臨界方程式と原子炉方程式

拡散と減速がある体系

- 一群拡散方程式

$$\frac{1}{v_T}\frac{\partial \phi_T(x,t)}{\partial t} = \nabla^2 \phi_T(x,t) - \Sigma_a \phi_T(x,t) + pq(x,\tau_T,t)$$

- フェルミの年齢方程式

$$\frac{\partial q(x,\tau,t)}{\partial t} = \nabla^2 q(x,\tau,t)$$

- 一般解

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1,3,5} A_n(t)\cos B_n x$$

$$q(x,\tau,t) = \sum_{n=1,3,5} C_n(\tau,t)\cos B_n x$$

- 固有値

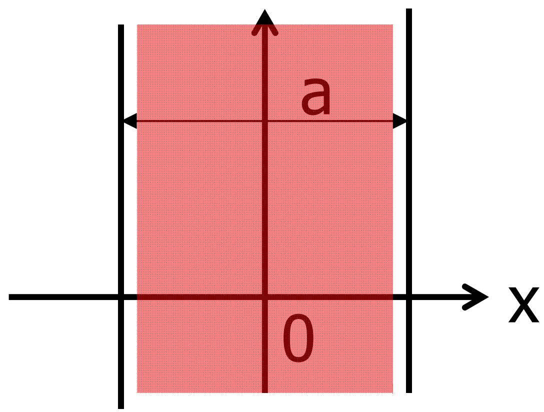
$$B_n = \frac{n\pi}{a} \qquad (n = 1,3,5,\quad)$$

仮定

・反射体なし

・平板状原子炉

・単一エネルギー



年齢方程式の解(1/2)

- 一般解を年齢方程式に代入

$$\sum_{n=1,3,5} \frac{\partial C_n(\tau,t)}{\partial t} \cos B_n x = -B_n^2 \sum_{n=1,3,5} C_n(\tau,t) \cos B_n x$$

$$\frac{\partial C_n(\tau,t)}{\partial t} = -B_n^2 C_n(\tau,t)$$

$$\therefore\ C_n(\tau,t) = T_n(\tau) \cdot exp(-B_n^2 t)$$

- 従って、一般解は、

$$q(x,\tau,t) = \sum_{n=1,3,5} T_n(\tau) \cdot exp(-B_n^2 t) \cdot \cos B_n x$$

年齢方程式の解(2/2)

- 年齢 $\tau = 0$ においてレサジー0とすると

$$q(x,0,t) = s \cdot \delta(x) + \eta_T f\varepsilon\Sigma_a\phi_T(x,t)$$

$$= s \cdot \delta(x) + \frac{k_\infty}{p}\Sigma_a\phi_T(x,t)$$

$$\delta(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1,3,5}\cos B_n x$$

$$T(t) = \frac{2s}{a} + \frac{k_\infty}{p}A_n(t)$$

- 故に、年齢方程式の解である減速密度は、

$$\boxed{q(x,\tau,t) = \frac{2s}{a}\sum_{n=1,3,5}exp(-B_n^2 t)\cdot \cos B_n x + \frac{k_\infty\Sigma_a}{p}\sum_{n=1,3,5}A_n(t)exp(-B_n^2 t)\cdot \cos B_n x}$$

拡散方程式の解

- 年齢方程式の解を拡散方程式へ代入すると

$$t_n \frac{dA_n(t)}{dt} = (k_\infty - 1)A_n(t) + \frac{2psk_n}{a\Sigma_a k_\infty}$$

- ここで、

$$k_n = \frac{k_\infty \cdot \exp(-B_n^2 \tau)}{1 + B_n^2 \frac{D}{\Sigma_a}} \qquad t_n = \frac{\frac{1}{\Sigma_a v_T}}{1 + B_n^2 \frac{D}{\Sigma_a}}$$

- 境界条件を、 $\phi(x,0) = 0$ とすると、解は

$$A_n(t) = \frac{2psk_n}{a\Sigma_a k_\infty (k_n - 1)} \left[\exp(k_n - 1)\frac{t}{t_n} - 1 \right]$$

- であるから、拡散方程式の解、中性束分布は、

$$\boxed{\phi_T(x,t) = \frac{2ps}{a\Sigma_a k_\infty} \sum_{n=1,3,5} \frac{k_n}{k_n - 1} \left[\exp(k_n - 1)\frac{t}{t_n} - 1 \right] \cos B_n x}$$

中性子束の挙動(中性子源がある場合)

- $k_1 > 1, k_3, k_5, \quad < 1$ の場合(臨界超過)

  n=1 の項は指数関数的に増加

  n=3,5,･･･ の項は0となる。

- $k_1, k_3, k_5, \quad < 1$ の場合(臨界未満)

$$\phi_T(x) = \frac{2ps}{a\Sigma_a k_\infty} \sum_{n=1,3,5} \frac{k_n}{1-k_n} \cos B_n x \qquad \text{(定常値)}$$

