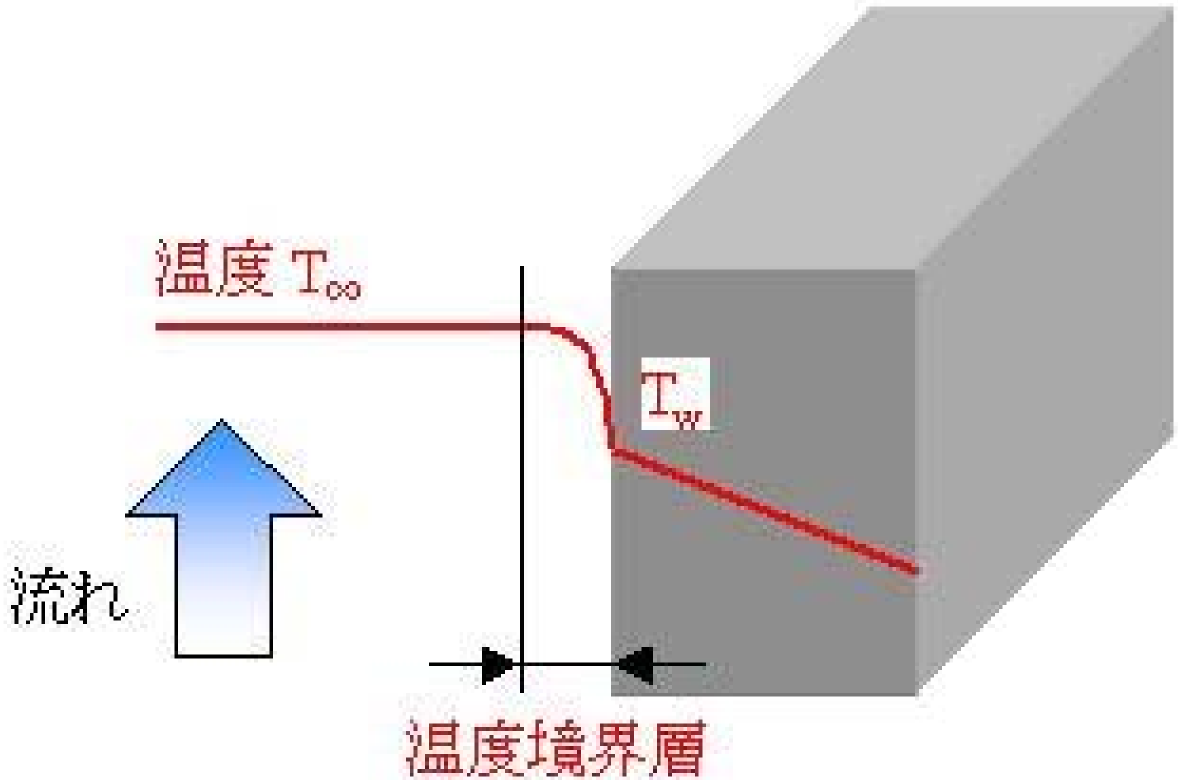
第5章　対流熱伝達の基礎

- 伝熱工学の基礎：　伝熱の基本要素、フーリエの法則、ニュートンの冷却則
- 1次元定常熱伝導：　熱伝導率、熱通過率、熱伝導方程式
- 2次元定常熱伝導：　ラプラスの方程式、数値解析の基礎
- 非定常熱伝導：　非定常熱伝導方程式、ラプラス変換、フーリエ数とビオ数
- 対流熱伝達の基礎：　熱伝達率、速度境界層と温度境界層、層流境界層と乱流境界層、境界層厚さ、混合平均温度
- 強制対流熱伝達：　管内乱流熱伝達、円柱および球の熱伝達、管群熱伝達
- 自然対流熱伝達：　垂直平板自然対流熱伝達、密閉層内自然対流、共存対流熱伝達
- 輻射伝熱：　ステファン-ボルツマンの法則、黒体と灰色体、輻射率、形態係数
- 凝縮熱伝達：　鉛直平板膜状凝縮、凝縮数、水平円管膜状凝縮、滴状凝縮
- 沸騰熱伝達：　沸騰曲線、気泡力学、沸騰熱伝達率

第5章　対流熱伝達



ニュートンの冷却則（Newton’s law of cooling）

実験的な事実：（熱移動量）∝（温度差）

$$Q/A \propto (T_w - T_\infty)$$

比例定数を h とすると、

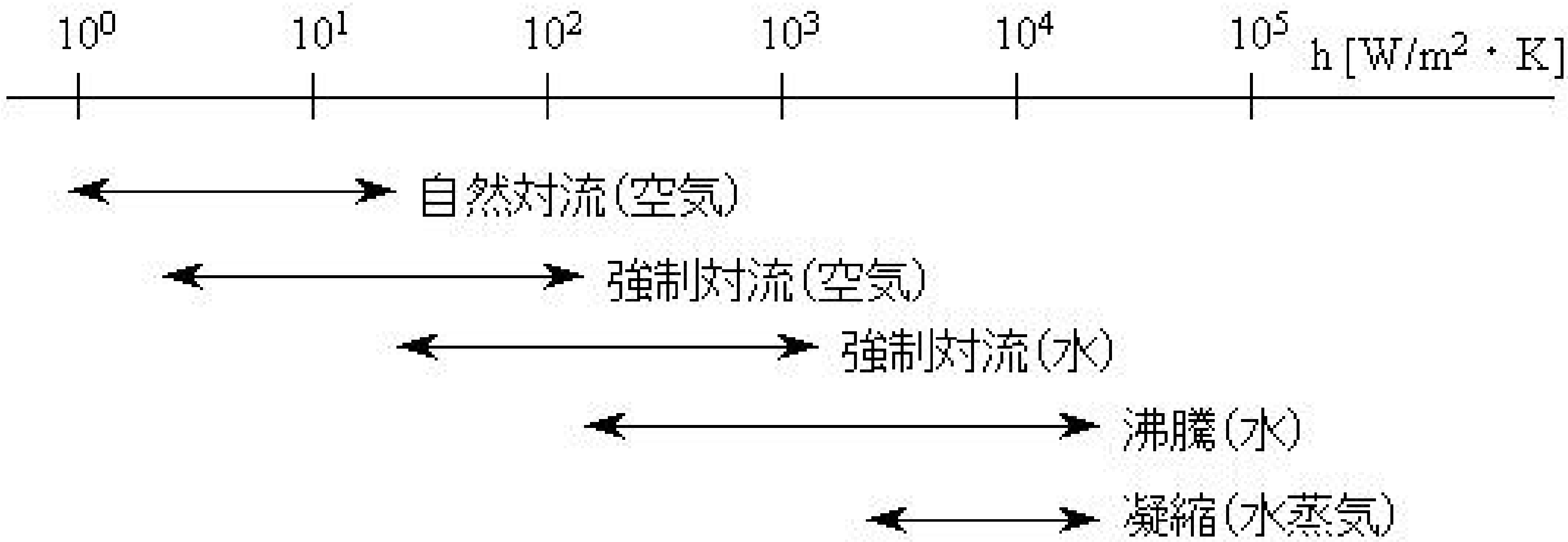
$$\boxed{\frac{Q}{A} = h(T_w - T_\infty)}$$

