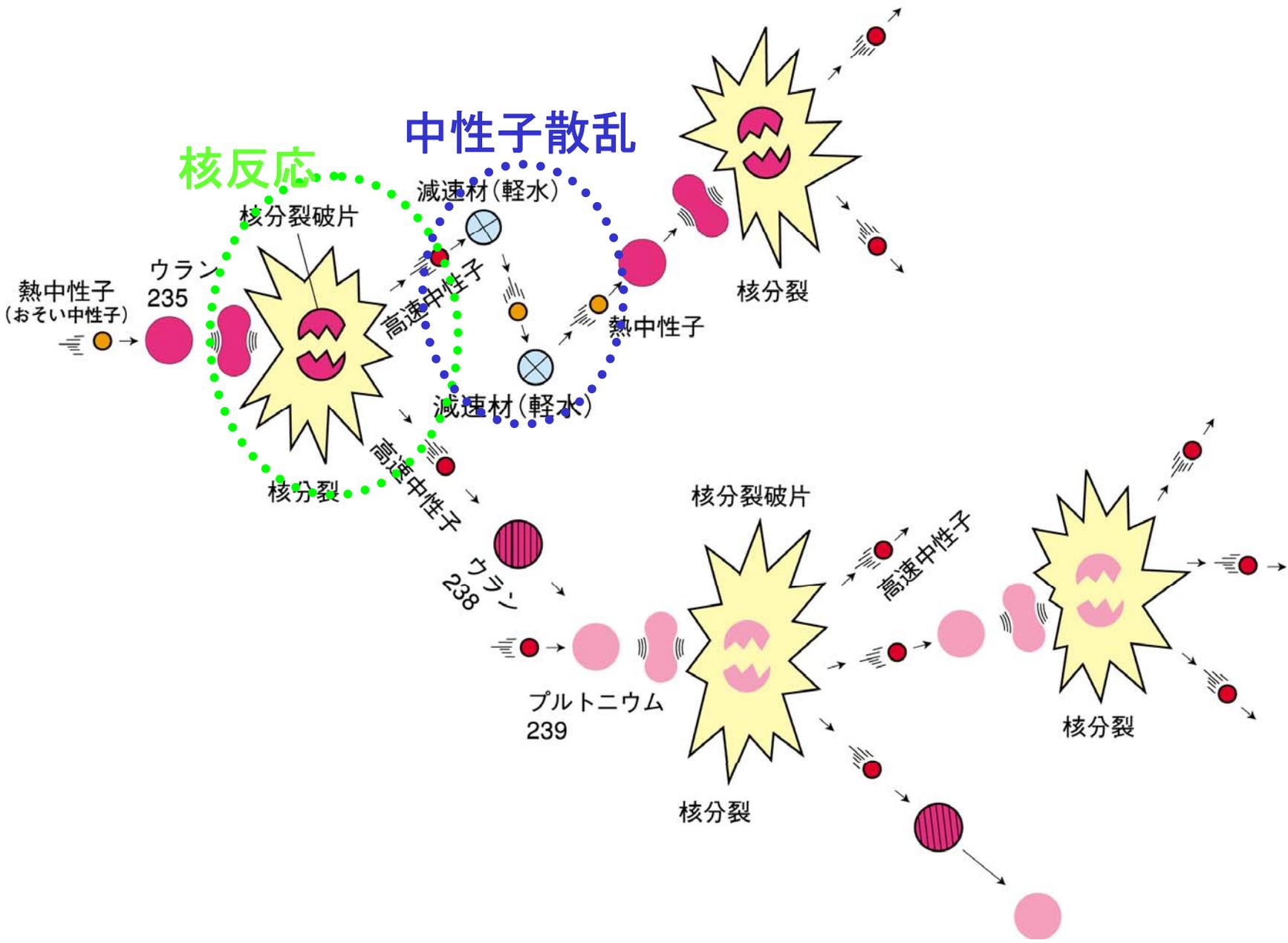




# 中性子の減速

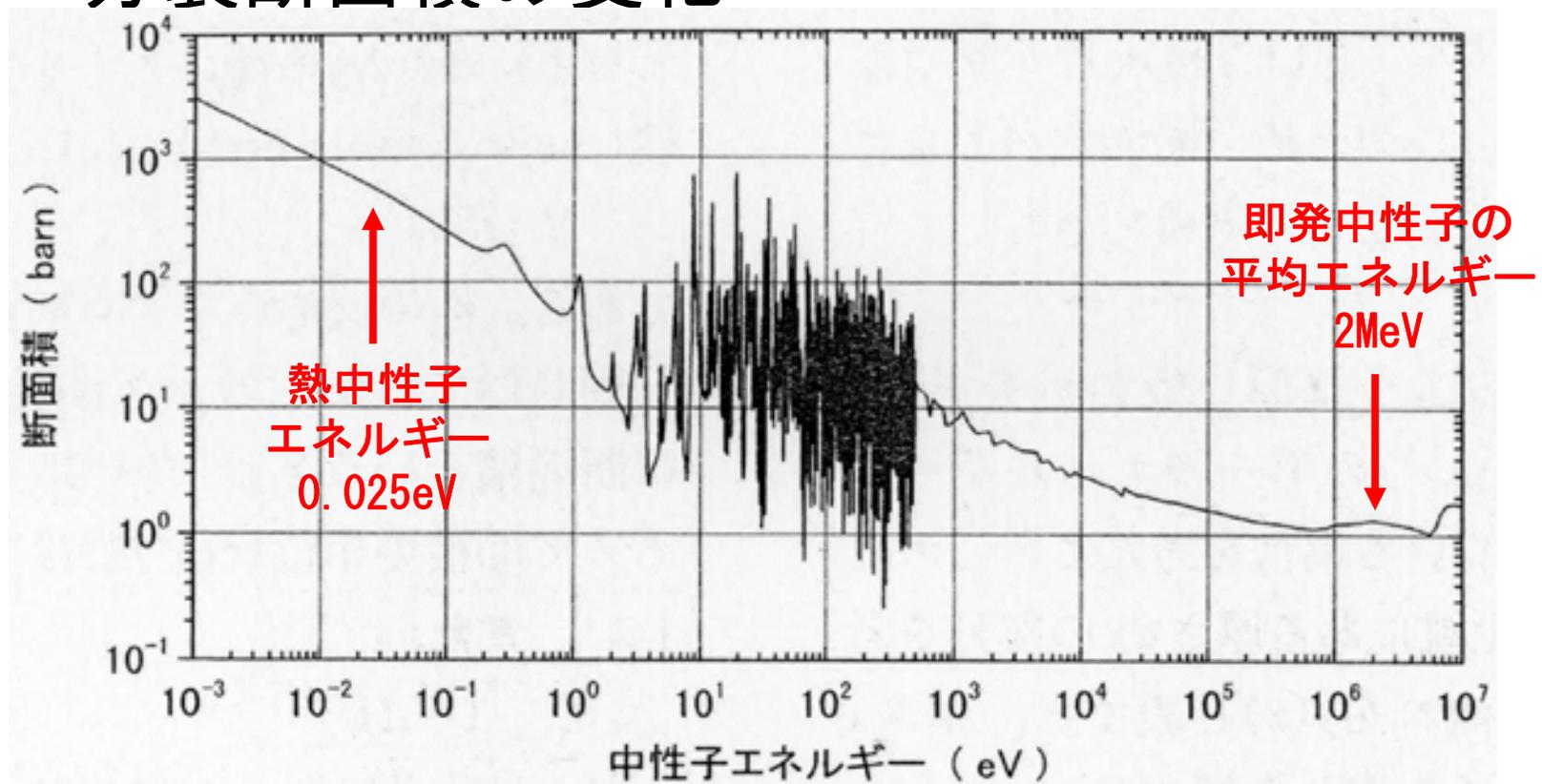
---

# ウランの核分裂とプルトニウムの生成・核分裂



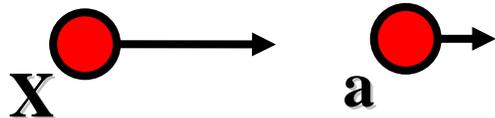
# 断面積のエネルギー変化 — 質量の大きな核 —

- 入射中性子エネルギーに対する $^{235}\text{U}$ の核分裂断面積の変化

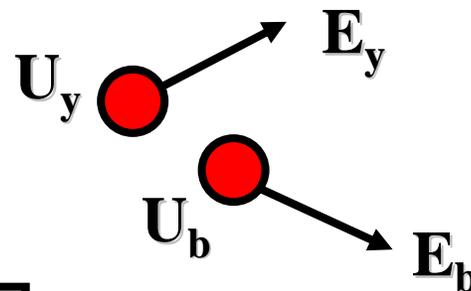


# 核反応後の粒子エネルギー

(反応前)



(反応後)



エネルギー保存式 ;

$$Q = E_Y + E_b$$

運動量保存式 ;

$$P_Y = P_b$$

ここで、

$$\begin{array}{l} P_Y = M_Y U_Y \\ P_b = M_b U_b \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} U_b = \frac{P_b}{M_b} \\ U_Y = \frac{P_Y}{M_Y} \end{array}$$

# 核反応後の粒子エネルギー

$$E_Y = \frac{1}{2} M_Y U_Y^2 = \frac{1}{2} M_Y \left( \frac{P_Y}{M_Y} \right)^2 = \frac{P_Y^2}{2M_Y} = \frac{P_b^2}{2M_Y}$$

$$E_b = \frac{1}{2} M_b U_b^2 = \frac{1}{2} M_b \left( \frac{P_b}{M_b} \right)^2 = \frac{P_b^2}{2M_b}$$

これより、

$$E_Y \cdot \cancel{2M_Y} = P_b^2 = E_b \cdot \cancel{2M_b} \longrightarrow \boxed{E_Y = \frac{M_b}{M_Y} \cdot E_b}$$

であるから、

$$Q = E_Y + E_b = \frac{M_b}{M_Y} E_b + E_b = \left( \frac{M_b}{M_Y} + 1 \right) E_b = \frac{M_b + M_Y}{M_Y} \cdot E_b$$

