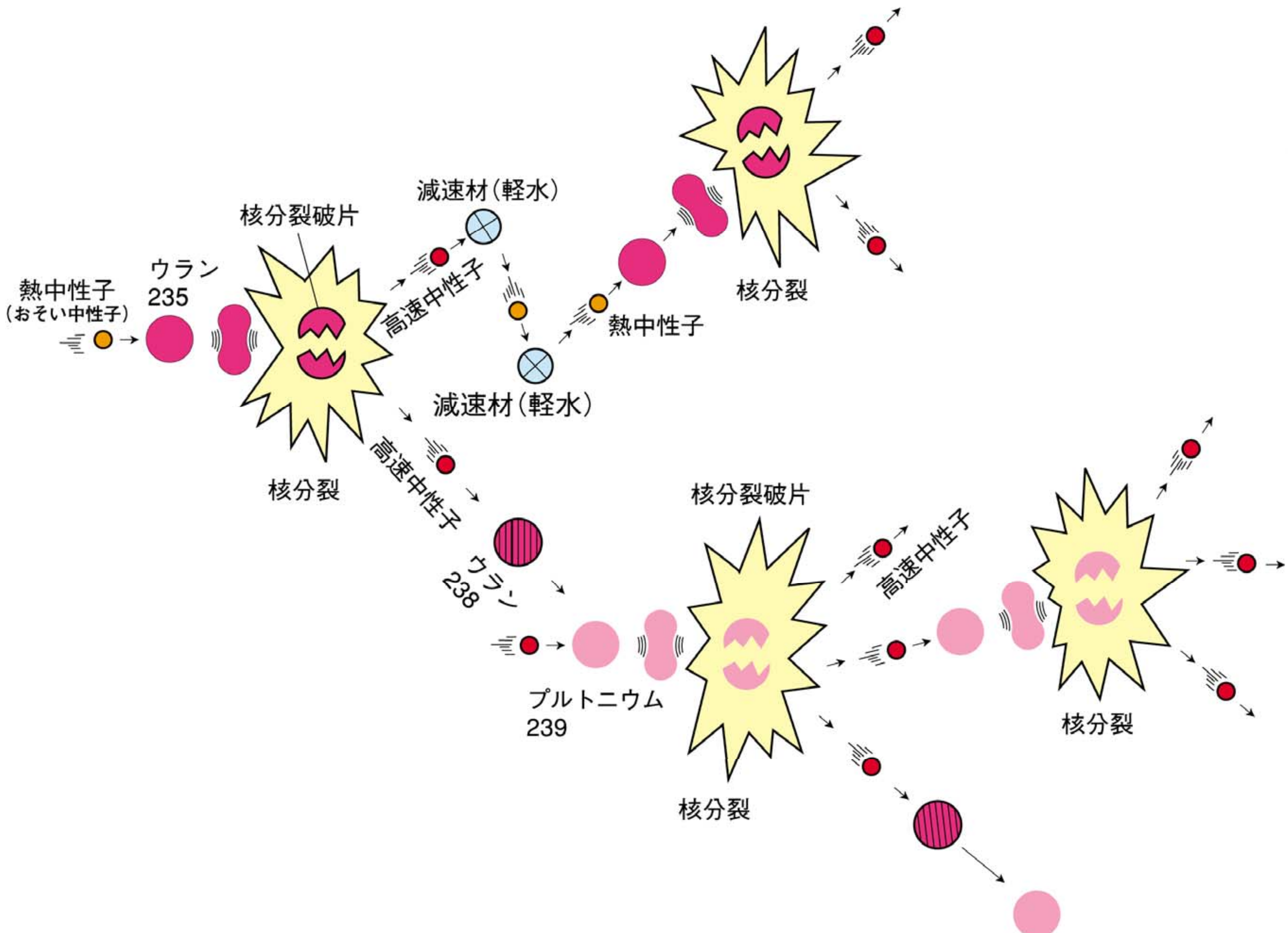
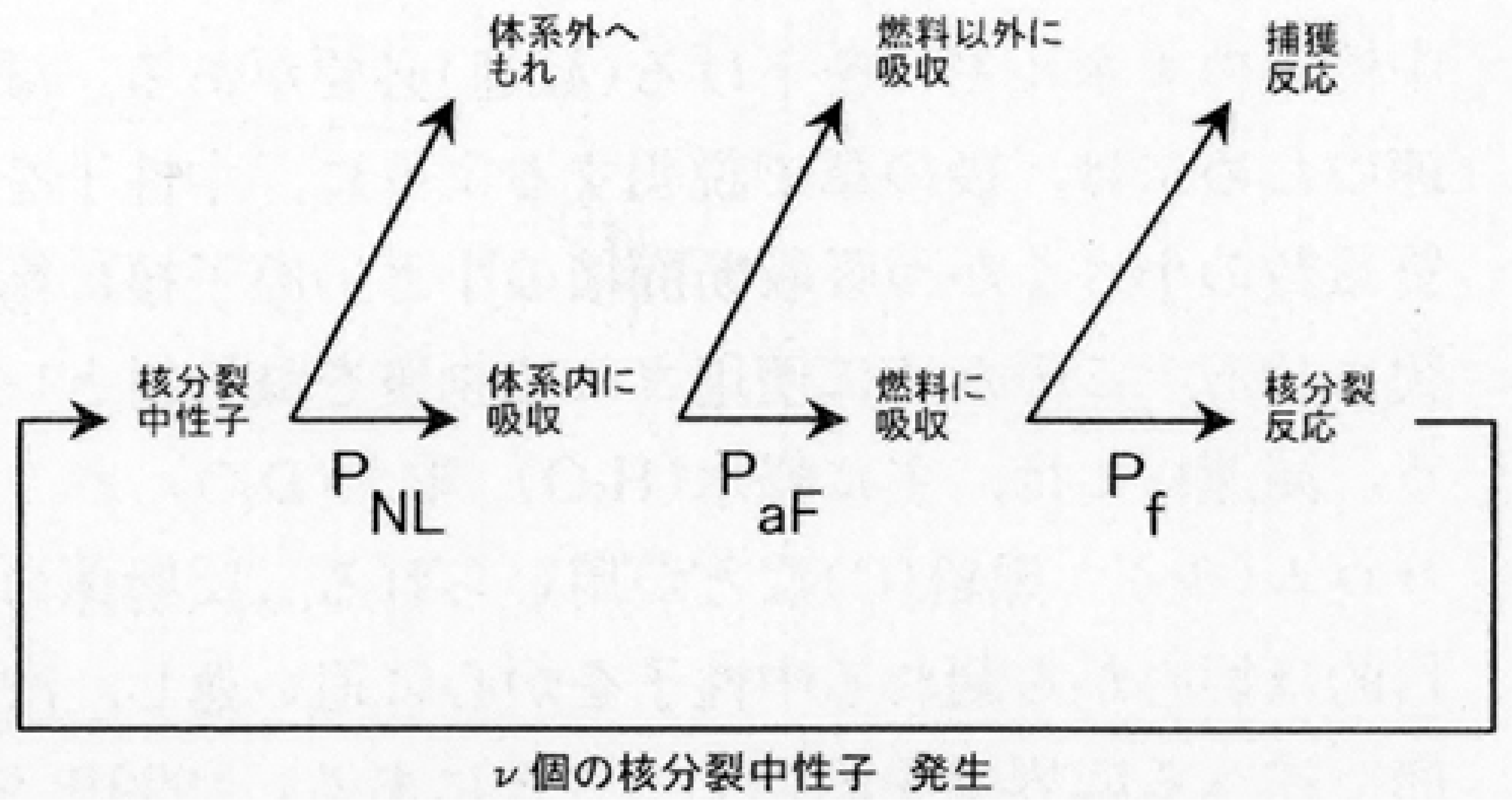
原子炉の動特性