- $k_1 = 1, k_3, k_5, \quad < 1$ の場合(臨界)

$$\phi_T(x,t) = \frac{2ps}{a\Sigma_a k_\infty} \frac{t}{t_1} \cos B_1 x + \frac{2ps}{a\Sigma_a k_\infty} \sum_{n=3,5} \frac{k_n}{k_n - 1} \cos B_n x$$

参考

$$\frac{\exp\left[\frac{(k_1-1)t}{t_1}\right]-1}{k_1-1} \to \frac{\left[1+\frac{(k_1-1)t}{t_1}+\left\{\frac{(k_1-1)t}{t_1}\right\}^2+\quad\right]-1}{k_1-1}$$

$$=\frac{t}{t_1}+(k_1-1)\left(\frac{t}{t_1}\right)^2+$$

$$\xrightarrow{k_1=1}\frac{t}{t_1}$$

中性子束の挙動(中性子源がない場合)

- 中性子源がないので、 $s=0$ であるから

$$t_n \frac{dA_n(t)}{dt} = (k_\infty - 1)A_n(t) + \frac{2psk_n}{a\Sigma_a k_\infty}$$

$$t_n \frac{dA_n(t)}{dt} = (k_\infty - 1)A_n(t)$$

$$A_n(t) = A_{n0}\left[\exp(k_n - 1)\frac{t-t_0}{t_n}\right]$$

$$\boxed{\phi_T(x,t) = \sum_{n=1,3,5} A_{n0}\left[\exp(k_n - 1)\frac{t-t_0}{t_n}\right]\cos B_n x}$$

中性子束の挙動(中性子源がない場合)

- $k_1 > 1, k_3, k_5, \quad < 1$ の場合(臨界超過)

n=1 の項は指数関数的に増加

n=3,5,･･･ の項は0となる。

- $k_1, k_3, k_5, \quad < 1$ の場合(臨界未満)

全ての項は0となる

- $k_1 = 1, k_3, k_5, \quad < 1$ の場合(臨界)

n=1の項のみ残り、他は0となる。

$$\phi_T(x) = A\cos B_1 x$$

バックリング: $B_1^{\ 2}$

- 原子炉方程式:

$$\boxed{\frac{d^2\phi_T(x)}{dx^2} + B_1^2\phi_T(x) = 0}$$

臨界方程式

- 裸の原子炉の臨界条件は、$B_1 = B$ とすると

$$k_1 = \frac{k_\infty \cdot \exp(-B^2\tau_T)}{1 + B^2 \dfrac{D}{\Sigma_a}} = 1$$