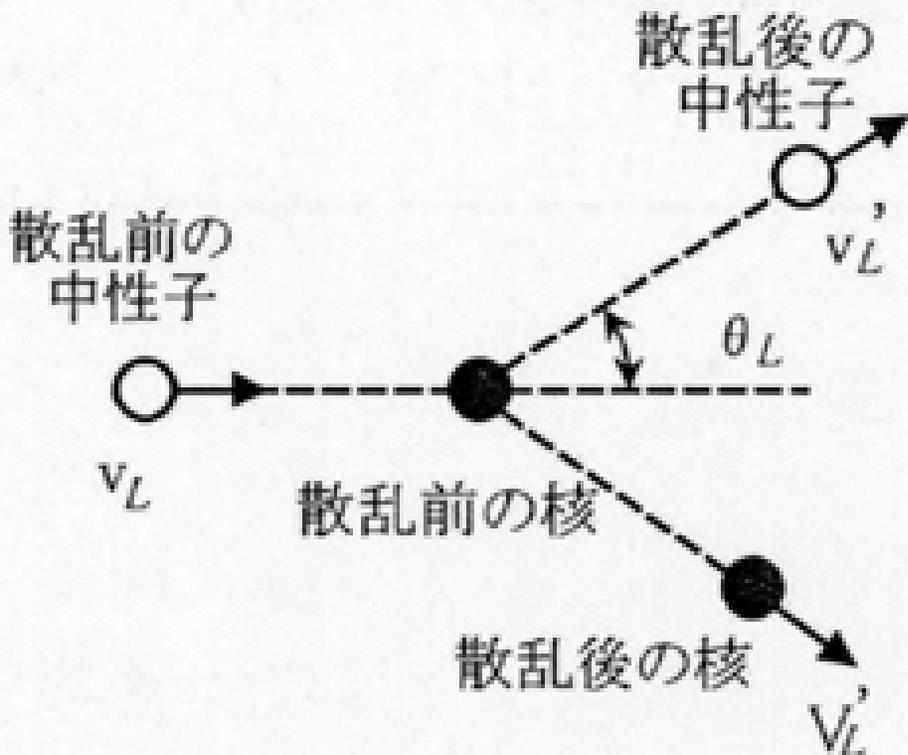
∴

$$E_b = \frac{M_Y}{M_b + M_Y} \cdot Q$$

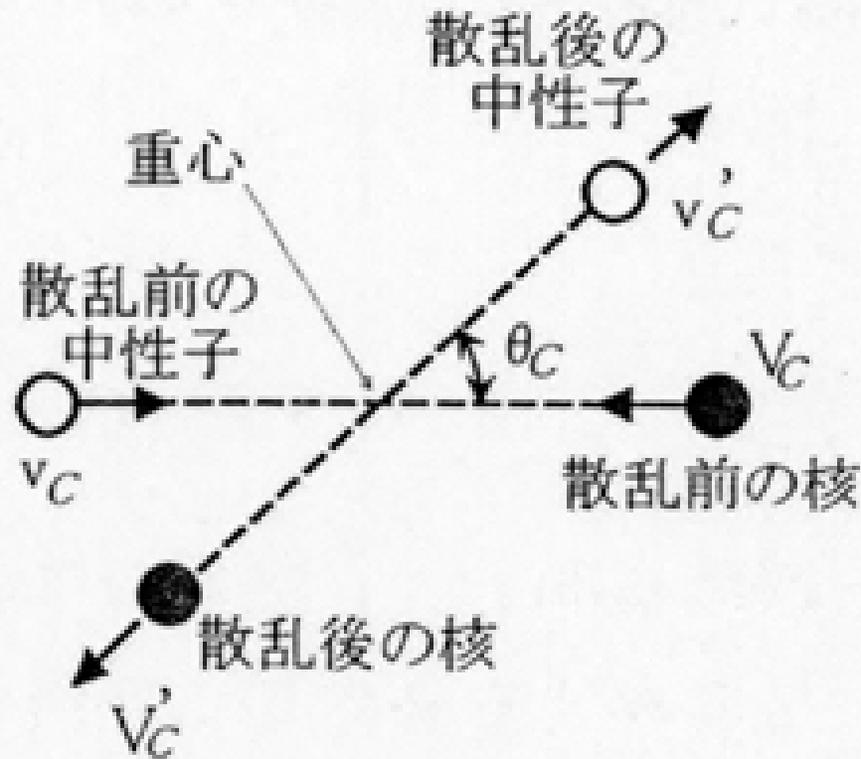
$$E_Y = \frac{M_b}{M_Y} \cdot E_b = \frac{M_b}{M_Y} \times \frac{\cancel{M_Y}}{M_b + M_Y} \cdot Q = \frac{M_b}{M_b + M_Y} \cdot Q$$

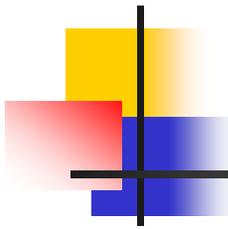
# 弾性散乱による中性子の減速

実験室(L)系



重心(C)系





## 重心系での速さ

- 重心の速さは、実験室系で考えると、

$$(m + M)v_{CM} = mv_L + MV_L = mv_L \quad A \left( A \approx \frac{M}{m} \right)$$

$$v_{CM} = \frac{m}{m + M} v_L \left( = \frac{1}{1 + A} v_L \right)$$

- 重心系での中性子の速さは

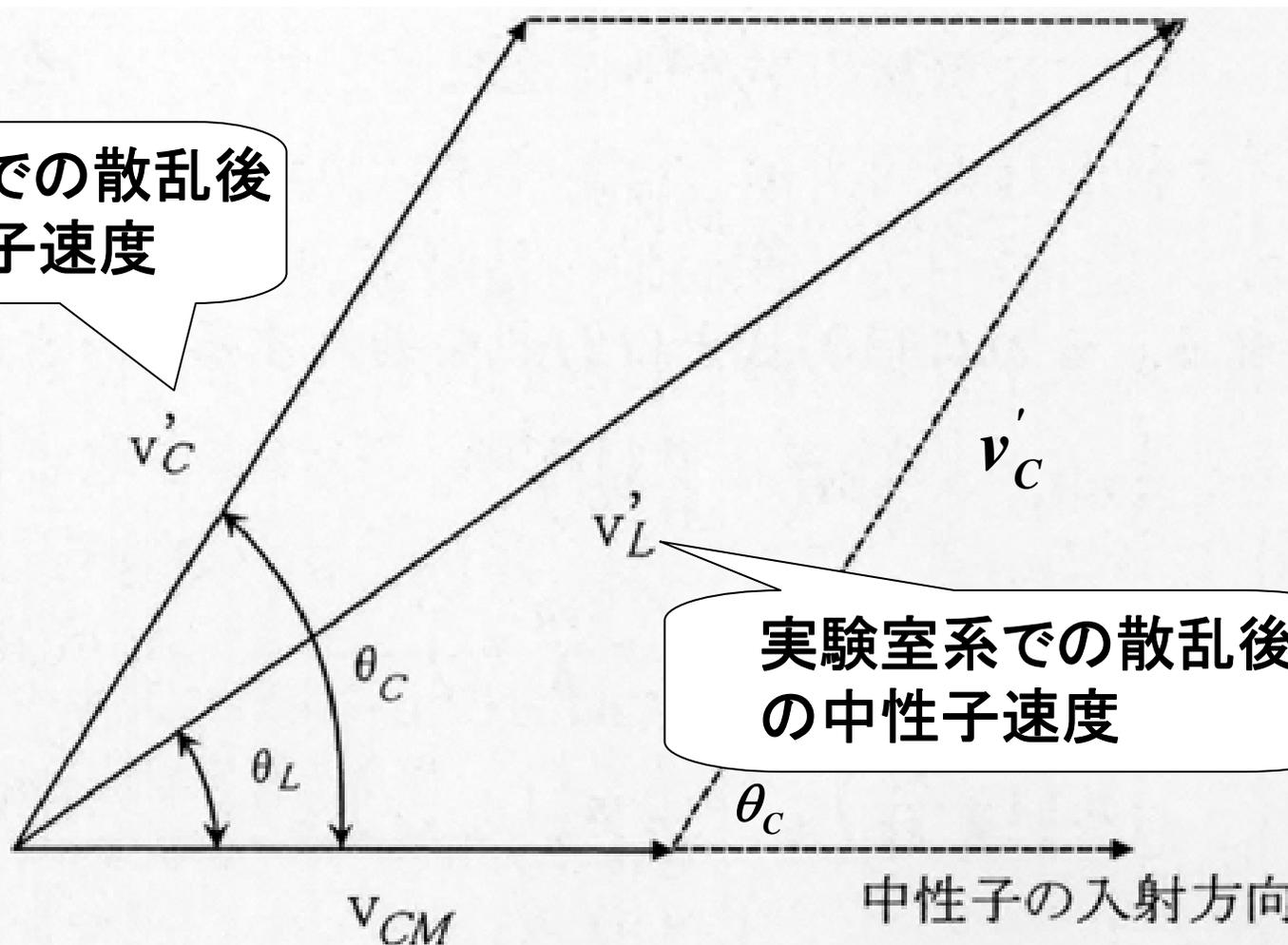
$$v'_C = v_L - v_{CM} = v_L - \frac{m}{m + M} v_L = \frac{M}{m + M} v_L \left( = \frac{A}{1 + A} v_L \right)$$