ニュートンの冷却則（Newton’s law of cooling）

ここで、h $\left[W/m^2 \cdot K\right]$ は、***<u>熱伝達率</u>*** と呼ばれる。

h →大：<u>流体と物体間</u>の熱移動能力→大

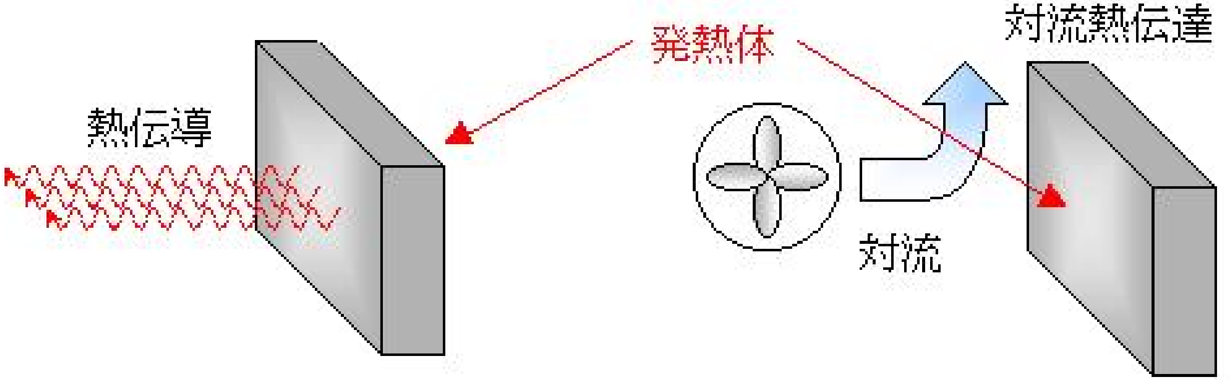
熱伝達率



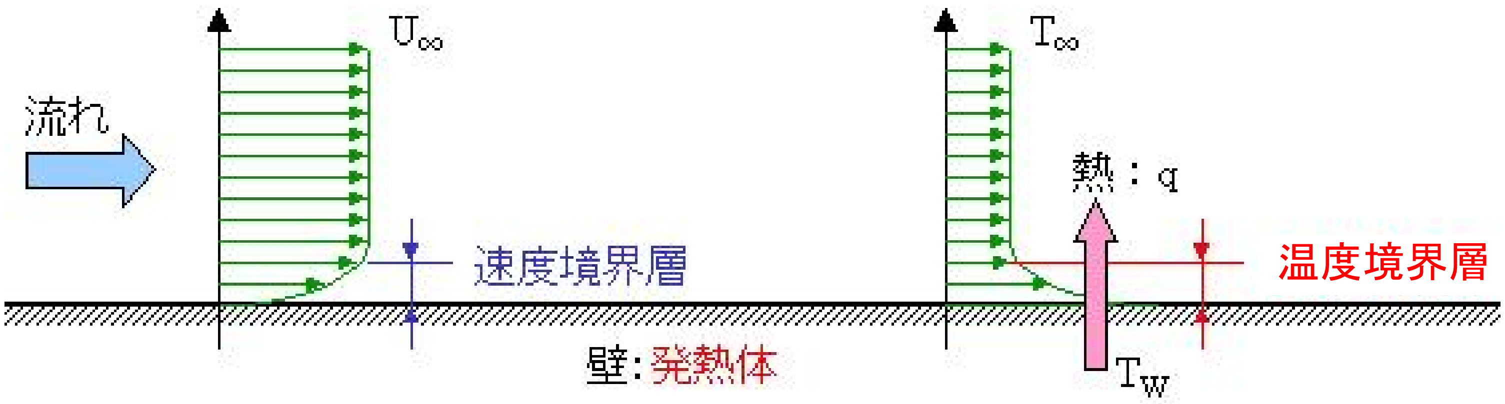
熱伝達率は物性値ではない！

流速、圧力、表面形状によって変化する

対流熱伝達



高温発熱体表面を流れる空気の流速によって熱移動が異なる！ ➡ **なぜ？**



ニュートンの冷却則と熱伝達率

熱伝達→熱伝達率の予測

熱移動量（Newton's Law of Cooling）:

$$Q = hA\left(T_\infty - T_w\right)$$

予測

(1) 流れ場の予測

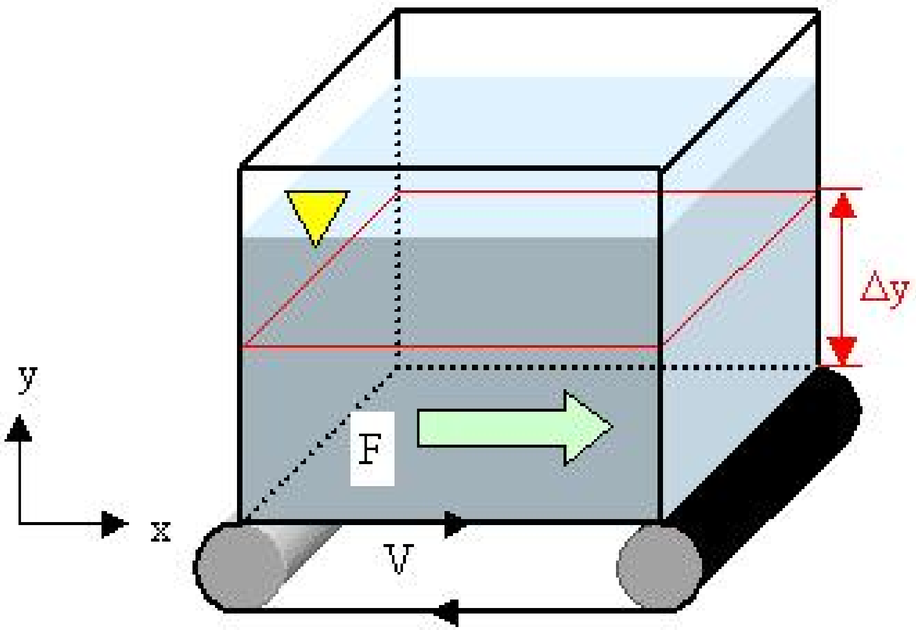
→運動の法則、速度境界層

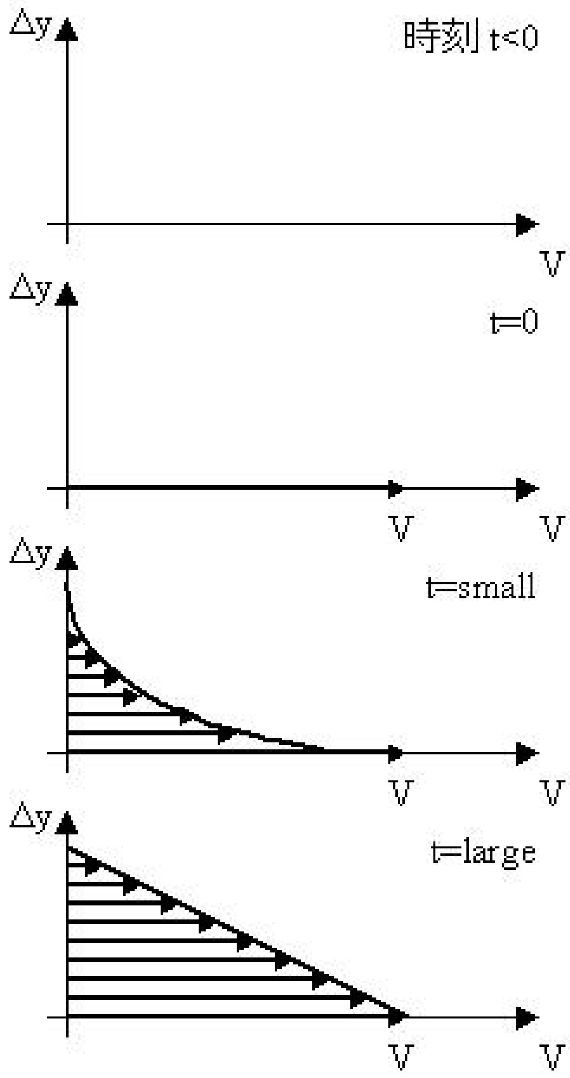
(2) 流れの場の中で成り立つエネルギー収支

→温度場

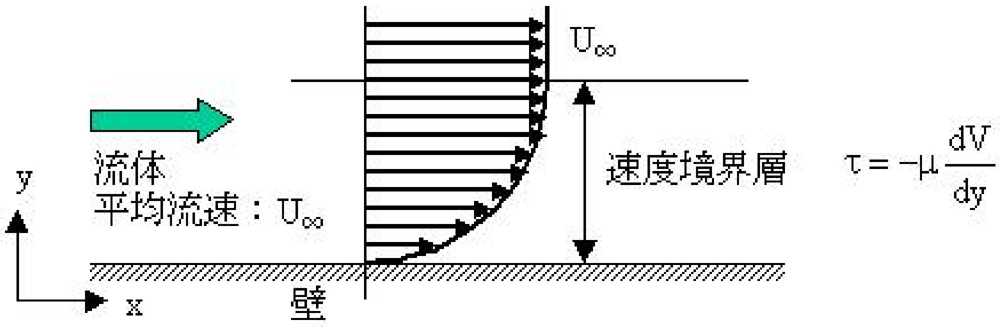
(3) 加熱面と流体間の熱伝達率の予測

粘性流





ニュートンの粘性則



$$（せん断応力）= \frac{F}{A} \propto \frac{V}{\Delta y}$$

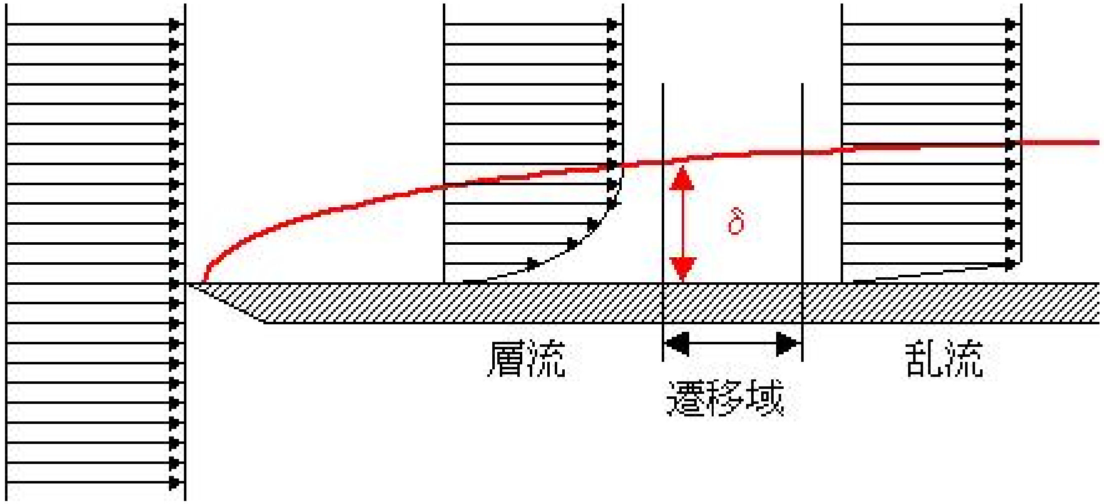
↓　比例定数:　μ

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{\Delta y}$$

↓

$$\tau = -\mu \frac{V}{\Delta y}$$

平板に沿う速度境界層の変化



δ :速度境界層

$$u(\delta) = 0.99 \cdot u_\infty$$