ウランの核分裂とプルトニウムの生成・核分裂



核分裂連鎖反応のサイクル



世代と増倍率

- 核分裂で生まれた中性子が再び核分裂を起こして次の中性子を生み出すまでの過程の一回り、を世代(Generation)と言う。
- 世代間の中性子の数の比を増倍率（multiplication factor）kと定義する。

$$\boldsymbol{k} = \frac{ある世代の中性子数}{その一つ前の世代の中性子数}$$

即発中性子寿命

- (即発中性子寿命)=(全減速時間)+(拡散時間)

$$l_p = t_s + t_d \approx t_d \qquad (t_s << t_d)$$

- いま、無限増倍率を以下の通り定義すると、

$$(\text{増倍率}k_\infty) = \frac{(l_p\text{秒後の中性子の吸収})}{(1\text{個の中性子吸収})}$$

$$N_F(t + l_p) = k_\infty \cdot N_F(t)$$

$$N_F(t) + l_p \frac{dN_F(t)}{dt} + \cdots = k_\infty \cdot N_F(t)$$

$$\frac{dN_F(t)}{dt} = \frac{k_\infty - 1}{l_p} \cdot N_F(t)$$

原子炉ペリオド(e倍時間)

- 即発中性子数の変化

$$\frac{dN_F(t)}{dt} = \frac{k_\infty - 1}{l_p} \cdot N_F(t)$$

$$N_F(t) = N_F(0) \cdot e^{\frac{k_\infty - 1}{l_p} t} = N_F(0) \cdot e^{\frac{t}{T}}$$

- ここで、Tは原子炉ペリオド(e倍時間)

$$T = \frac{l_p}{k_\infty - 1}$$

即発中性子のみを考慮した場合の原子炉動特性

- この中性子束の時間変化の式をもとに、原子炉の動特性挙動に関して簡単な検討を行なってみる。
- はじめに、ある原子炉が臨界状態にある場合を考える。この時、k=1であり、原子炉ペリオドはT＝∞、そして式 $\phi(t)=A_0\exp\left(-t/T\right)$ から、ϕ(t)は時間に依存しない一定の値をとる。
- この臨界の原子炉において、何らかの原因で、増倍率kが0.001（0.1%）増加して、k=1.001なったとする。**世代寿命 l_pとして熱中性子炉の典型的な値である<u>10⁻⁴秒</u>**を仮定すると、
- T=10^{-4}／（1−1.001）=−0.1となるから、１秒後の原子炉の出力は、

$$\frac{\phi(1)}{\phi(0)}=\exp\left(-1\ /\ (-0.1)\ \right)=\exp\left(10\right)=22026$$

- となる。すなわち、原子炉出力が1秒後に2万倍以上になることが分かる。我々が製作可能な機械的な装置では、信号を受けてから装置が働くまでに通常１秒程度の時間が必要であり、<u>原子炉が1秒間に2万倍もの出力上昇を起こすとすれば、その原子炉は、**制御不能**と言える。</u>

遅発中性子の役割

遅発中性子

- 核分裂反応後2から3個の中性子が放出される（^{235}Uの場合平均2.4個）。
- この中性子の大部分は核分裂反応直後に放出されるが、これとは別に、ごくわずかな割合の中性子（^{235}Uの場合0.65%）が、数秒程度の遅れを持って放出される。
- 核分裂直後（10^{-4}秒程度）に放出される中性子は核分裂片から直接放出されるが、時間遅れを持って放出される中性子はそれとは異なる過程で放出される。

遅発中性子の生成過程

- 核分裂に伴って作られる数多くの核分裂生成物の内の一つに、^{87}Brがある。この核は、約55秒の半減期でβ-壊変して励起状態の^{87}Kr*　に壊変する。壊変によって作られた励起状態の核は、通常、γ壊変して基底状態の核となるが、一部の^{87}Kr*は、γ壊変をせずに、中性子を放出する壊変を起こす 。

$$^{87}Br \xrightarrow{\beta^-,\,55s} {}^{87}Kr^* \quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{中性子放出}} {}^{86}Kr \\ or \\ \xrightarrow{\gamma\text{壊変}} {}^{87}Kr \end{cases}$$

- このような過程による中性子放出は、この過程全体が実質的に親核の^{87}Brの半減期55秒で支配されるため、中性子放出があたかも、核分裂発生後に55秒の半減期を持って起こるように見える。

遅発中性子先行核

- このような過程によって、時間遅れを持って放出される中性子を遅発中性子と呼び、また、^{87}Brのように、核分裂反応で生成され、その後中性子放出を伴う壊変をする原子核を、**先行核（precursor）**と呼ぶ。
- 現在までに、200種類以上の先行核が知られている。しかしながら、200以上のもの先行核をそのまま取り扱うのは煩雑になるので、先行核を次表に示すように６つの組にまとめられている。
- 第１の組は、先に述べた^{87}Br（半減期55.6秒）のみ、第2組は主として^{137}I（半減期24.5秒）と^{88}Br（半減期16.5秒）の2つの核から成る。他の組は、より多くの先行核から構成される。

