き換えたい

(入熱) - (仕事) = (内部エネルギー変化)

(収入: 仕送り) - (支出: 家賃+食費+交遊...)
= (残金: 財布の中身)

- * **熱機関**(heat engine)の目的 「**熱を仕事に変換**」
(経済とのアナロジー) 「**収入を支出に変換**」
- * 仕送りがなければどうなる？
=> 生活は回せない => **熱機関(サイクル)は回せない**
- * 仕送りも家賃も、毎月「**定期的**」に行い、
毎月リセット(**一戻り**)するもの
- * この定期を無限小に近づけると？ 無限回繰り返すこととなる(極例: 月割 => 日割 => 秒割 => ... **無限小**すなわち**微分**の概念)。

「最初の状態に戻して、それを無限に繰り返す」

熱力学第2法則とサイクル

「サイクル」の概念:

入熱と放熱の操作なしに、仕事をし続ける(エンジンを回し続ける)ことはできない。

* ガソリンを「補給し続け」なければ? 排気「し続け」なければ? タイヤは「回り続け」るか?

熱力学的には:

「系」はエンジン。「仕事源」がタイヤ。

「高温熱源(入熱)」がガソリン。

「低温熱源(放熱)」が排気ガス(or 大気)。

「外界」はドライバー/車内外空気/道路全体/...

演習問題(6月10日1限: 金川)

1. 中間試験の類題: Boyle-Charlesの法則(圧力・体積・絶対温度を気体定数と結びつけよ)から出発して, 理想気体の状態方程式を, **圧力・密度・比内部エネルギー**という3つの状態量, および, **比熱比**だけで表現する形に変形せよ。

(ヒント) **定容(定積)比熱**を, **比熱比と気体定数で表す式**を, 証明せずに使ってよい。**比内部エネルギーの微小変化が, 定積比熱と絶対温度の微小変化に等しい**ことも, 証明せずに使ってよい。

(注) **記号の定義を漏れなく書け**。単位質量あたりか, そうでないのかに注意せよ。**比熱と熱容量の差異, 比内部エネルギーと内部エネルギーの差異**に注意を払い首尾一貫させよ。

2. 感想を書いてください。

カルノーの定理

熱力学的温度

カルノーの定理

カルノー(1796-1832)

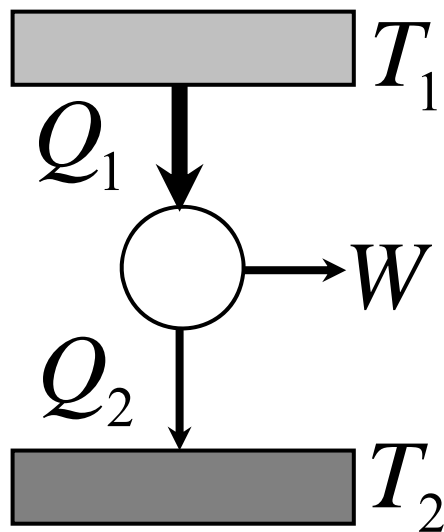
「火の原動力に関する省察」を公表(1824).

カルノーサイクル, 熱機関の動作原理を発見.



カルノーの定理 (Carnot's theorem)