平板の場合

層流境界層から乱流境界層への遷移: $\dfrac{u_\infty x}{\nu} > 5 \times 10^5$

（ $10^5 \sim 2 \times 10^6$: 表面粗さに依存）

レイノルズ数

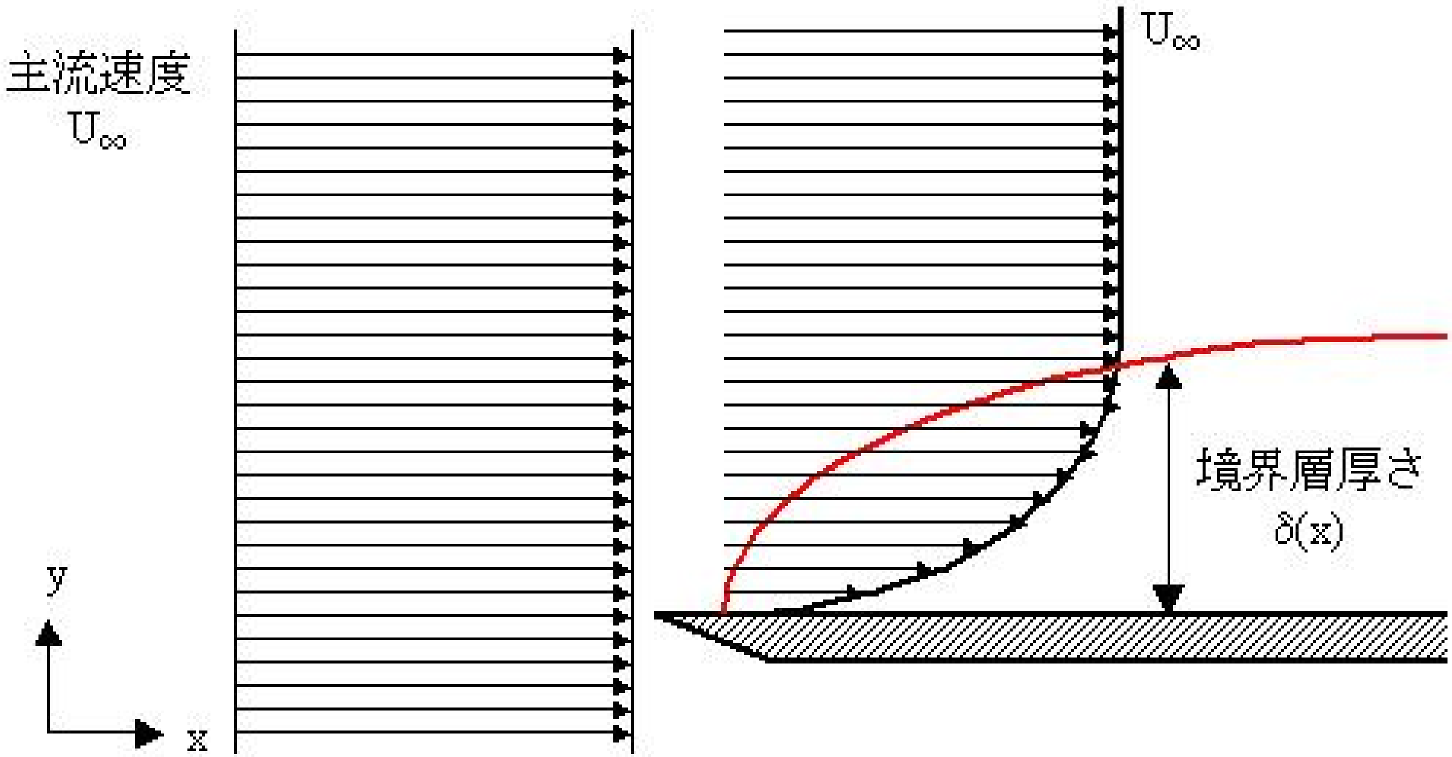
慣性力:
$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho u_\infty \frac{u_\infty}{l}$$

粘性力:
$$\frac{\partial \tau}{\partial y} \sim \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \mu \frac{u_\infty}{\delta^2}$$

レイノルズ数＝慣性力/粘性力

$$= \frac{\rho u_\infty \dfrac{u_\infty}{l}}{\mu \dfrac{u_\infty}{\delta^2}} \approx \frac{\rho u_\infty l}{\mu}$$