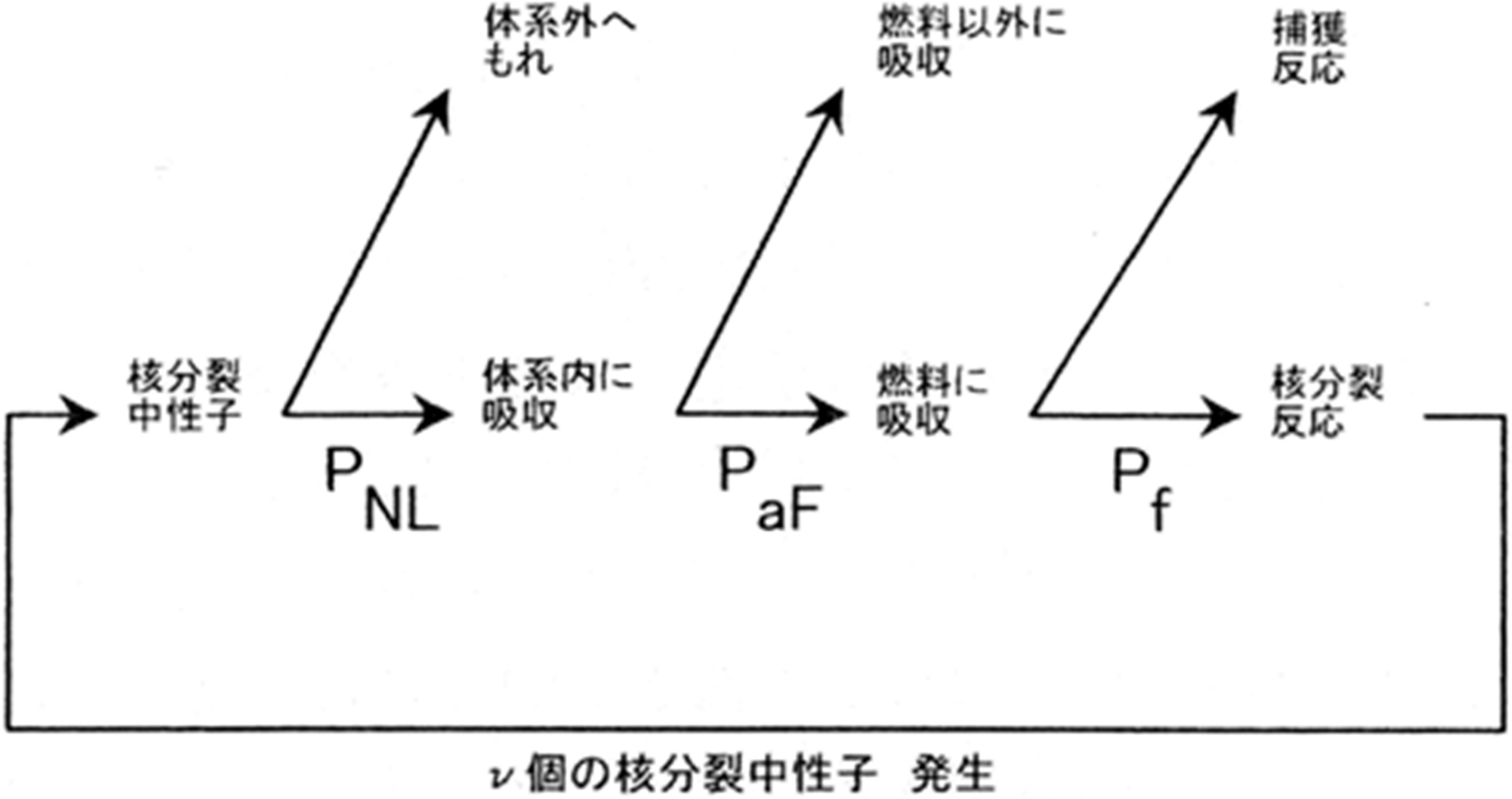
- いま熱中性子の拡散距離を $L_T = \sqrt{\dfrac{D}{\Sigma_a}}$ とすると

$$\boxed{\frac{k_\infty \cdot \exp(-B^2\tau_T)}{1 + B^2 L_T^2} = 1}$$ 臨界方程式

- ここで $B^2 = \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$:バックリング

$k_\infty = \eta f p \varepsilon$:無限増倍係数

核分裂連鎖反応のサイクル



4因子公式と6因子公式

- 無限増倍率k_∞は以下となる。（4因子公式）

$$k_\infty = \varepsilon \ p \ \eta \ f$$

ε: 高速中性子核分裂係数

p: 共鳴を逃れる確率

η: 再生率

f: 熱中性子利用率

- 実効増倍率は、中性子が漏れない確率P_{NL}を、高速中性子の漏れない確率：P_{FNL}、熱中性子が漏れない確率：P_{TNL}とすると以下となる。（6因子公式）

$$k = k_\infty \ P_{NL} = \varepsilon \ p \ \eta \ f \ P_{FNL} \ P_{TNL}$$

有限体系における実効増倍係数

- 有限体系における臨界条件

$$k_{eff} = k_\infty P_F P_T = 1$$

- 減速の途中で体系から漏れない確率

$$P_F = \exp(-B^2 \tau_T)$$

- 熱中性子になってから吸収されるまでに体系から漏れない確率

$$P_T = \frac{1}{1 + B^2 L_T^2}$$

拡散距離(3/4)

エネルギー$\boldsymbol{E_0}$をもって発生した中性子が、熱エネルギー$\boldsymbol{E_{th}}$まで減速するまでの年齢：$\boldsymbol{\tau_{th}}$

とすると、その際の移動距離：$\sqrt{\tau_{th}}$ （減速距離）

+

熱中性子になってから吸収されるまでの移動距離：$\boldsymbol{L}$

⇩

高速中性子として発生し、減速して熱中性子となり、やがて吸収されるまでの

$$\begin{cases} \text{移動距離：} \sqrt{\tau_{th} + L^2} \\ \text{移動面積：} M^2 = \tau_{th} + L^2 \end{cases}$$

拡散距離(4/4)

減速材	密度(g/cm^3)	$\bar{D}$ (cm)	L (cm)	τ_{th} (cm^2)
H_2O	1.00	0.16	2.85	27
D_2O	1.10	0.87	170	131
Be	1.85	0.50	21	102
BeO	2.96	0.47	28	100
グラファイト	1.60	0.84	59	368