2つの可逆等温過程と2つの可逆断熱過程からなる理想的なサイクル



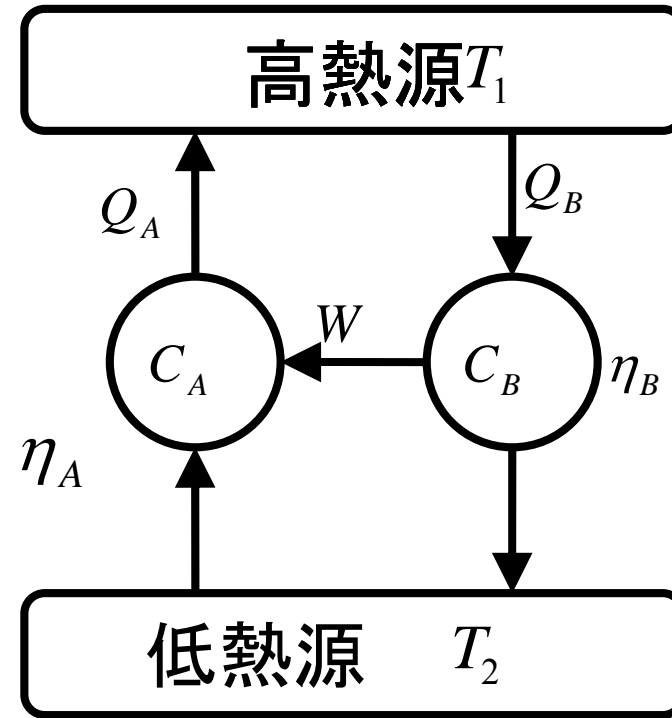
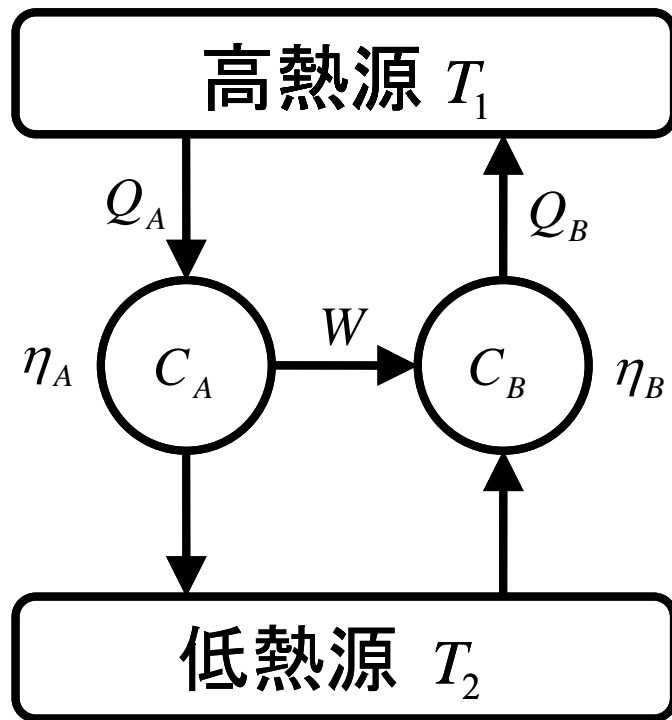
熱機関の熱効率:

$$\eta = \frac{\text{正味の得られる仕事}}{\text{高熱源から受けとった熱量}} \\ = \frac{W}{Q_1}$$

カルノーの定理

- 定まった高熱源と低熱源の間に働く熱機関サイクルのうち、すべての可逆サイクルの効率は等しく最大(理論最大熱効率)であり、不可逆サイクルの効率は必ずそれよりも小さい。
- 理論最大熱効率は作動流体の種類に依存しない。

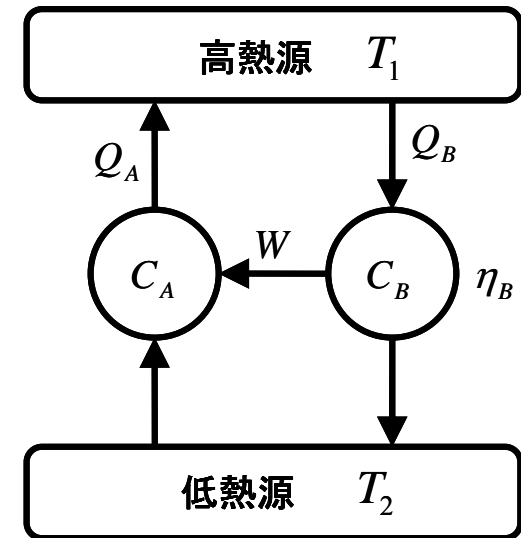
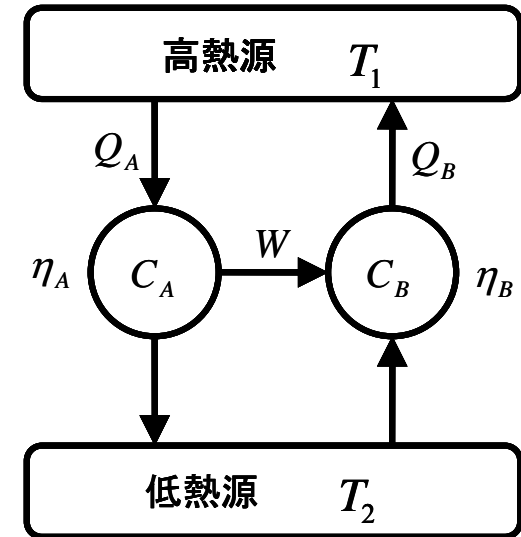
1. すべての可逆サイクルの効率は等しい.