- 重心系での原子核の速さは

$$V'_C = 0 - v_{CM} = -\frac{m}{m + M} v_L \left( = -\frac{1}{1 + A} v_L \right)$$

# 重心系から実験室系への変換

重心系での散乱後の  
中性子速度



実験室系での散乱後の  
中性子速度

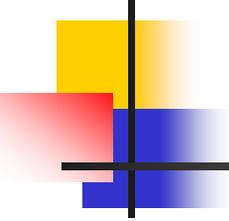
# 散乱前後のエネルギー変化

- 余弦定理より

$$\begin{aligned}v_L'^2 &= v_C'^2 + v_{CM}^2 + 2v_C' v_{CM} \cos\theta_C \\ &= \left(\frac{A}{A+1}v_L\right)^2 + \left(\frac{1}{A+1}v_L\right)^2 + 2\left(\frac{A}{A+1}v_L\right)\left(\frac{1}{A+1}v_L\right)\cos\theta_C \\ &= \frac{(A^2 + 2A\cos\theta_C + 1)}{(A+1)^2}v_L^2\end{aligned}$$

- 散乱前後のエネルギー変化:

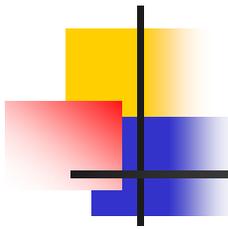
$$\frac{E_L'}{E_L} = \frac{v_L'^2}{v_L^2} = \frac{(A^2 + 2A\cos\theta_C + 1)}{(A+1)^2}$$



## 参考

---

$$\begin{aligned} & A^2 + 2A \cos \theta_C + 1 \\ &= \frac{1}{2} \left( A^2 + 2A \cos \theta_C + 1 + A^2 + 2A \cos \theta_C + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (A^2 + 2A + 1) + (A^2 - 2A + 1) + 2A \cos \theta_C + 2A \cos \theta_C \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( ((A^2 + 2A + 1) + (A^2 - 2A + 1)) + ((A^2 + 2A + 1) - (A^2 - 2A + 1)) \cos \theta_C \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( ((A + 1)^2 + (A - 1)^2) + ((A + 1)^2 - (A - 1)^2) \cos \theta_C \right) \\ &= \frac{1}{2} (A + 1)^2 \left( \left( 1 + \frac{(A - 1)^2}{(A + 1)^2} \right) + \left( 1 - \frac{(A - 1)^2}{(A + 1)^2} \right) \cos \theta_C \right) \end{aligned}$$



## 散乱前後のエネルギー変化

- いま  $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$  とすると、
- 散乱前後のエネルギー変化は、

$$\frac{E_L'}{E_L} = \frac{1}{2}((1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta_C)$$

$$\theta_C = 0 \quad \frac{E_L'}{E_L} = 1 \quad : \text{最大}$$

$$\theta_C = \pi \quad \frac{E_L'}{E_L} = \alpha \quad : \text{最小}$$

- 失うエネルギーの最大値:

$$\Delta E = E - \alpha E = (1-\alpha)E$$

# 散乱確率分布

- 重心系での等方散乱における散乱確率分布

$$p(E \rightarrow E') = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E} & \alpha E < E' < E \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 弾性散乱後の中性子の平均エネルギー:

$$\overline{E'} = \int_{\alpha E}^E E' p(E \rightarrow E') dE' = \frac{1}{(1-\alpha)E} \left[ \frac{1}{2} E'^2 \right]_{\alpha E}^E$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)E} \frac{1}{2} (E^2 - \alpha^2 E^2) = \frac{(1+\alpha)}{2} E$$

- 衝突毎に失う平均のエネルギー:

$$\overline{\Delta E} = E - \overline{E'} = E - \frac{(1+\alpha)}{2} E = \frac{(1-\alpha)}{2} E$$

## レサジー(不活発)

- エネルギー減少率の対数平均:

$$\xi \equiv \overline{\ln\left(\frac{E_i}{E_f}\right)} = \int_{\alpha E}^E \ln\left(\frac{E}{E'}\right) \cdot P(E \rightarrow E') dE'$$