平板に沿う層流境界層



流体要素に対する運動方程式

質点に対するニュートンの第２法則：　F=ma

↓

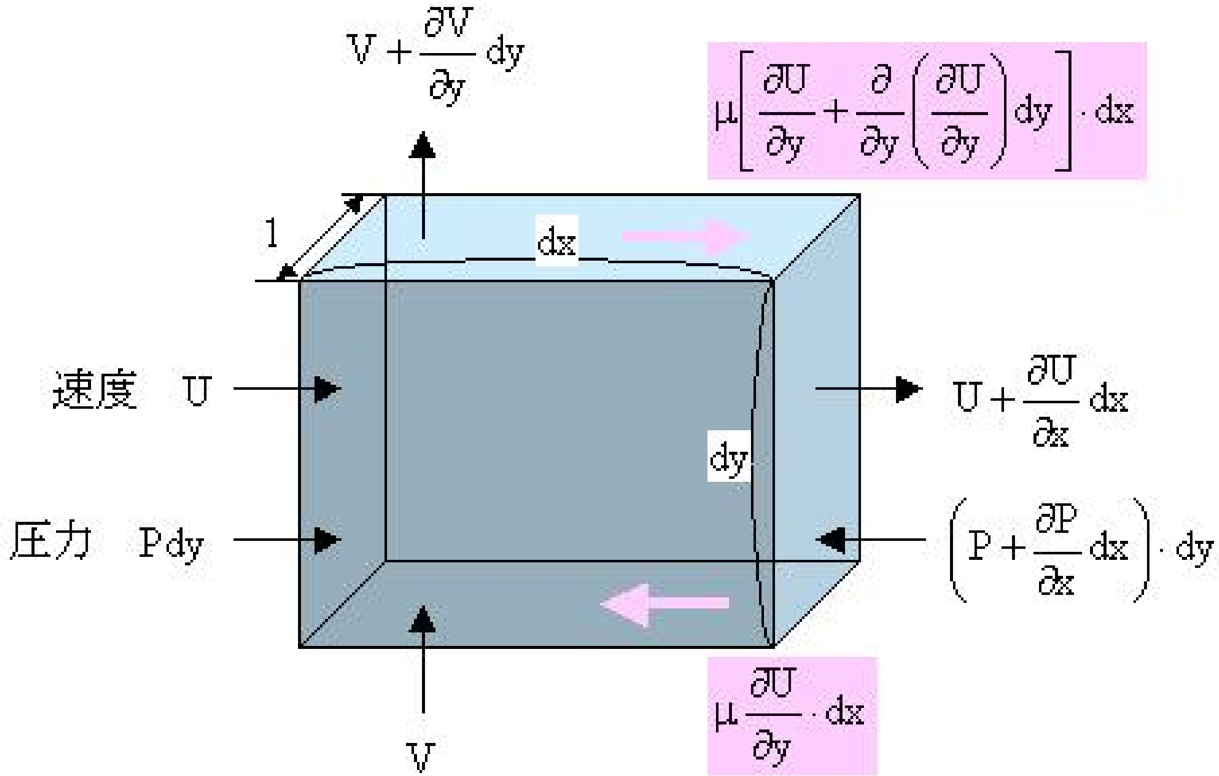
流体要素に対する運動方程式：

（力）＝（ある検査体積を通過する質量流量）×（速度）

（仮定）　(1)　流体は非圧縮性
(2)　定常
(3)　y 方向に圧力変化なし
(4)　粘性係数一定
(5)　y 方向の粘性せん断応力を無視

（x 方向の運動量変化）＋（y 方向の流動による x 方向の運動量変化）
＝（検査体積に働く力）＋（粘性せん断応力の和）

流体要素



$V+\frac{\partial V}{\partial y}dy$
$\mu\left[\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy\right]\cdot dx$
1
dx
速度　U
$U+\frac{\partial U}{\partial x}dx$
dy
压力　Pdy
$\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)\cdot dy$
$\mu\frac{\partial U}{\partial y}\cdot dx$
V

流体要素に働く力

（x 方向の運動量変化）

＝（右側面から流出した運動量）—（左側面から流入した運動量）

$$\rho \cdot (dy \cdot 1) \cdot \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 - (\rho \cdot (dy \cdot 1) \cdot u) \cdot u$$

（y 方向の流動による x 方向の運動量変化）

＝（上面から流出した運動量）—（下面から流入した運動量）

$$\rho \cdot (dx \cdot 1) \cdot \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - (\rho \cdot (dx \cdot 1) \cdot v) \cdot u$$

（圧力の和）

$$P \cdot (dy \cdot 1) - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy \ = - \frac{\partial P}{\partial x} dxdy$$

（粘性せん断応力による正味の力）

＝（上面に働くせん断応力）—（下面に働くせん断応力）

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right) \cdot (dx \cdot 1) - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \cdot (dx \cdot 1) \ = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dxdy$$

層流境界層に対する運動方程式

せん断応力と圧力による力の和を検査体積に流入する
X方向の運動量の和と等しいとおくと、

$$\left\{\rho\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 dy-\rho u^2 dy\right\}+\left\{\rho\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx-\rho uvdx\right\}$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x}dxdy+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy$$

$$\text{左辺}=\rho\left\{u^2+2u\frac{\partial u}{\partial x}dx+\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2\right\}dy-\rho u^2 dy$$

$$+\rho\left\{uv+v\frac{\partial u}{\partial y}dy+u\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(dy)^2\right\}dx-\rho uvdx$$