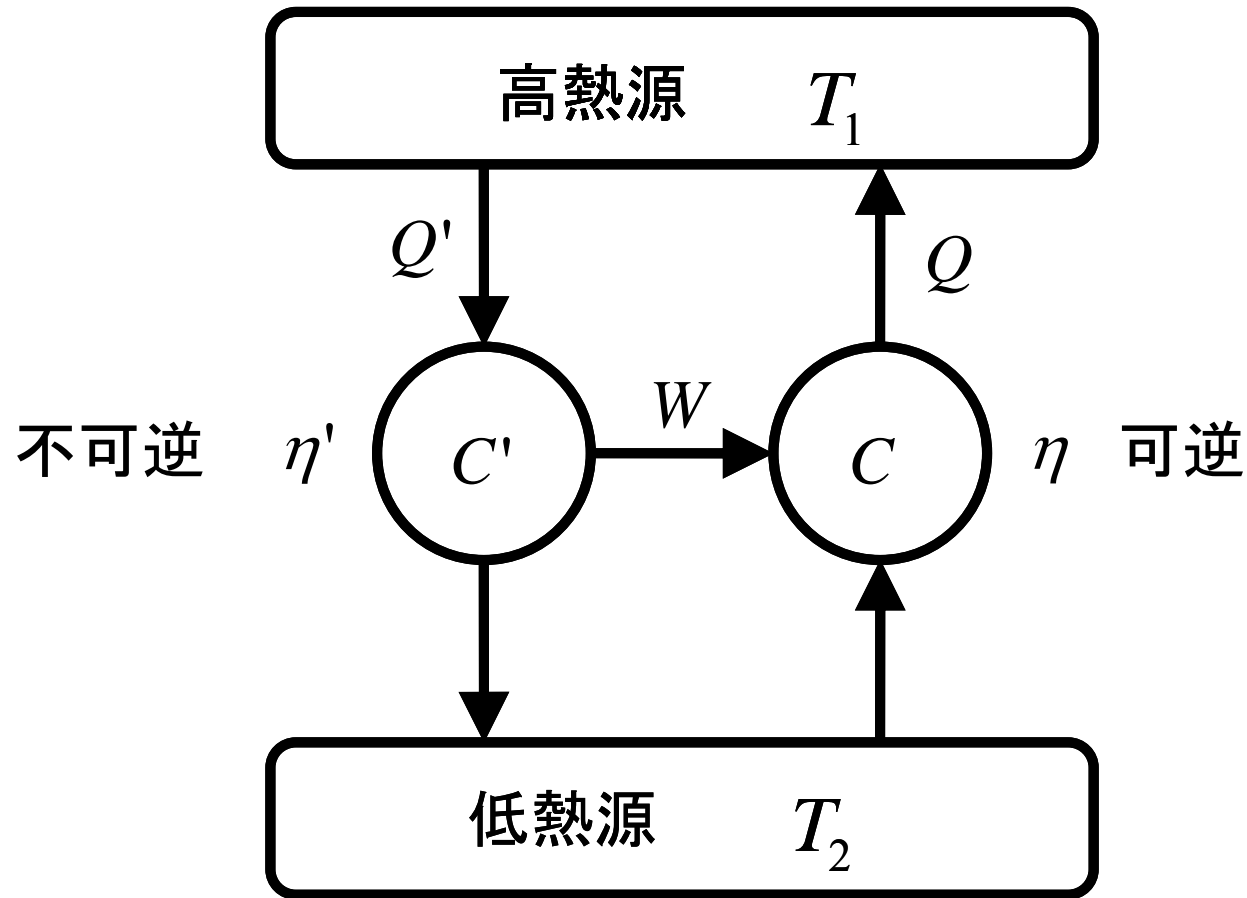
C_A : カルノーサイクル

C_B : カルノーサイクルを逆方向に行うカルノーヒートポンプ

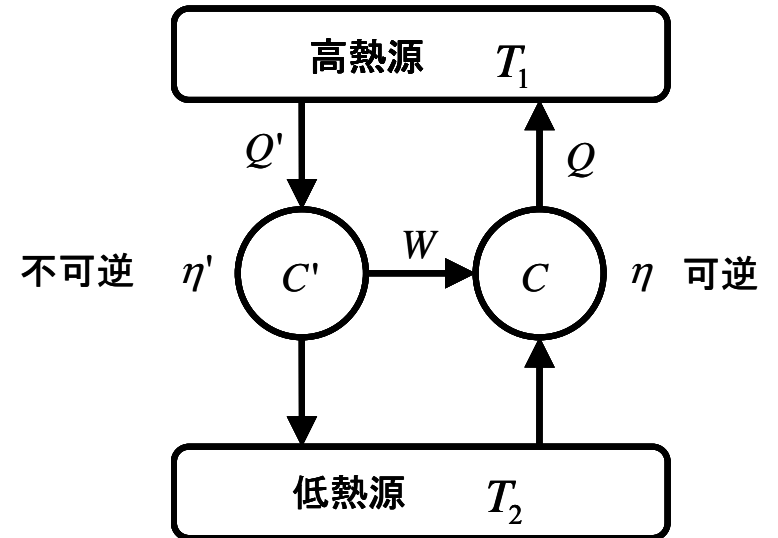
1. すべての可逆サイクルの効率は等しい。



2. 不可逆サイクルの効率は可逆サイクルよりも小さい.

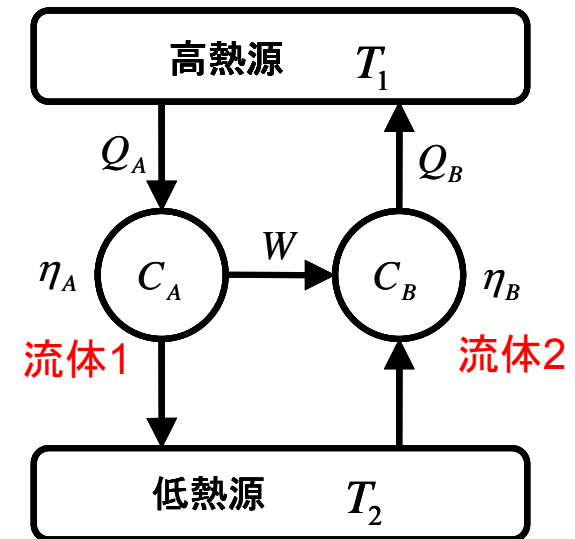


2. 不可逆サイクルの効率は可逆サイクルよりも小さい。



3. 理論最大熱効率 は作動流体の種類に依存しない.

カルノーサイクル C_A とカルノーヒートポンプ C_B が
同一高熱源と低熱源間で作動している.
熱機関は作動流体1を, ヒートポンプは
作動流体2を使用している.



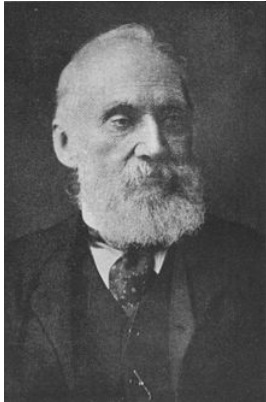
熱力学的温度

温度 (temperature)