1回の衝突で失うエネルギー減少の対数値

- ここで、 $x = E'/E$  とおくと、  
$$\xi = -\frac{1}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^1 \ln(x) dx$$

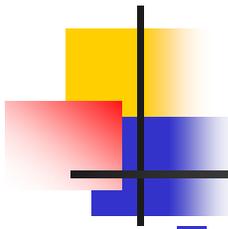
$$= -\frac{1}{(1-\alpha)} (x \ln(x) - x) \Big|_{\alpha}^1 = -\frac{1}{(1-\alpha)} ((-1) - (\alpha \ln(\alpha) - \alpha))$$

$$= \frac{(1-\alpha) + \alpha \ln(\alpha)}{(1-\alpha)} = 1 + \frac{\alpha \ln(\alpha)}{(1-\alpha)}$$

$$= 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right)$$

# 参考

$$\begin{aligned}
 \xi &= 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1} = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \left( 1 - \frac{2}{A+1} \right) \\
 &\approx 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \left\{ -\frac{2}{A+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(A+1)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{(A+1)^3} \right\} = 1 - \frac{(A-1)^2}{A(A+1)} - \frac{(A-1)^2}{A(A+1)^2} - \frac{4(A-1)^2}{3A(A+1)^3} \\
 &= \frac{3A-1}{A(A+1)} - \left( \frac{A-1}{A+1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{A} + \frac{4}{3A(A+1)} \right\} = \frac{3A-1}{A(A+1)} - \left( 1 - \frac{2}{A+1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{A} + \frac{4}{3A(A+1)} \right\} \\
 &\approx \frac{3A-1}{A(A+1)} - \left( 1 - \frac{4}{A+1} \right) \left\{ \frac{1}{A} + \frac{4}{3A(A+1)} \right\} \approx \frac{3A-1}{A(A+1)} - \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \cdot \frac{4}{A+1} - \frac{4}{3A(A+1)} \\
 &= \frac{3A-1-A-1+4}{A(A+1)} - \frac{4}{3A(A+1)} = \frac{2}{A} - \frac{4}{3A(A+1)} = \frac{6A+6-4}{3A(A+1)} = \frac{2(3A+1)}{3A(A+1)} \\
 &= \frac{2}{A \cdot \frac{3A+3}{3A+1}} = \frac{2}{A \left( 1 + \frac{2}{3A+1} \right)} = \frac{2}{A + \frac{2A}{3A+1}} = \frac{2}{A + \frac{2}{3 + \frac{1}{A}}} \approx \frac{2}{A + \frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$



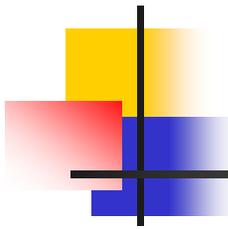
## レサジーの評価例(1/2)

- 2.0MeVに対応するレサジーから、1eVまでに対応するレサジーまで増加するのに必要な衝突回数はいくつ？
- 2MeVの中性子が1eVに減速する場合に必要なレサジー増加は：

$$u = \ln\left(\frac{2 \times 10^6}{1}\right) = 14.5$$

従って、**何回の衝突で減速できるか**

$$\text{散乱回数} = \frac{u}{\xi} = \frac{\ln\left(\frac{2 \times 10^6}{1}\right)}{\xi} = \frac{14.5}{\xi}$$



## レサジーの評価例(2/2)

---

- 水素の場合には、 $\xi = 1$  であるから、

$$u = \ln\left(\frac{2 \times 10^6}{1}\right) = 14.5$$

より

$$n = \frac{14.5}{1} = 14$$

# 中性子減速材の性能

- 減速材の性能は $\xi$ が大きいほど良いが、中性子の減速には同時にマクロ散乱断面積 $\Sigma_s$ が大きいこと(散乱の回数を大きくできること)が必要である。そのため $\xi \Sigma_s$ という量を定義して「減速能」と呼ぶ。

$$\text{減速能} = \xi \Sigma_s$$

- もしその物質の $\Sigma_a$ が大きいとすると、中性子はその核と散乱されずに吸収されてしまう可能性が高くなる。そこで減速材の性能を表す量として $\xi \Sigma_s / \Sigma_a$ という量を定義してこれを「減速比」という。

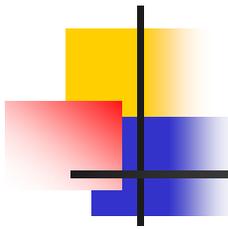
$$\text{減速比} = \frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a}$$

- この値が大きいほど良い減速材であるといえる。表4.1から分かる通り、減速比が最も大きい物質は $D_2O$ で、Be、Cがこれに次ぐ。軽水( $H_2O$ )は $\Sigma_a$ が大きいいため、必ずしも良い減速材とは言えない。

減速材	$A$	$\alpha$	$\xi$	衝突回数 <sup>†</sup>	$\xi\Sigma_s$ <sup>††</sup>	$\xi\Sigma_s/\Sigma_a$
H	1	0	1	14	—	—
D	2	0.111	0.725	20	—	—
H <sub>2</sub> O	—	—	0.920	16	1.350	71
D <sub>2</sub> O	—	—	0.509	29	0.176	5,670
He	4	0.360	0.425	43	$1.6 \times 10^{-5}$	83
Be	9	0.640	0.209	69	0.158	143
C	12	0.716	0.258	91	0.060	192
<sup>238</sup> U	238	0.983	0.008	1,730	0.003	0.0092

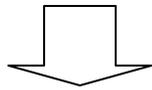
<sup>†</sup>2.0 MeV に対応するレサージを, 1 eV に対するレサージまで増加するのに必要な衝突回数

<sup>††</sup>cm<sup>-1</sup>

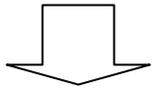


## 減速中の拡散(フェルミの年齢理論)

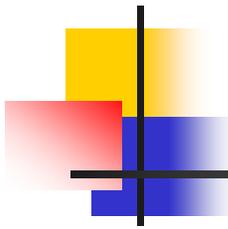
- 拡散方程式  $\rightarrow$  エネルギー変化を無視
- 散乱による減速  $\rightarrow$  空間的な広がりを無視