遅発中性子
先行核と半減期

- 1核分裂当りの発生する全中性子数（ν）に対する遅発中性子数（ν_d）の割合を、全遅発中性子割合と呼び、β（$=\nu_d/\nu$）で表わす。
- 同じく1核分裂当りの発生する全中性子数に対するi組（i=1，6）の遅発中性子数（$\nu_{d,i}$）の割合をi組の遅発中性子割合とよび、β_i（$=\nu_{d,i}/\nu$）で表わす。
- a_iを、全遅発中性子割合βに対するi組の遅発中性子割合β_iの比$a_i=\beta_i/\beta$で定義する。

$$\beta=\sum_{i=1}^{6}\beta_i \qquad \sum_{i=1}^{6}a_i=\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\beta}=\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{6}\beta_i=1$$

組	先行核	半減期 (s)
1	^{87}Br	55.6
2	^{137}I ^{88}Br ^{134}Sb, ^{136}Te, ^{141}Cs	24.5 16.5
3	^{138}I ^{89}Br ^{84}As, ^{87}Se, ^{92}Rb, ^{93}Rb, ^{147}La	6.49 4.40
4	^{139}I ^{90}Br Ga, As, Se, Br, Kr, Rb, Y, In, Sb, Te, I, Xe, Cs	2.29 1.92
5	Ga, As, Se, Br, Kr, Sr, Y, In, Sn, Sb, I, Xe, Cs, Ba	(～0.5)
6	Ga, Se, Br, Kr, Rb, In, Cs	(～0.2)

原子炉方程式からのペリオドの導出(1/2)

- 無限平板状で外挿距離を含んだ厚さaの原子炉に対する時間依存の拡散方程式(原子炉方程式)から、平板状原子炉の時間(t)ならびに空間(x)を変数とした中性子束は、次式で与えられる。

$$\phi(x,t) = A_1 \exp(-\lambda_1 t)\cos(B_g x)$$

- このとき、時間は十分経過したものとし、n=1に対するバックリングを幾何学的バックリングB_gとする。

$$\lambda_1 = v\Sigma_a + vDB_g^2 - v\nu\Sigma_f$$

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

原子炉方程式からのペリオドの導出(2/2)

- 時間変化部分のみを取り出すと、中性子束は、次式によって表わすことができる（ここで、A_0は定数）。

$$\phi(t) = A_0 \exp\left(-\lambda_1 t\right)$$

- ここで、

$$\lambda_1 = \frac{\left(1-k\right)}{\ell}$$

- であるから、即発中性子寿命を用いて、

$$\phi(t) = A_0 \exp\left(-\frac{(1-k)}{\ell} t\right)$$

- すなわち、

$$\phi(t) = A_0 \exp\left(-t/T\right)$$

- ただし、原子炉ペリオドを、以下としている。

$$T = \frac{\ell}{\left(1-k\right)}$$

平均世代寿命

- いま

(平均世代寿命 : l) = (即発中性子の平均寿命) × (生成割合)

+ (遅発中性子の平均寿命) × (生成割合)

$$l = (1-\beta)l_p + \sum_{i=1}^{6} \beta_i l_i$$

- ここで、

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^{6} \beta_i$$

$$l_i = \bar{t}_i + (t_s + t_d) \approx \bar{t}_i$$

- より

$$l = (1-\beta)l_p + \sum_{i=}^{6} \beta_i \bar{t}_i \approx l_p + \sum_{i=1}^{6} \beta_i \bar{t}_i$$

遅発中性子を考慮した場合の原子炉動特性

- いま、はじめに臨界状態にある原子炉において、何らかの原因で、増倍率kが0.001（0.1%）増加して、k=1.001になったとする。
- 即発中性子寿命 $l_p \approx 10^{-4}$ に対して、遅発中性子平均寿命が、
  $\sum_{i=1}^{6} \beta_i \bar{t}_i = 0.085$
- であるから、ペリオドは、T=0.085/|1.000 - 1.001|＝85秒となる。
- よって、１秒後の原子炉の出力は、

$$\frac{\phi(1)}{\phi(0)} = exp\left(-1 \ / \ (-85)\ \right) = exp\left(0.0117\right) = 1.012$$

- となり、1秒後の原子炉出力は高々1.2%上昇するのみであることがわかる。また、このペリオドにおける原子炉出力が2倍となるまでの時間は、約60秒（ $85 \times ln\left(2\right) \approx 60$ ）である。この程度の時間変化は、我々の機械的装置で十分制御可能である。

原子炉動特性における遅発中性子の役割

- この例より、遅発中性子の有無が原子炉の時間変化を決定付けること、すなわち遅発中性子が原子炉にとって不可欠なものであることが理解できる。
- すなわち、遅発中性子によって、原子炉の動特性が、機械的な制御が可能な速さになるのである。
- ただし、kが1＋βを超えると遅発中性子がなくても臨界となる、すなわち即発中性子のみで臨界超過となるので、原子炉の振舞いは上述した即発中性子寿命によって左右されることとなり、我々の制御が及ばなくなる。

1点炉動特性方程式

1点炉動特性方程式の導出(1/5)

- 先行核濃度C_i（r, t）　を次のように定義する

$$C_i(\mathbf{r},t) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{位置}\mathbf{r}\text{のまわりの単位体積において} \\ \text{遅発中性子を放出して壊変する先行核（第}\,\boldsymbol{i}\,\text{組）の数の期待値} \end{array} \right)$$

- このC_iを用いると、単位時間単位体積当りの先行核の壊変数（の期待値）は、先行核の数C_iと壊変定数λ_iの積で与えられるので、$\lambda_i C_i$と書くことができる。一方、単位時間単位体積当りに生成する遅発中性子先行核の数（の期待値）は、核分裂率$\Sigma_f \phi$に全中性子発生数νと遅発中性子割合β_iを乗じて与えられるので、$\beta_i \nu \Sigma_f \phi$と書ける。これらを用いると、$C_i$のバランス（釣り合い）の式は

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\underbrace{\lambda_i C_i(\mathbf{r},t)}_{\substack{\text{先行核の壊変数} \\ =\text{遅発中性子発生数}}} + \underbrace{\beta_i \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r},t)}_{\text{核分裂による先行核の生成数}} \qquad (i = 1\sim 6)$$

１点炉動特性方程式の導出(2/5)

- 時間依存拡散方程式の中の中性子源項

$$\begin{pmatrix}\text{単位体積・単位時間あたりの}\\ \text{遅発中性子を考慮したときの}\\ \text{中性子発生数}\end{pmatrix} = \underbrace{(1-\beta)\nu\Sigma_f\,\phi(\mathbf{r},t)}_{\text{即発中性子発生数}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i(\mathbf{r},t)}_{\substack{\text{先行核壊変による}\\ \text{遅発中性子発生数}}}$$