<温度目盛>

絶対温度: K

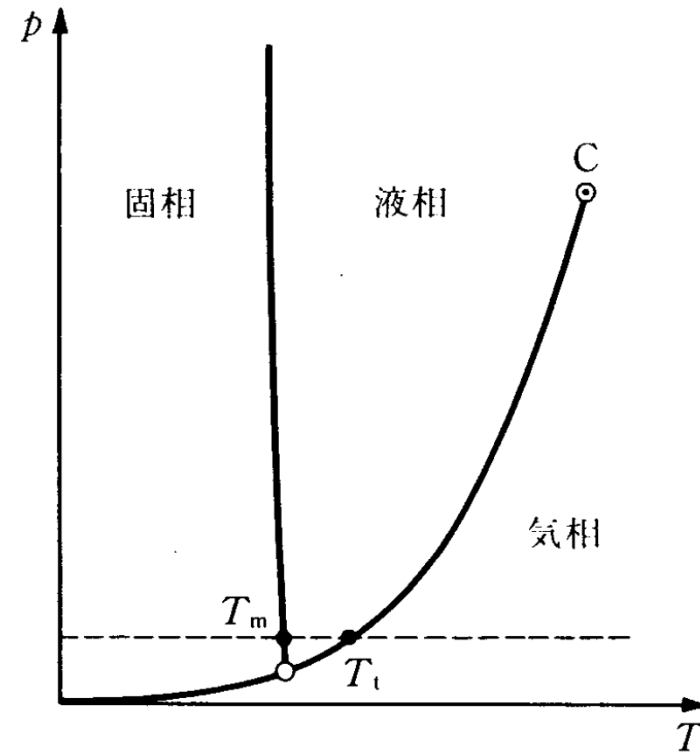
... トムソン(ケルビン卿, 1824-1907)



あらゆる物質の最低温度を0 K,
水の三重点を273.16 Kとした.

$t^{\circ}\text{C} = T\text{K}$ とすると,

$$t = T - 273.16$$



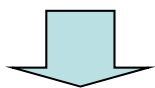
- ⊙: 臨界点(C), 647.2K, 218.3 atm
- : 三重点(T_t), 273.16K, 6.025×10^{-3} atm
- : 融点(T_m), 273.15K, 6.028×10^{-3} atm

図 7.1 水の相図 (状態図)

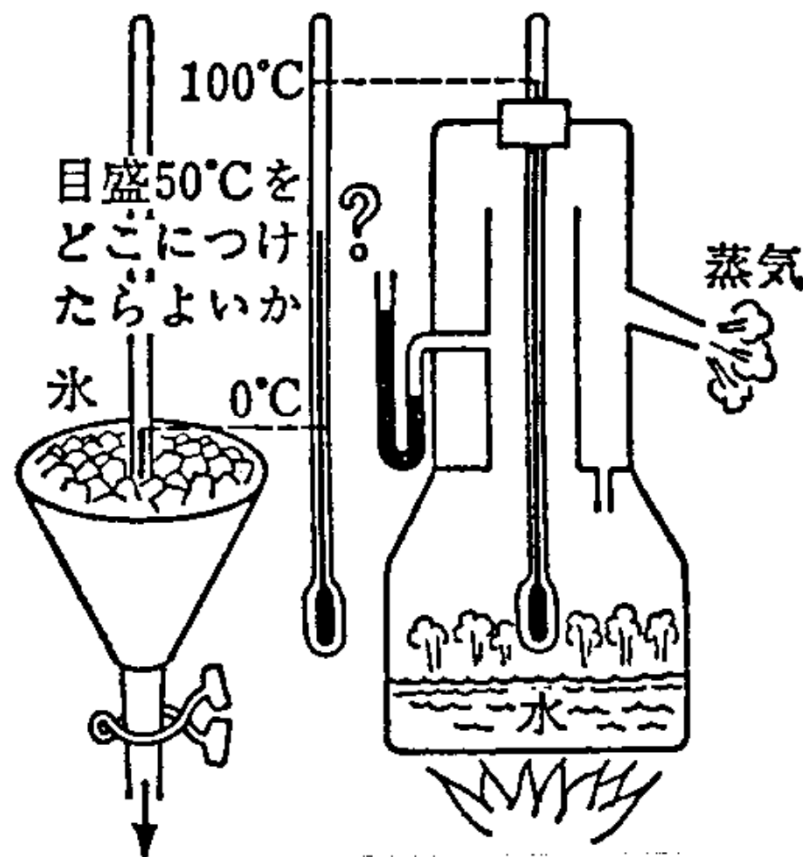
熱力学的温度 (thermo dynamical temperature)

一般的に気体や液体の膨張による体積変化を温度計に利用しているが、実在の物質では正確な温度を表示しない。

→ 動作流体の種類に関係しない
可逆カルノーサイクルを利用して
熱力学的温度を定める。



物質の性質に依存しない
理想的な熱力学的温度: t



熱力学的温度 (thermo dynamical temperature)