- 一方、中性子が減速する間にも拡散は発生。
- 減速と拡散の両者を考慮する必要がある。



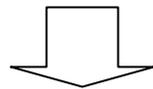
- フェルミの年齢理論



## フェルミの年齢理論における仮定(1/2)

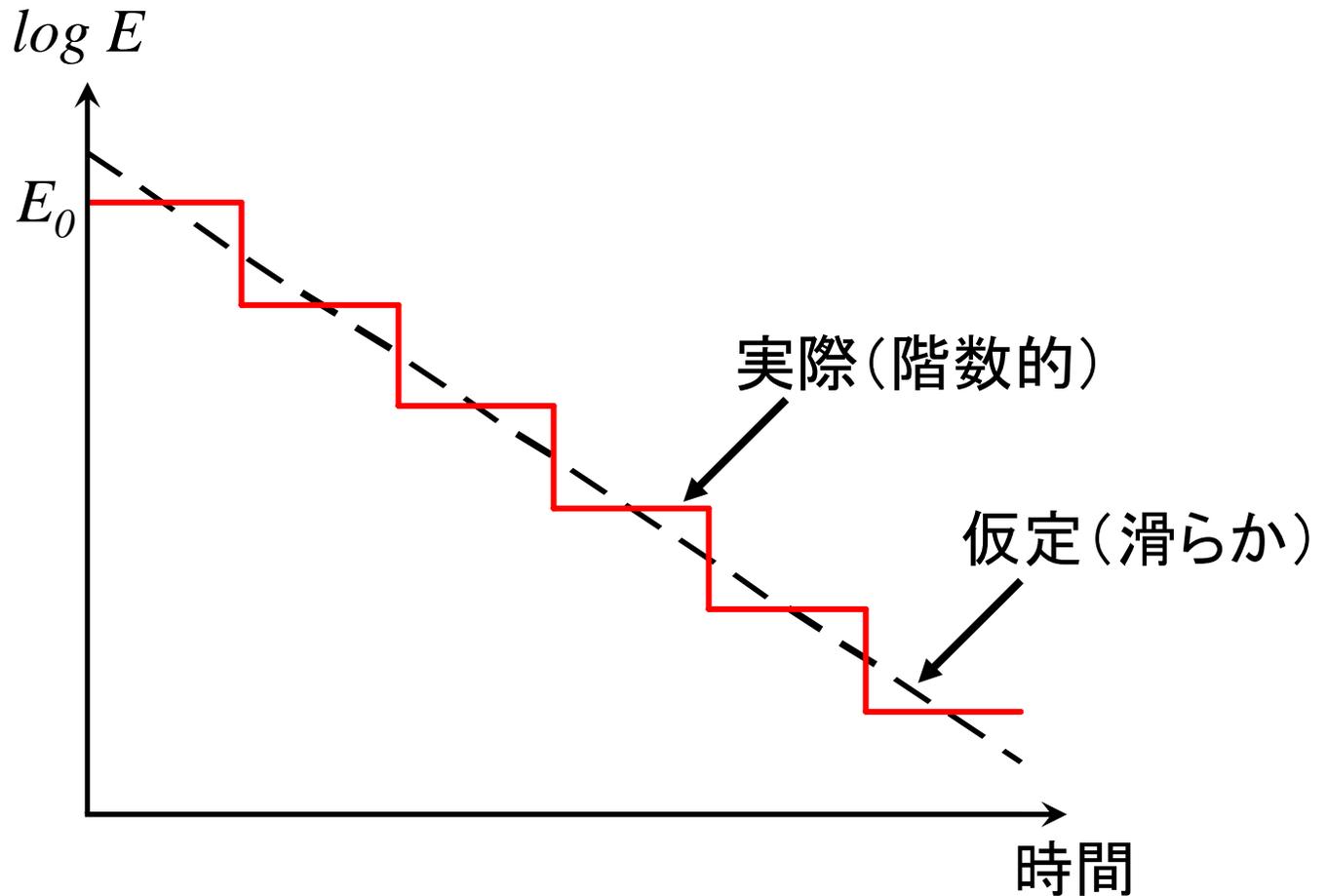
---

- 減速材は単一核種
- 散乱は重心系に関して等方的
- 源の中性子は単一エネルギー
- 1回の衝突で全ての中性子が正確に  $\xi$  のレサジーを得る
- レサジーと衝突回数を直接変数とみなす

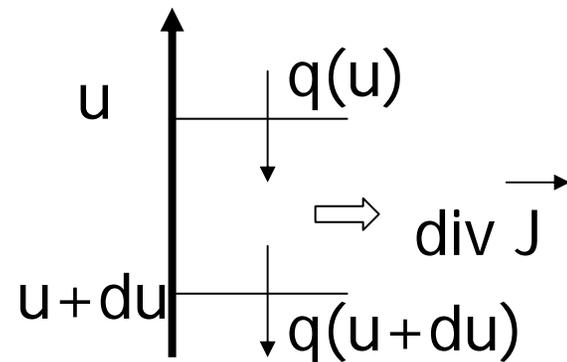


- 実用上満足できる結果を得ることが可能

# フェルミの年齢理論における仮定(2/2)



# 中性子の保存式



- エネルギーが \$u\$ と \$u+du\$ で、空間 \$dV\$ 内にある中性子は、質量保存則より。

$$q(r, u) \cdot dV = q(r, u + du) \cdot dV + \text{div} \vec{J}(r, u) \cdot du \cdot dV$$