よって

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

質量保存則

質量の保存則より

x 方向で考えると （流入した質量）—（流出する質量）=0

$$\frac{\partial u}{\partial x} dxdy = 0$$

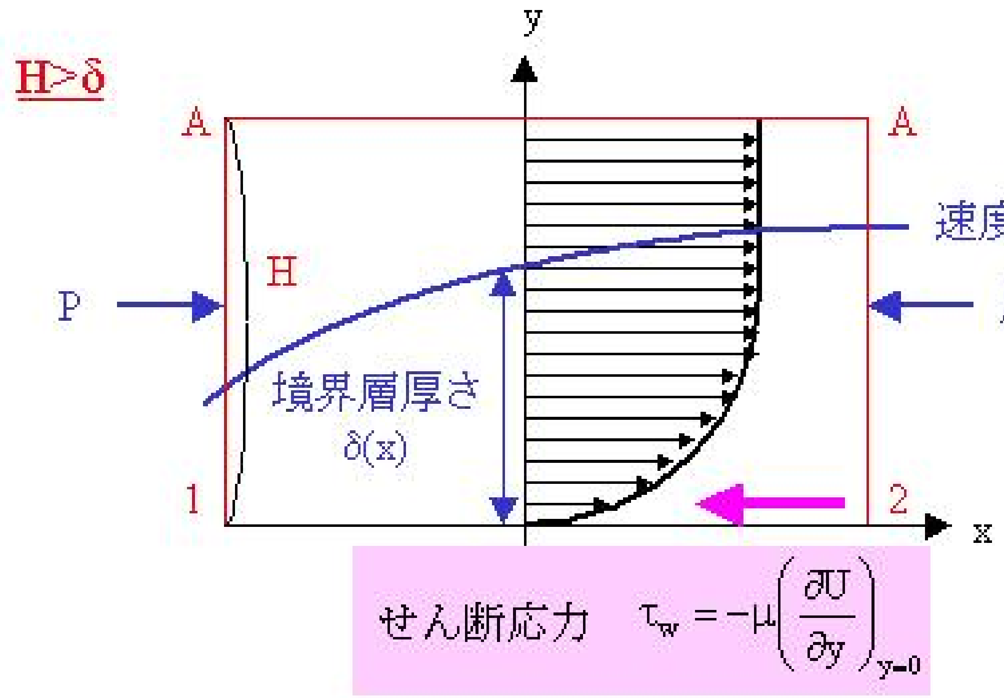
x, y 方向の質量の保存を考えると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{（連続の式）}$$

物性値一定のもとでの層流境界層に対する運動方程式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

von Karman による層流境界層方程式の近似解法



（仮定）

(1)　y 方向成分（流れに垂直）は無視

(2)　検査体積は常に速度境界層を含むように設定

検査体積から流出する運動量

面1を通して流入する質量 : $\int_0^H \rho u dy$

面1を通して流入する運動量: $\int_0^H \rho u \cdot u dy$

面2を通して流出する質量、運動量:

$$\int_0^H \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dy \qquad \int_0^H \left(\rho u^2\right)dy + \frac{d}{dx}\left\{\int_0^H \left(\rho u^2\right)dy\right\}dx$$

A – A 面を通過する質量: $-\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u dy\right)dx$

A – A 面を通過する運動量: $-\left\{\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u dy\right)dx\right\} \times u_\infty$

結局、検査体積から流出する運動量は:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2 dy\right)dx - u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u dy\right)dx = \left\{\rho \frac{d}{dx}\int_0^H \left(u_\infty - u\right)\cdot u dy\right\}dx + \frac{\partial u_\infty}{\partial x}\left(\int_0^H \rho u dy\right)dx$$

境界層運動量積分方程式

圧力によって働く力：$P \cdot H - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \cdot H = -\frac{\partial P}{\partial x} H dx$

粘性によって働く力： $-\tau_w dx = \mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$

（検査体積内の運動量の増分）＝（検査体積に働く力の和）

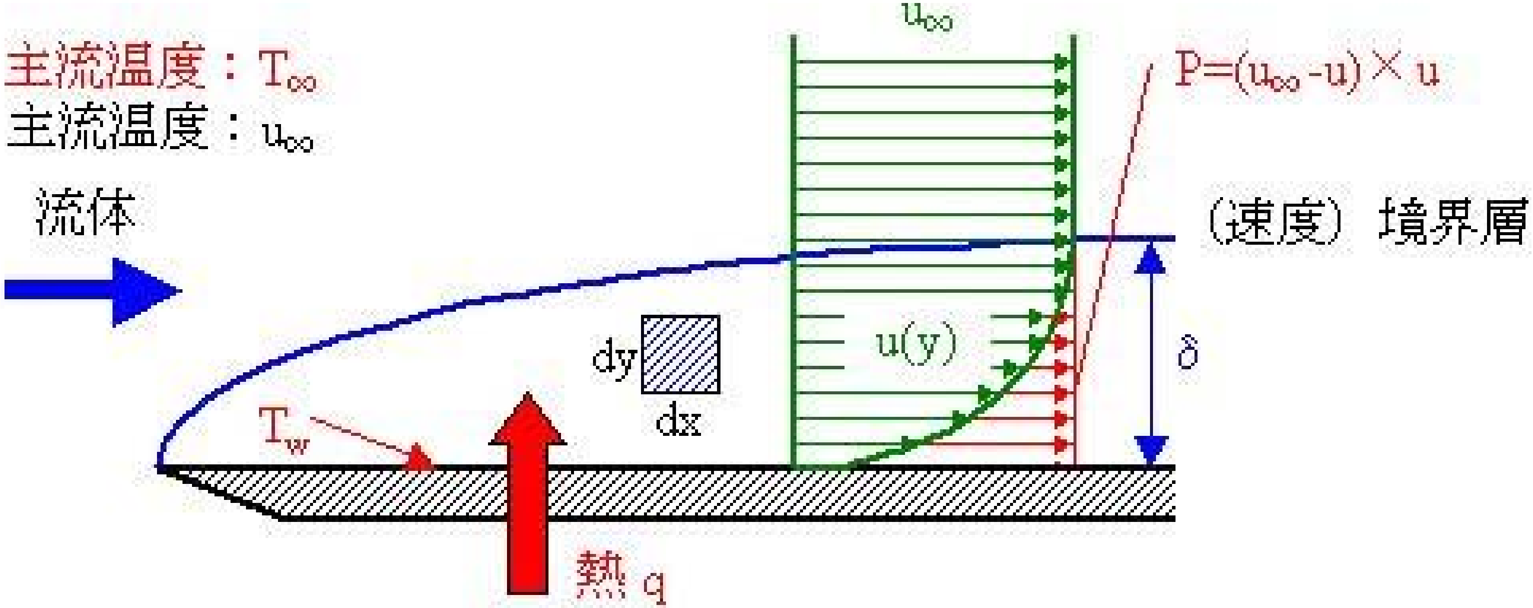
$$\left\{ \rho \frac{d}{dx} \int_0^H (u_\infty - u) \cdot u dy \right\} dx + \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx = -\frac{\partial P}{\partial x} H dx - \tau_w dx$$