可逆カルノーサイクルにおいて、温度 t_1 の高熱源から Q_1 の熱を受け取り、温度 t_2 の低熱源へ Q_2 の熱を捨てると、温度と熱量の関係は

$$\therefore \frac{t_2}{t_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

また、大気圧下で沸騰する水の温度を t_B 、融解する氷の温度を t_M とすると、 $t_B - t_M = 100 \text{ deg}$

これらを熱源として可逆サイクルを行わせるときに授受する熱をそれぞれ Q_B 、 Q_M とすると、

$$\frac{t_B}{t_M} = \frac{t_M + 100}{t_M} = \frac{Q_B}{Q_M}$$

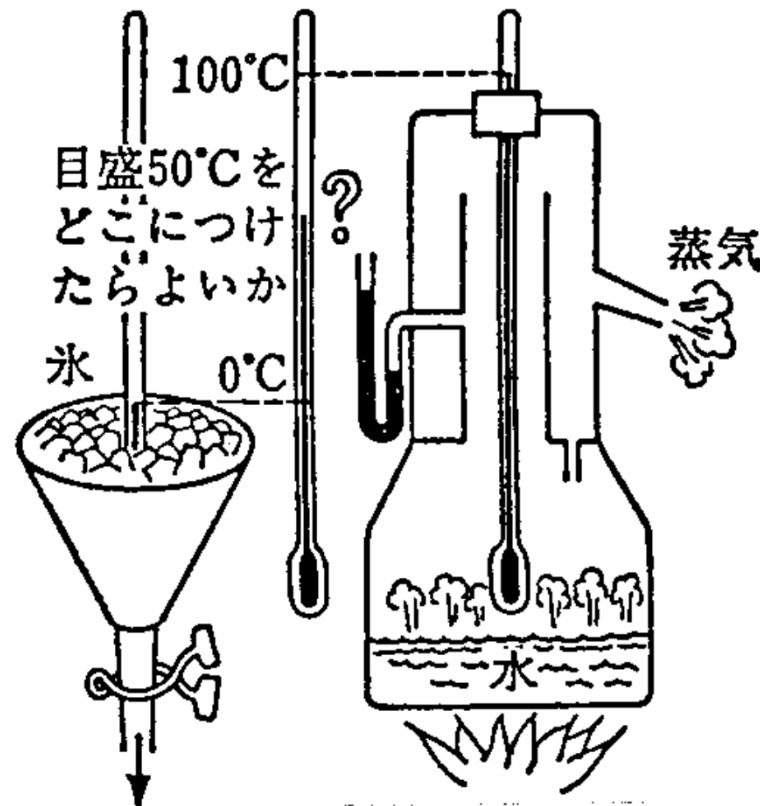
を測定して t_M を求めると、 $t_M = 273.15$

未知の温度 t は、 $\frac{Q}{Q_M}$ を測定すれば、 $\frac{Q_B}{Q_M}$

$$\frac{t}{t_M} = \frac{Q}{Q_M} \text{ より、} \therefore t = 273.15 \times \frac{Q}{Q_M} \text{ と求まる。}$$

さらにこれは(水の三重点を273.15Kとすると)

絶対温度 T と一致して、 $\therefore T = 273.15 \times \frac{Q}{Q_M}$



熱力学的温度

- (1) 温度計の種類や構造には全く無関係に絶対的な温度を定義する。(絶対温度と等価)
- (2) 可逆カルノーサイクルの等温過程で出入りする熱の比は、高熱源と低熱源の温度の比に等しいことを利用している。
- (3) 理想気体を用いた気体温度計の示す温度と完全に一致している。

例題15-1

温度 30°C の表層海水と温度 5°C の深層海水とをそれぞれ高温, 低温の熱源とするカルノーサイクル熱機関を作る場合, この熱機関の熱効率はいくらになるか.

例題15-2

温度が 300°C の熱源から毎秒 10^3J の熱を受け取ることができるとする。これを高熱源とし、 0°C の戸外大気を低熱源とする可逆熱機関の仕事率はどれだけか。

この仕事を使い、可逆サイクルで戸外大気から 20°C の室内へ熱を移すとするれば、室内に加えることのできる熱は毎秒何Jか。この熱は、熱源の熱で直接室内を暖める場合の何倍になるか。