20℃におけるMaxwell分布を仮定

大きい原子炉の臨界方程式

- いま、以下の近似が成り立つとすると

$$\exp(B^2\tau_T) \approx 1 + B^2\tau_T \quad \text{より}$$

$$1 = \frac{k_\infty \cdot exp(-B^2\tau_T)}{1+B^2L_T^2} = \frac{k_\infty}{\left(1+B^2L_T^2\right)\left(1+B^2\tau_T\right)}$$

$$= \frac{k_\infty}{1+B^2(L_T^2+\tau_T)}$$

- ここで、中性子の移動距離を、$M_T^2 = \tau_T + L_T^2$ とすると

$$\frac{k_\infty}{1+B^2M_T^2} = 1$$

原子炉内中性子束分布(1/2)

中性子分布

$$\phi_T = A\cos\frac{\pi x}{a}$$

Aは熱出力により決まる

単位面積当たりの原子炉の出力: ***W***

$$W = r_t \cdot \Sigma_t \int_{-a/2}^{a/2} \phi_T(x)dx$$

r_t **:** 1核分裂当たりの発生エネルギー

$\boldsymbol{\Sigma_t}$**:** 吸収断面積

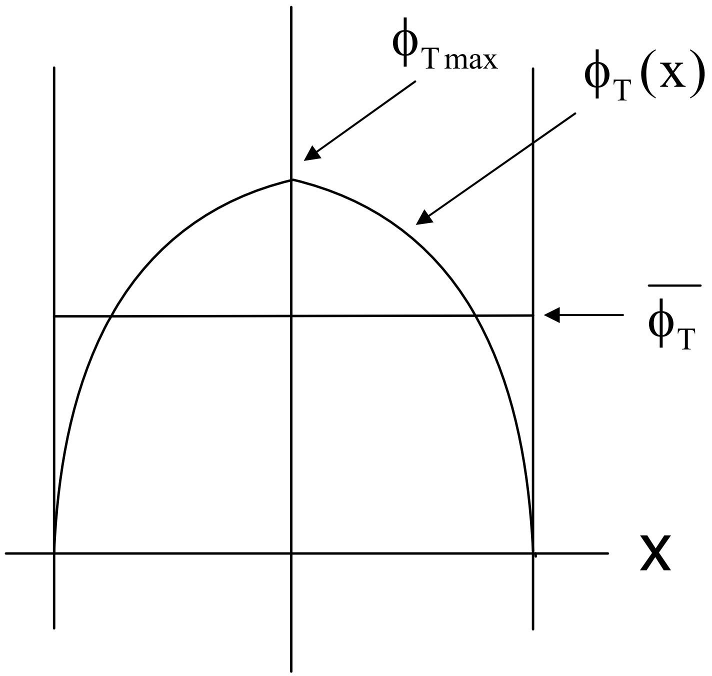
↓

$$A = \frac{\pi W}{2ar_t\Sigma_t}$$

原子炉内中性子束分布(2/2)

よって

$$\boxed{\phi_T = \frac{\pi W}{2ar_t\Sigma_t}\cos\frac{\pi x}{a}}$$



$$\phi_{T\,max} = \frac{\pi W}{2ar_t\Sigma_t}$$

$$\overline{\phi_T} = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\phi_T dx = \frac{W}{ar_t\Sigma_t}$$

$$\frac{\phi_{T\,max}}{\overline{\phi_T}} = \frac{\pi}{2}$$

演習問題7－1

- 幅50cmの均質の平板状原子炉において、熱中性子年令を27cm^2、拡散距離を3cmとして、中性子が減速の途中で体系から漏れてでない確率P_Fと熱中性子になってから吸収されるまでに体系から漏れでない確率P_Tを求めよ。

演習問題7－2

- フェルミの年令方程式から、減速密度の一般解を求めよ。

演習問題7－1 回答の方針

与えられた各種物理量は、幅a=50cm、熱中性子年令 τ =27cm^2、拡散距離L_T=3cm、であるので、バックリングB^{2}は、

$$B^2=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2=$$

よって、中性子が減速の途中で体系から漏れてでない確率P_Fは、

$$P_F=exp(-B^2\tau_T)=$$

また、熱中性子になってから吸収されるまでに体系から漏れてでない確率P_Tは、

$$P_T=\frac{1}{1+B^2L_T^2}=$$

仮定

・反射体なし

・平板状原子炉

・単一エネルギー

演習問題7－2 回答の方針

- フェルミの年齢方程式

$$\frac{\partial q(x,\tau,t)}{\partial t} = \nabla^2 q(x,\tau,t)$$

- 一般解を以下と仮定する、

$$q(x,\tau,t) = \sum_{n=1,3,5} C_n(\tau,t)\cos B_n x$$

ただし、固有値は、

$$B_n = \frac{n\pi}{a} \qquad (n = 1,3,5, \quad)$$

- この一般解を年齢方程式に代入すると、