- より、時間依存拡散方程式は

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\,\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a\,\phi(\mathbf{r},t) + (1-\beta)\nu\Sigma_f\,\phi(\mathbf{r},t) + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i(\mathbf{r},t)$$

- この式が、遅発中性子を考慮した動特性方程式の原型となる。

1点炉動特性方程式の導出(3/5)

- 中性子束と先行核濃度がともに、時間と空間に分離可能であり、かつ先行核濃度と中性子束が同一の空間分布を持つ仮定する。すなわち

$$\phi(\mathbf{r},t)=v\,n(t)\,\varphi_1(\mathbf{r})$$

$$C_i(\mathbf{r},t)=C_i(t)\,\varphi_1(\mathbf{r})$$

- そして、遅発中性子先行核濃度と中性子束の空間分布である は、次の方程式を満たすものとする。

$$\nabla^2\varphi_1(\mathbf{r})+B_g{}^2\varphi_1(\mathbf{r})=0$$

1点炉動特性方程式の導出(4/5)

- 以上の式より

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\left(DB_g^{\ 2} + \Sigma_a - (1-\beta)\nu\Sigma_f \right) v\, n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \beta_i \nu \Sigma_f v\, n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (\, i = 1 \sim 6\,)$$

- 無限増倍率: $k_\infty = \dfrac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}$
- 拡散面積: $L^2 = \dfrac{D}{\Sigma_a}$
- 実効増倍率: $k = \dfrac{k_\infty}{1 + L^2 B_g^{\ 2}}$
- 有限体系の中性子寿命: $\ell = \dfrac{1}{v\Sigma_a \left(1 + L^2 B_g^{\ 2}\right)}$

1 点炉動特性方程式の導出 (5/5)

- 1点炉動特性方程式

$$\frac{d\,n(t)}{d\,t}=\frac{(k(1-\beta)-1)}{\ell}\,n(t)+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i\,(t)$$

$$\frac{d\,C_i\,(t)}{d\,t}=\frac{k}{\ell}\beta_i\;\;n(t)-\lambda_i C_i\,(t)\qquad (\;i=1\sim 6\;)$$

- 上式は7元の連立微分方程式であり、原子炉内で中性子束の空間分布が変化しないと仮定したときの、原子炉の動特性を支配する方程式であり、これを1点炉動特性方程式と呼んでいる。

反応度と反応度方程式

- 反応度:反応度(reactivity) ρ は、次の式で実効増倍率と関係付けられている量で、基本的に実効増倍率が1からどれだけずれているかを表す量

$$\rho \equiv \frac{(k-1)}{k}$$

- この反応度を、時間依存性がある一般的な形として動特性方程式に代入すると、

$$\frac{d\,n(t)}{d\,t} = \frac{(\rho(t) - \beta)}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t)$$

$$\frac{d\,C_i(t)}{d\,t} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \qquad (i = 1 \sim 6)$$

- ただし、中性子世代時間(generation time)

$$\Lambda = \frac{\ell}{k}$$

1点炉動特性方程式の解法と反応度方程式 ー　ステップ状反応度の挿入(1/5)ー

- 時刻t＝0まで臨界状態で一定の出力で運転している原子炉を考える。その原子炉に時刻t=0に、ある値の反応度が挿入された場合の原子炉の出力変化応答を、1点炉動特性方程式を解くことによって検討する。このような反応度挿入を、ステップ状の反応度挿入と呼ぶ。t=0に投入される反応度をρ_0とすると、ステップ状挿入反応度$\rho(t)$は、次式で与えられる。

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \rho_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

1点炉動特性方程式の解法と反応度方程式 ー ステップ状反応度の挿入(2/5)ー

- このような場合の一点炉動特性方程式の解法はいくつかあるが、ここでは中性子密度ならびに6つの遅発中性子密度に次の形の解を仮定して解く方法を採用することにする。

$$n(t) = A\exp(\omega t)$$
$$C_i(t) = C_i \exp(\omega t) \qquad (\ i = 1 \sim 6\ )$$

- ここで、A、C_iは定数とし、ωとともに決定すべきパラメータである。これらを1点炉動特性方程式に代入して、

$\exp(\omega t)$を消去すると、

$$A\omega = A\frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i$$

$$C_i\omega = \frac{\beta_i}{\Lambda} A - \lambda_i C_i \qquad (\ i = 1 \sim 6\ ) \quad \Longrightarrow \quad C_i = \frac{\beta_i}{\Lambda(\omega + \lambda_i)} A$$

1点炉動特性方程式の解法と反応度方程式 ー　ステップ状反応度の挿入(3/5)ー

- Aを消去し、さらに整理すると次式が得られる。

$$\rho_0 = \omega \Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i}$$

- この式は、遅発中性子を6組（i=6）とすると7次の代数方程式であり、この式から任意のρ_0に対して7つの根、すなわち7つのωが与えられる。そして、この７つのω_j（ｊ＝1～7）を用いて、求めるべき中性子密度の時間変化は、次式となる。

$$n(t) = \sum_{j=1}^{7} A_j \exp(\omega_j t)$$

（参考）反応度方程式の導出

$$A\omega = A\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda} + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i$$

$$C_i = \frac{\beta_i}{\Lambda(\omega+\lambda_i)} A$$

$$\omega = \frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda} + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i \frac{\beta_i}{\Lambda(\omega+\lambda_i)}$$

$$\Lambda\omega = (\rho_0-\beta) + \sum_{i=1}^{6}\frac{\lambda_i\beta_i}{(\omega+\lambda_i)}$$

$$\rho_0 = \omega\Lambda - \sum_{i=1}^{6}\frac{\lambda_i\beta_i}{\omega+\lambda_i} + \beta = \omega\Lambda - \sum_{i=1}^{6}\frac{\lambda_i\beta_i}{\omega+\lambda_i} + \sum_{i=1}^{6}\frac{(\omega+\lambda_i)_i\beta_i}{\omega+\lambda_i}$$

$$= \omega\Lambda - \sum_{i=1}^{6}\frac{\lambda_i\beta_i}{\omega+\lambda_i} + \sum_{i=1}^{6}\frac{\lambda_i\beta_i}{\omega+\lambda_i} + \sum_{i=1}^{6}\frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i} = \omega\Lambda + \sum_{i=1}^{6}\frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i}$$

1点炉動特性方程式の解法と反応度方程式 ー　ステップ状反応度の挿入(4/5)ー

- 次式は、中性子密度の時間変化を決定するωを与える式であり、原子炉物理学では**反応度方程式**と呼ばれる。

$$\boxed{\rho_0 = \omega\Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i}}$$