- ここで、

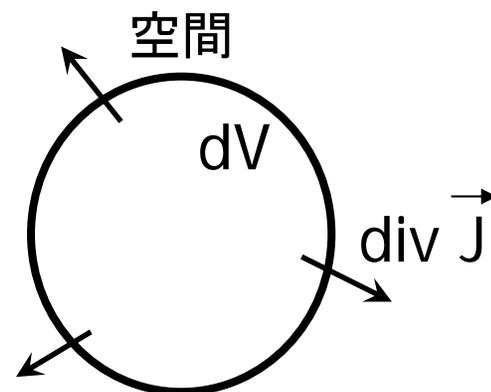
$$(q(r, u) \cdot dV - q(r, u + du)) \cdot dV = -\frac{\partial q}{\partial u} \cdot du \cdot dV$$

$$\vec{J}(r, u) = -D \cdot \text{grad} \phi$$

$$q(r, u) = \xi \Sigma_s \phi$$

- であるから、

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D}{\xi \Sigma_s} \nabla^2 q$$



# フェルミの年齢方程式

- 新しい変数“フェルミ年齢”を定義する。

$$\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{D(u')}{\xi \Sigma_s(u')} du' \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d\tau}{du} = \frac{D(u)}{\xi \Sigma_s(u)}$$

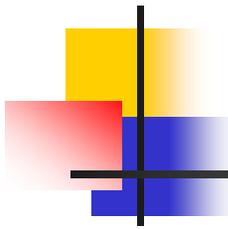
- ここで、

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \cdot \frac{D}{\xi \Sigma_s}$$

- であるから

$$\frac{\partial q(r, \tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 q(r, \tau)$$

“フェルミ年齢方程式”



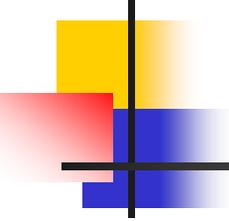
## 参考(1/2)

---

- $q(r, u) = \xi \Sigma_s \phi$  の証明
- (仮定) 「衝突毎に中性子のレサジーは  $\xi$  だけ増加する」より、 $u - \xi$  から  $u$  までのレサジー幅で生じる全ての衝突が  $u$  点での減速密度に貢献

$$q(r, u) = \int_{u-\xi}^{\xi} F(r, u') du'$$

- ここで、(仮定) レサジー幅  $\times$  中での衝突密度  $F(r, u)$  を一定とみなすと



## 参考(2/2)

---

- ここで、(仮定) レサジー幅  $\chi$  中での衝突密度  $F(r, u)$  を一定とみなすと

$$q(r, u) = F(r, u) \int_{u-\xi}^{\xi} du' = F(r, u) \xi$$

- 衝突密度:  $F(r, u) = \sum_s \phi(r, u)$  だから

- $\therefore q(r, u) = \xi \sum_s \phi(r, u)$       Q.E.D.

## 年齢方程式の解の例(1/2)

- 毎秒1 cm<sup>2</sup> 当たり S(個)の中性子を放出する点源が無限媒質中にある場合の減速密度は?

- (解)

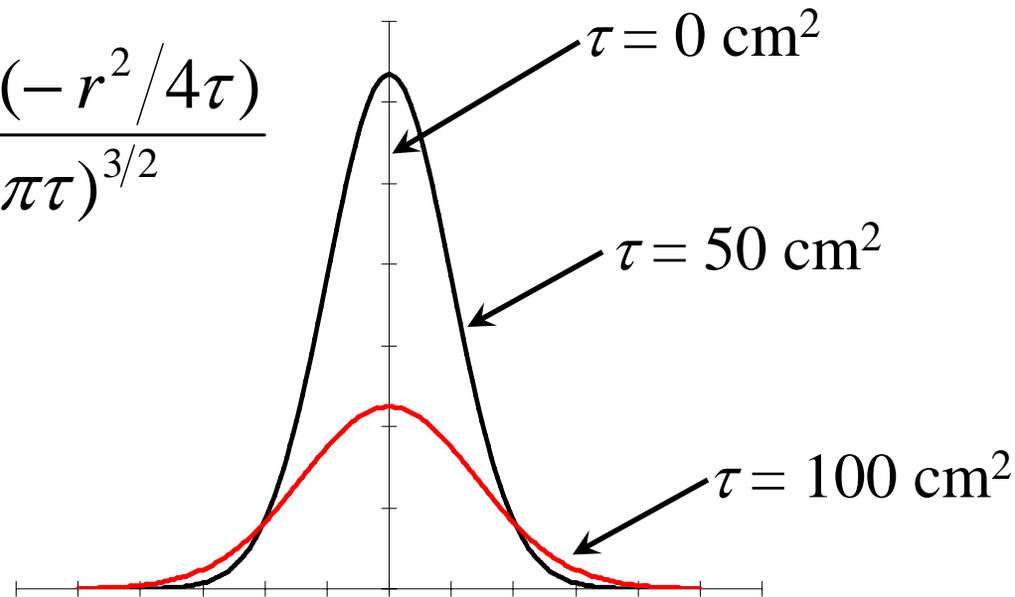
$$\frac{\partial q(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial q(r, \tau)}{\partial r} \right)$$



$$q(r, \tau) = \frac{S \exp(-r^2/4\tau)}{(4\pi\tau)^{3/2}}$$

## 年齢方程式の解の例(2/2)

$$q(r, \tau) = \frac{S \exp(-r^2/4\tau)}{(4\pi\tau)^{3/2}}$$



- 年齢  $\tau$  と共に減速密度分布は拡散して広がる
- $\tau$  は時間の次元を持つ量ではなく、長さの2乗の次元を持つ
- 「中性子の減速と共に単調に増大する」ことを意味している

## フェルミ年齢の物理的意味(1/3)

AB間の距離を $r$ として、無限に広い媒質中に毎秒 $S$ 個の中性子を等方的に放出する点源を考える。

点源を中心にした半径 $r$ 、厚さ $dr$ の球殻内で年齢 $\tau$ を通過して減速する中性子の数は $q(r, \tau)dV=4\pi r^2 q(r, \tau)dr$ である。