- また、この式中のωを１/Tとおいて、書き換えた式を**逆時間方程式**という。

$$\boxed{\rho_0 = \frac{\Lambda}{T} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{1+\lambda_i T}}$$

- 一般にΛは小さいのでTがよほど短くない限りΛ/Tの項は第2項に比し無視できるので、次式に近似できる。

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{1+\lambda_i T}$$

（参考）逆時間方程式の変形

$$\Lambda = \frac{\ell}{k}$$

$$\rho_0 = \omega\Lambda + \sum_{i=1}^{6}\frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i}$$

$$k = \frac{1}{1-\rho} \qquad \rho = \frac{(k-1)}{k}$$

$$\Lambda = \frac{\ell}{k} = \ell(1-\rho)$$

$$\rho_0 = \omega\ell(1-\rho_0) + \sum_{i=1}^{6}\frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i}$$

$$\rho_0(1+\omega\ell) = \omega\ell + \sum_{i=1}^{6}\frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i}$$

$$\boxed{\rho_0 = \frac{\omega\ell}{(1+\omega\ell)} + \frac{1}{(1+\omega\ell)}\sum_{i=1}^{6}\frac{\omega\beta_i}{\omega+\lambda_i}}$$

1点炉動特性方程式の解法と反応度方程式 ー　ステップ状反応度の挿入(5/5)ー

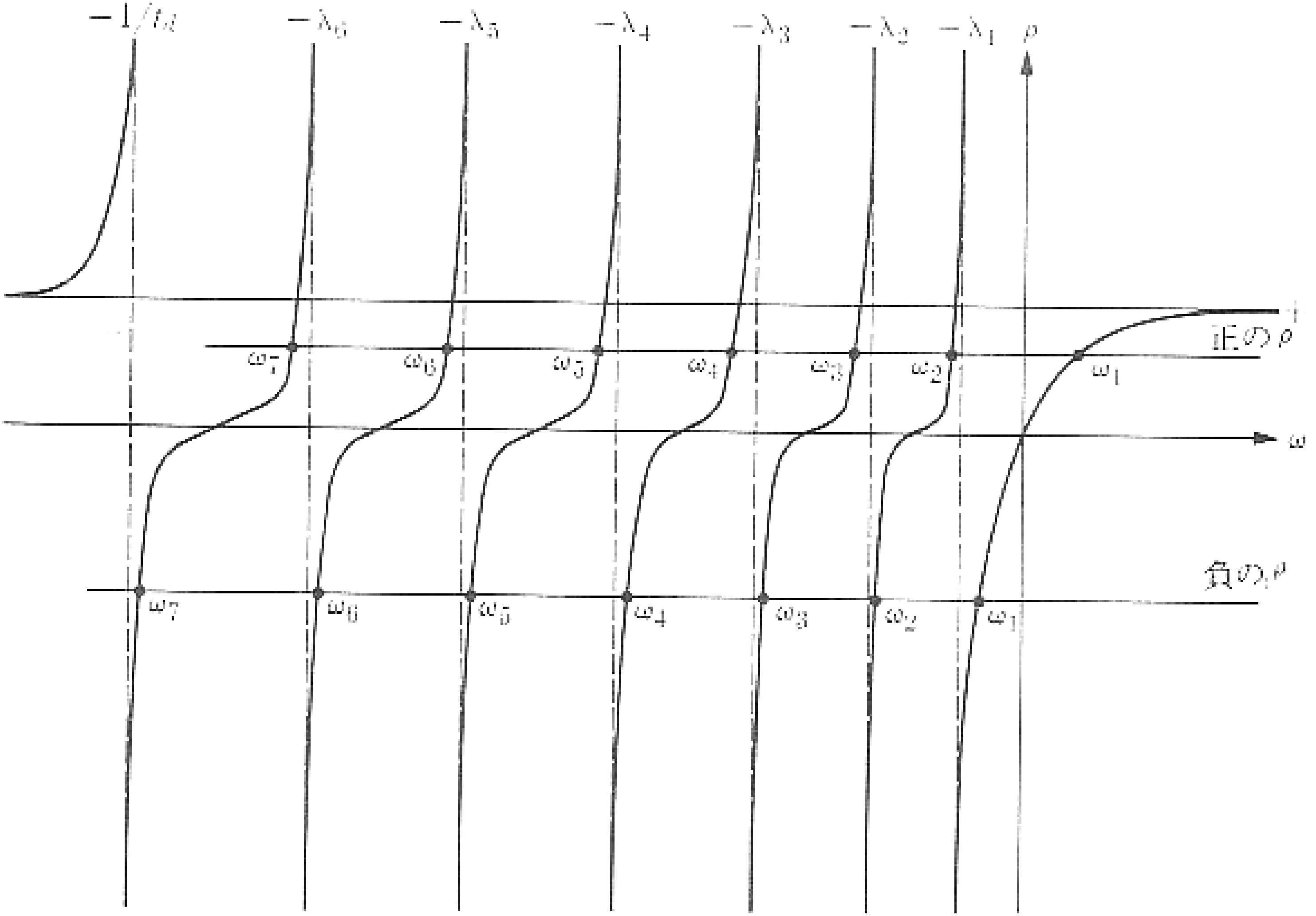
- 反応度方程式Λの代わりに、l を用いると、次式となる。

$$\rho_0 = \frac{\omega \ell}{(1+\omega \ell)} + \frac{1}{(1+\omega \ell)} \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i}$$

- これらの反応度方程式からωを求める方法を、模式的に図示したものが次の図である。この図において、縦軸の反応度が挿入反応度で決まる値（ρ_0）に相当する横線と図中の7つの曲線との交点から、ω_jが7つ求められる。
- 得られたωによって、反応度挿入時のそして中性子密度の時間変化について、次式を用いて定性的に考察することができる。

$$n(t) = \sum_{j=1}^{7} A_j \exp(\omega_j t)$$

反応度方程式の解


$-1/u$
$-\lambda_6$
$-\lambda_5$
$-\lambda_4$
$-\lambda_3$
$-\lambda_2$
$-\lambda_1$
ρ
+1
正の ρ
ω_7
ω_6
ω_5
ω_4
ω_3
ω_2
ω_1
ω
負の ρ
ω_7
ω_6
ω_5
ω_4
ω_3
ω_2
ω_1

ステップ状反応度の添加（正の反応度）

- 正の反応度がステップ状に投入された場合、中性子密度の時間変化を決める7つのω_jの内、１つだけが正で、他の６つは負となる。したがって、十分時間が経った時には、6つの負のωの項は消え、正のω_1によって決まる指数関数で変化することとなる。すなわち、

$$n(t) = A_1 \exp(\omega_1 t)$$

- の形で振舞うこととなる。さらに、$1/\omega_1 = T$と置くと

$$n(t) = A_1 \exp\left(\frac{t}{T}\right)$$

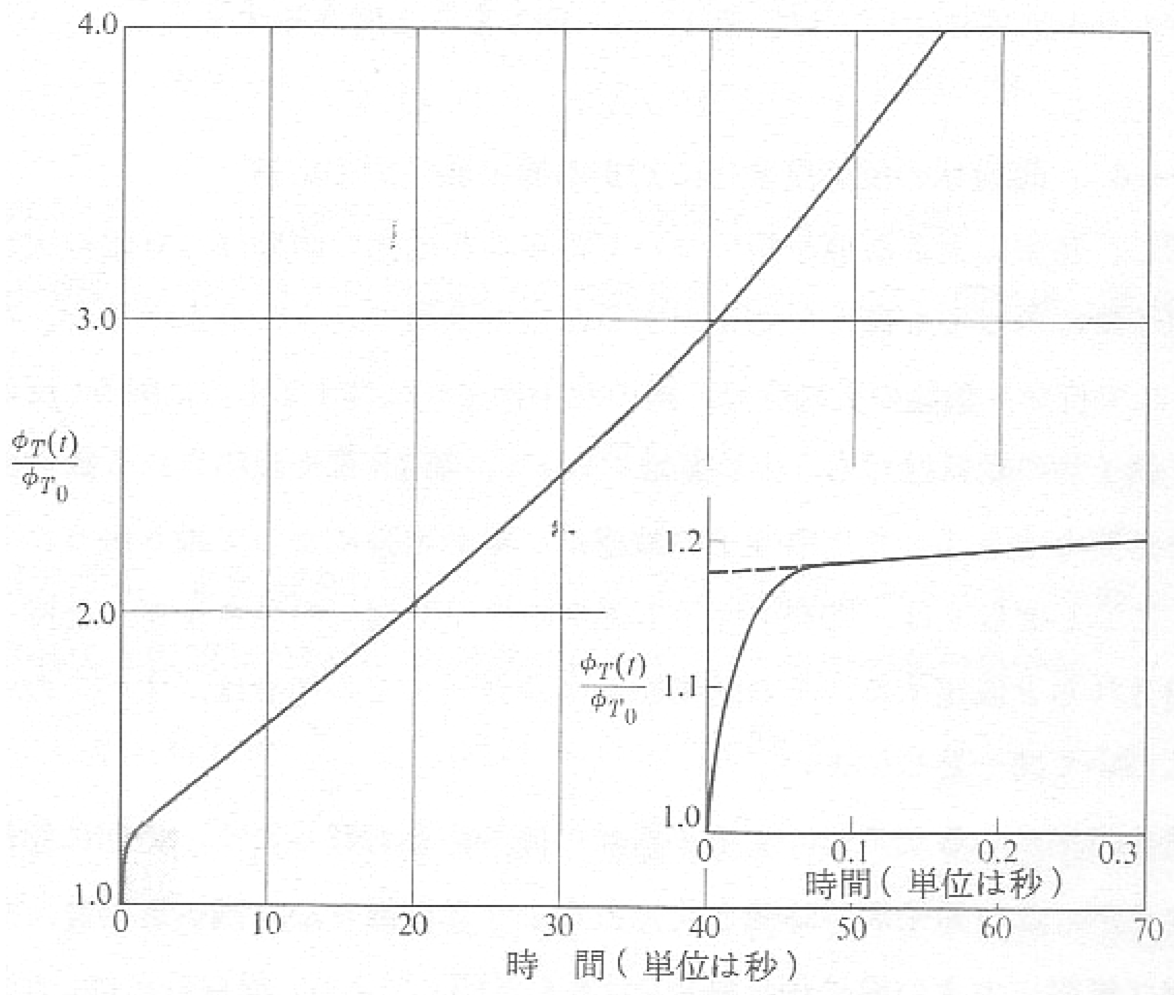
- と書ける。このTが、ペリオドである。

反応度投入直後の中性子束変化

$$\phi(t)=\phi_0[1.446e^{0.0182t}-0.0359e^{-0.0136t}-0.140e^{-0.0598t}-0.0637e^{-0.183t}-0.0205e^{-1.005t}-0.00767e^{-2.875t}-0.179e^{-55.6t}]$$

- ^{235}Uを燃料としH_2Oを減速材とした無限に大きい熱中性炉に、階段状に0.001の反応度を加えた時の熱中性子の時間変化を示す。

- 初期に中性子束が急激に増加するが、その後緩やかな増加に転じる、これは、この体系として、即発中性子に対しては臨界未満であるが、その後は、もっと緩やかに放出される遅発中性子によって、原子炉の振る舞いが決定されるからである。



ステップ状反応度の添加（負の反応度）

- 反応度が負の値（$\rho_0<0$）の場合には、全てのω_jが負となる。しかし、同じく$\omega_1>\omega_2>\ldots>\omega_7$（絶対値は、$|\omega_1|<|\omega_2|<\ldots<|\omega_7|$）なので、十分時間が経った時には、正の反応度挿入時と同様にやはり、中性子密度はω_1によって支配され、$exp(\omega_1 t)$ の形で時間変化をするようになる。
- しかし、$\rho 0$が大きな負の値のときには、正の反応度投入時にはない大きな特徴が現れる。それは、大きな負の反応度の場合、反応度をいくら（負で）大きくしても$\omega 1$はある一定値以上小さく（絶対値$|\omega 1|$では一定値以上大きく）ならない。その一定値、すなわち限界値は、すなわち遅発中性子第1組の崩壊定数$-\lambda_1$である。
- λ_1はおおよそ0.0125であるから、大きな負の反応度を挿入した場合、反応度の大きさによらず原子炉の中性子密度、すなわち原子炉出力の時間変化は次の形となる

$$exp(-\lambda_1 t)=exp(-0.0125\,t)=exp\left(-\frac{t}{80}\right)$$

- この$-\lambda_1$をこのペリオドに変換すると、$T=1/\omega_1=-1/\lambda_1=-1/0.0125=-80$秒となる。これは、**原子炉においては、いかなる大きな負の反応度を入れたとしても、ペリオド80秒より早くその出力を低下させることができない事を示している。**