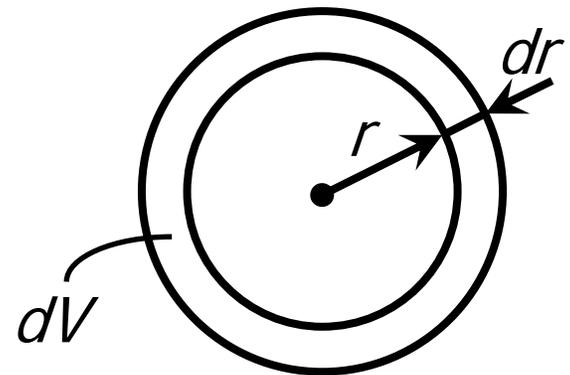
源から放出された中性子がこの球殻内で年齢 $\tau$ に達する確率を $p(dr)$ とすると、これは $q(r, \tau)dV/S$ で表される。また毎秒 $S$ 個の中性子を放出する点源による減速密度は

$$q(r, \tau) = \frac{S e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \quad \textcircled{1}$$

であるからこの式によって

$$p(r) = \frac{4\pi r^2 e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \quad \textcircled{2}$$

となる。



## フェルミ年齢の物理的意味(2/3)

確率分布関数  $p(r)$  の2次モーメントを  $\overline{r^2}$  とかけば、これは次の積分によって定義される。

$$\overline{r^2} = \int_0^{\infty} r^2 p(r) dr \quad (3)$$

②式を考慮すると、これは次のようになる。

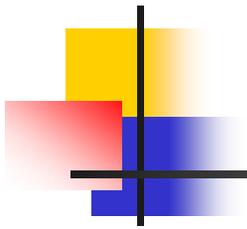
$$\overline{r^2} = \frac{4\pi}{(4\pi\tau)^{3/2}} \int_0^{\infty} r^4 e^{-r^2/4\tau} dr \quad (4)$$

ここで積分公式

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (5)$$

を用いると④式から  $\overline{r^2} = 6\tau$  が得られる。したがって、

$$\tau = \frac{1}{6} \overline{r^2}$$



## フェルミ年齡の物理的意味(3/3)

---

$$\tau = \frac{1}{6} r^2$$

フェルミ年齡とは、年齡ゼロの中性子がA点で体系内に放出され、B点で年齡 $\tau$ に達したときの距離ABの二乗平均の1/6に等しい。  
この時、 $\tau$ の平方根を減速距離という。

$$\text{減速距離} = \sqrt{\tau}$$

## 拡散距離(1/4)

無限媒質中に毎秒  $S$  個の中性子を等方的に放出する点源がある。この点源から距離  $r$  での中性子束は、拡散のみを考慮すると、

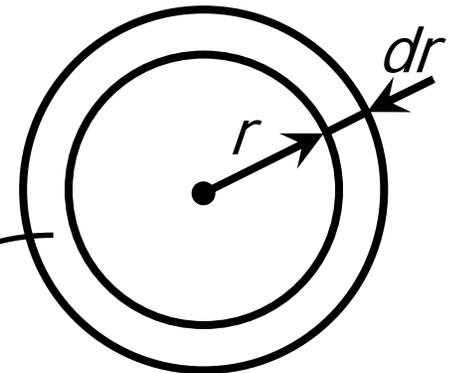
$$\phi(r) = \frac{S e^{-r/L}}{4\pi D r}$$

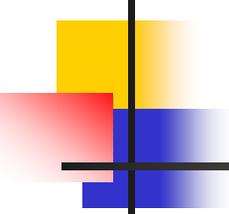
$r$  と  $r+dr$  の間にある体積  $dV=4\pi r^2 dr$  の球殻中で毎秒  $dV$  吸収される中性子の数は

$$dN = \Sigma_a \phi(r) dV = \Sigma_a \left( \frac{S e^{-r/L}}{4\pi D r} \right) (4\pi r^2 dr) = \frac{S \Sigma_a}{D} r e^{-r/L} dr$$

ここで、 $L^2 \equiv \frac{D}{\Sigma_a}$  であるから、

$$dN = \frac{S}{L^2} r e^{-r/L} dr$$





## 拡散距離(2/4)

---

点源から放出された1個の中性子が $dr$ の中で吸収される確率は、

$$pdr = \frac{dN}{S} = \frac{r}{L^2} e^{-r/L} dr$$

よって確率分布関数 $p(r)$ は、

$$p(r) = \frac{r}{L^2} e^{-r/L} dr$$

より、

$$\overline{r^2} = \int_0^{\infty} r^2 p(r) dr = \frac{1}{L^2} \int_0^{\infty} r^3 e^{-r/L} dr = 6L^2$$

$$\left[ \because \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{ただし} \quad \int_0^{\infty} p(r) dr = 1 \right]$$

## 拡散距離(3/4)

エネルギー $E_0$ をもって発生した中性子が、熱エネルギー $E_{th}$ まで減速するまで

の年齢： $\tau_{th}$

とすると、その際の移動距離： $\sqrt{\tau_{th}}$ （減速距離）

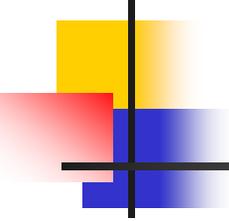
+

熱中性子になってから吸収されるまでの移動距離： $L$



高速中性子として発生し、減速して熱中性子となり、やがて吸収されるまでの

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{移動距離} : \sqrt{\tau_{th} + L^2} \\ \text{移動面積} : M^2 = \tau_{th} + L^2 \end{array} \right.$$



## 拡散距離(4/4)

減速材	密度(g/cm <sup>3</sup> )	$\bar{D}$ (cm)	$L$ (cm)	$\tau_{th}$ (cm <sup>2</sup> )
H <sub>2</sub> O	1.00	0.16	2.85	27
D <sub>2</sub> O	1.10	0.87	170	131
Be	1.85	0.50	21	102
BeO	2.96	0.47	28	100
グラファイト	1.60	0.84	59	368



20°CにおけるMaxwell分布を仮定