ステップ状反応度の添加（微小な反応度$\rho_0 \ll \beta$）

- 挿入される反応度が、正、負を問わず、微小である場合、ω１の絶対値は｜ω_1｜≪λ_1＜λ_2＜　…　＜1/l　と考えて良いことから、反応度方程式においてλ_iに対してω_jを無視することができる。従って、長時間経過後の反応度方程式は、次式となる。

$$\rho_0 = \omega \Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \xrightarrow{\text{長時間経過後}} \omega_1 \Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega_1 \beta_i}{\omega_1 + \lambda_i} \approx \omega_1 \Lambda + \omega_1 \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} = \omega_1 \left(\Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)$$

- 上式において、ペリオドT=1/ω_1を求めると

$$T = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\rho_0} \left(\Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\ell_p}{k} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)$$

- ここで、反応度が微小であることからk～1と近似して、遅発中性子を含む全中性子の平均寿命　l　を用いると、

$$T \approx \frac{1}{\rho_0} \left(\ell_p + \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) = \frac{\ell}{\rho_0} \quad \longleftarrow \quad T = \frac{\ell}{\rho} = \frac{\ell}{(k-1)/k} \approx \frac{\ell}{(k-1)} = -\frac{\ell}{(1-k)}$$

- となる　。微小な反応度挿入時の原子炉の出力は、上式で与えられる挿入反応度に反比例するペリオドTによる指数関数で変化することになる。

即発臨界（$\rho_0=\beta$）

- 挿入される反応度がちょうどβ、すなわち遅発中性子割合と等しい時、原子炉は即発中性子のみで臨界となる。この状態（$\rho_0=\beta$）を**即発臨界（prompt critical）**という。挿入されれる反応度が、この即発臨界となる反応度量を越えるかどうかが、原子炉の動特性応答が、遅発中性子によって支配されるか、即発中性子のみによって定まるかの境目となる。
- $\rho_0<\beta$であれば原子炉の応答は遅発中性子によって支配され原子炉は制御可能であるが、$\rho_0\geqq\beta$となると原子炉の時間応答が10^{-4}秒程度の即発中性子寿命に依存して変化することなるため、実際的に機械的手段で制御することは不可能となる。この$\rho_0>\beta$の即発臨界の状態は、原子炉運転上避けなければならない状態である。
- 反応度の単位として、ドルという単位が原子炉物理で用いられる。この単位は、挿入される反応度がちょうどβ（遅発中性子割合）となる反応度を、1ドル（1＄）の反応度とする。さらに、1ドルの100分の1の反応度を、1セント（1￠）という。、ウラン燃料の熱中性子炉の場合、1ドルの反応度は235Uのβである0.0065程度である。

即発跳躍近似(prompt critical condition)(1/5)

- 以上の検討は反応度挿入後長時間経過したあとの舞いであった。ここでは、反応度投入直後における変化について検討する。
- ステップ状の反応度が挿入された後の原子炉出力の挙動は7つの指数関数の和となることが分かっている。いま、反応度投入直後に限定して考えると、遅発中性子先行核の濃度は一定のままであると考えられる。その先行核濃度を$C_{i,0}$と置くと、動特性方程式から、ρ_0を挿入反応度として、次式が得られる。

$$\frac{d\,n(t)}{d\,t}=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}n(t)+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_{i,0}$$

$$\frac{d\,C_i(t)}{d\,t}=\frac{\beta_i}{\Lambda}n(t)-\lambda_i C_{i,0}\quad（\ i=1\sim 6\ ）$$

即発跳躍近似(prompt critical condition)(2/5)

- 反応度投入前（t≦0）においては、中性子密度をn_0とし、dCi/dt＝0とできるから、中性子密度を$C_{i,0}$は、

$$C_{i,0} = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n_0$$

- であるから、これを中性子密度の式に代入すると

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n_0 = \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} n(t) + \frac{n_0}{\Lambda} \sum_{i=1}^{6} \beta_i = \frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} n(t) + \frac{\beta}{\Lambda} n_0$$

- 微分方程式の形から一般解を次式で仮定すると（A、Bは定数）

$$n(t) = A\, exp\left(\frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} t \right) + B$$

- この一般解を、元の式に代入することによって、以下の特解を得る。

$$n(t) = \left(\frac{\beta}{(\beta - \rho_0)} - \frac{\rho_0}{(\beta - \rho_0)} exp\left(\frac{(\rho_0 - \beta)}{\Lambda} t \right) \right) n_0$$

即発跳躍近似(prompt critical condition)(3/5)

$$n(t)=\left(\frac{\beta}{(\beta-\rho_0)}-\frac{\rho_0}{(\beta-\rho_0)}exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)\right)n_0$$

- 即発臨界とならない条件、すなわち$\rho_0<\beta$の場合を考えると、上式の第2項の指数部内の係数（$\rho_0-\beta$）/Λは、負で、またΛが小さいため非常に大きな値を取ることから、第2項は急速のゼロに近づくこととなる。この結果、n(t)は、反応度を加えた直後に、以下となる。

$$n(t)\approx\frac{\beta}{(\beta-\rho_0)}n_0$$

- 反応度挿入直後、このように原子炉出力には、急速な変化が起こる。この変化を、即発跳躍と呼ぶ。
- 仮に挿入される反応度ρ_0が0.001（kの1.000から1.001への変化にほぼ相当）であるとすると、ウラン燃料の熱中性子炉のβは0.0065であるから、0.001の反応度挿入に伴って、中性子密度、すなわち原子炉出力は反応度挿入直後0.0065/（0.0065-0.001）=1.182倍に変化する。18%近くの出力上昇は大きな変化量であり、通常の運転状態であれば中性子束高のスクラムにより原子炉が停止してしまうことになる。

即発跳躍近似(prompt critical condition)(4/5)

$$\frac{dn(t)}{dt}=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}n(t)+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\frac{\beta_i}{\lambda_i\Lambda}n_0=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}n(t)+\frac{n_0}{\Lambda}\sum_{i=1}^{6}\beta_i=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}n(t)+\frac{\beta}{\Lambda}n_0$$

$$\downarrow \qquad n(t)=A\exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)+B$$

$$右辺=\frac{dn(t)}{dt}=A\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}\exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)$$

$$左辺=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}n(t)+\frac{\beta}{\Lambda}n_0=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}\left(A\exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)+B\right)+\frac{\beta}{\Lambda}n_0$$

$$=A\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}\exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)+\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}B+\frac{\beta}{\Lambda}n_0$$

$$A\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}\exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)=A\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}\exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)+\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}B+\frac{\beta}{\Lambda}n_0$$

$$\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}B+\frac{\beta}{\Lambda}n_0=0$$

$$B=-\frac{\beta}{(\rho_0-\beta)}n_0$$

即発跳躍近似(prompt critical condition)(5/5)

$$n(t) = A\, exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right) + B$$

$$B = -\frac{\beta}{(\rho_0-\beta)}n_0$$

- これを解の式に代入して、t=0と置くと

$$n_0 = A - \frac{\beta}{(\rho_0-\beta)}n_0$$

$$\therefore A = n_0 + \frac{\beta}{(\rho_0-\beta)}n_0 = \frac{\rho_0}{(\rho_0-\beta)}n_0$$

- よって

$$n(t) = \frac{\rho_0}{(\rho_0-\beta)}n_0\, exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right) - \frac{\beta}{(\rho_0-\beta)}n_0 = \left(\frac{\beta}{(\beta-\rho_0)} - \frac{\rho_0}{(\beta-\rho_0)}exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)\right)n_0$$

$$n(t) = \left(\frac{\beta}{(\beta-\rho_0)} - \frac{\rho_0}{(\beta-\rho_0)}exp\left(\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}t\right)\right)n_0$$

遅発中性子
先行核と半減期

- 1核分裂当りの発生する全中性子数（ν）に対する遅発中性子数（ν_d）の割合を、全遅発中性子割合と呼び、β（$=\nu_d/\nu$）で表わす。
- 同じく1核分裂当りの発生する全中性子数に対するi組（i=1，6）の遅発中性子数（$\nu_{d,i}$）の割合をi組の遅発中性子割合とよび、β_i（$=\nu_{d,i}/\nu$）で表わす。
- a_iを、全遅発中性子割合βに対するi組の遅発中性子割合β_iの比$a_i=\beta_i/\beta$で定義する。

$$\beta=\sum_{i=1}^{6}\beta_i \qquad \sum_{i=1}^{6}a_i=\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\beta}=\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{6}\beta_i=1$$

組	先行核	半減期 (s)
1	^{87}Br	55.6
2	^{137}I ^{88}Br ^{134}Sb, ^{136}Te, ^{141}Cs	24.5 16.5
3	^{138}I ^{89}Br ^{84}As, ^{87}Se, ^{92}Rb, ^{93}Rb, ^{147}La	6.49 4.40
4	^{139}I ^{90}Br Ga, As, Se, Br, Kr, Rb, Y, In, Sb, Te, I, Xe, Cs	2.29 1.92
5	Ga, As, Se, Br, Kr, Sr, Y, In, Sn, Sb, I, Xe, Cs, Ba	(～0.5)
6	Ga, Se, Br, Kr, Rb, In, Cs	(～0.2)

遅発中性子1組近似(1/5)

- 通常遅発中性子を通常6組として扱われる。しかし、常に６組の遅発中性子を用いることは複雑であり、これは特に制御の問題を考えるときに見通しを悪くする。そこで６つの組を、仮想的な１組に近似する。
- 6組を1組にまとめる方法はいくつかあるが、最も代表的な方法として、次のような式でλ_iにβ_i （あるいはa_i ）の重みをつけて平均化する方法がある。

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{\lambda_i}$$

- ここで、λは平均崩壊定数であり、それに対応する遅発中性子割合は当然βである。熱中性子に対する^{235}Uの遅発中性子データを例にとって計算すると、平均の壊変定数λは0.0765となる。このλ, βを用いると、

遅発中性子1組近似(2/5)

- 原子炉動特性方程式は、

$$\frac{dn(t)}{dt}=\frac{(\rho_0-\beta)}{\Lambda}n(t)+\lambda C(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt}=\frac{\beta}{\Lambda}n(t)-\lambda C(t)$$

- となる。また反応度方程式は、

$$\rho_0=\omega\Lambda+\frac{\omega\beta}{\omega+\lambda}$$

- この式はωについて簡単に解くことができ、

$$\Lambda\omega^2+(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)\omega-\lambda\rho_0=0$$

$$\omega=-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}\pm\frac{1}{2\Lambda}\sqrt{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2+4\lambda\Lambda\rho_0}$$

遅発中性子1組近似(3/5)

- 以上の式において、Λが小さいことから、$(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2 \gg 4\lambda\Lambda\rho_0$および$(\beta-\rho_0)\gg\lambda\Lambda$と近似できるので、二つのωを$\omega_1$、$\omega_2$と書くと、

$$\omega_1=-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}-\frac{1}{2\Lambda}\sqrt{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2+4\lambda\Lambda\rho_0}\approx-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}$$

$$=-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{\Lambda}\approx-\frac{(\beta-\rho_0)}{\Lambda}$$

$$\omega_2=-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}+\frac{1}{2\Lambda}\sqrt{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2+4\lambda\Lambda\rho_0}=-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}\left(1-\left(1+\frac{1}{2}\frac{4\lambda\Lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}\approx\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}$$

- したがって中性子密度ならびに遅発中性子密度は、

$$n(t)=A_1\exp\left(-\frac{(\beta-\rho_0)}{\Lambda}t\right)+A_2\exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}t\right)$$

$$C(t)=B_1\exp\left(-\frac{(\beta-\rho_0)}{\Lambda}t\right)+B_2\exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}t\right)$$

遅発中性子1組近似(4/5)

- 以上より、遅発中性子を1組と近似することによって、ステップ状反応度挿入に対する原子炉出力の時間的な応答が解析的に表されることが分かる。これらの式は、原子炉の定性的な時間挙動を理解するのに有効である。
- なお、n（0）＝n_0、C（0）＝$\beta n_0/\lambda\Lambda$を用いることによって、得られた一般解中の定数を求めることができ、中性子密度は、

$$n(t) = -\frac{\rho_0}{(\beta-\rho_0)} exp\left(-\frac{(\beta-\rho_0)}{\Lambda} t\right) + \frac{\beta}{(\beta-\rho_0)} exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)} t\right)$$

- が得られる。$\beta > \rho_0$のとき第1項は急速にゼロとなるので、即発跳躍の項で求めた式と同じ次式が得られる。

$$n(t) \approx \frac{\beta}{(\beta-\rho_0)} n_0$$

遅発中性子1組近似(5/5)

- 遅発中性子1組近似次式に、よる計算結果、
- 次式に

$$n(t)=-\frac{\rho_0}{(\beta-\rho_0)}exp\left(-\frac{(\beta-\rho_0)}{\Lambda}t\right)+\frac{\beta}{(\beta-\rho_0)}exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}t\right)$$

- 以下の数値を代入して計算した結果が右図。

$\lambda=0.08s^{-1}$、

$\rho_0=0.0022$、

$\Lambda=10^{-3}s$、

$\beta=0.0065$