ベルヌーイの式より $P + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$ ＝ 一定 であるから

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H (u_\infty - u) \cdot u dy = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}}$$

平板に沿う速度境界層



“境界層内の運動量積分方程式”

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^{\delta}(u_\infty - u)\cdot u dy = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

左辺：速度がu_∞からu(y)に減速されることに要する力

右辺：壁での粘性によるせん断応力

境界層内速度分布

異なる位置yにおいて速度分布u(y)は相似であると仮定する

$$u(y) = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + C_4 y^3$$

速度分布が満足すべき境界条件は

$y = 0$ ： u(0)=0

$y = \delta$ ： u(δ)=u$_\infty$

$y = \delta$ ： $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

$y = 0$ ： $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

以上より、速度境界層内の速度分布は

$$\frac{u(y)}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

境界層積分方程式の解

以上より

$$u_\infty - u = u_\infty\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right) = u_\infty\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right\}$$

また

$$\left.\frac{\partial(u_\infty - u)}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = (-u_\infty)\cdot\left\{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\delta}+\frac{3}{2}\frac{y^2}{\delta^3}\right\} = -\frac{3}{2}\frac{u_\infty}{\delta}$$

従って、<u>境界層運動量積分方程式</u>は

$$\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)\cdot u\,dy = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\rho u_\infty^2\frac{d}{dx}\int_0^\delta\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right\}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right\}dy = \frac{3}{2}\mu\frac{u_\infty}{\delta}$$

$$\delta\frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13}\cdot\frac{\mu}{\rho u_\infty}$$

速度境界層厚さ

$$\int_0^x \delta \cdot d\delta = \frac{140}{13} \cdot \frac{\mu}{\rho u_\infty} \int_0^x dx$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13}} \cdot \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_\infty}}$$

ここで　$\mathrm{Re}_x = \dfrac{\rho u_\infty x}{\mu}$　とおくと速度境界層厚さは、

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

ニュートンの冷却則と熱伝達率

熱伝達→熱伝達率の予測

熱移動量（Newton’s Law of Cooling）:

$$Q = hA\left(T_{\infty} - T_{w}\right)$$

予測

(1) 流れ場の予測

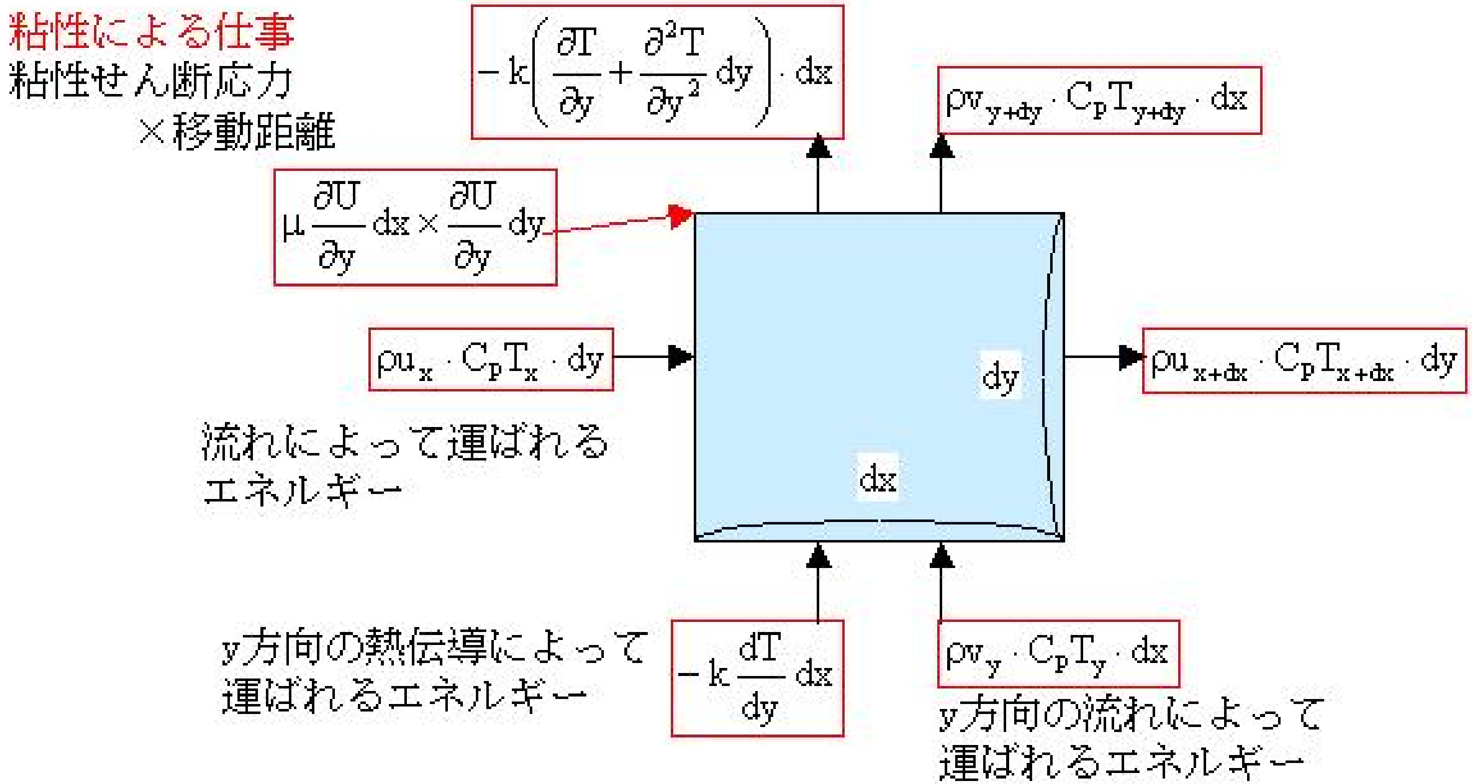
→運動の法則、速度境界層

(2) 流れの場の中で成り立つエネルギー収支

→温度場

(3) 加熱面と流体間の熱伝達率の予測

エネルギー方程式の導出



エネルギー保存則

(左面より流入するエネルギー)+(下面より流入するエネルギー)
+(下面より熱伝導によって運ばれるエネルギー)+(粘性力による仕事)
=(右面より流出するエネルギー)+(上面より流出するエネルギー)
+(上面より熱伝導によって運ばれるエネルギー)

$$\rho c_p Tudy + \rho c_p Tvdx - k\frac{\partial T}{\partial y}dx + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

$$= \rho c_p\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dy + \rho c_p\left(T + \frac{\partial T}{\partial y}dy\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dx$$

$$- k\left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dy\right)dx$$

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy = \rho c_p\left\{T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy - k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dxdy\right\}$$

エネルギー方程式

連続の式より $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

だから

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho c_p v\frac{\partial T}{\partial y}=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

いま、温度伝導率（Thermal Diffusivity）を

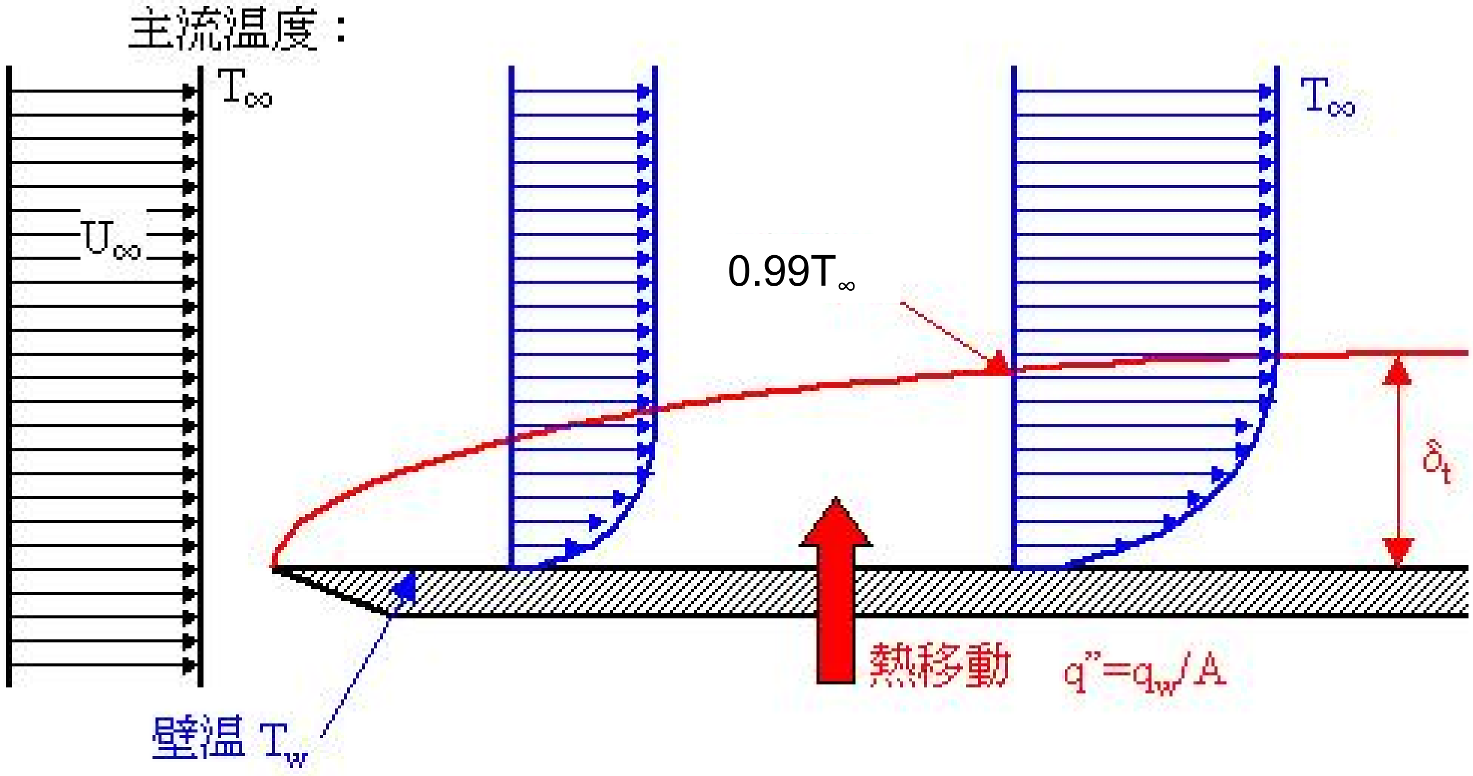
$$\alpha=\frac{k}{\rho c_p}$$ と定義すると、

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

壁面近傍での温度分布



熱伝達率の導出

壁面近傍での速流体速度＝0であるから、壁面から流体への熱移動は熱伝導のみによって伝えられる。

$$q'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

一方、ニュートンの冷却則により、

$$q'' = h(T_w - T_\infty)$$ だから

$$h(T_w - T_\infty) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$h = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \Big/ (T_w - T_\infty)$$

すなわち、熱伝達率hを求めるためには、壁面の温度勾配を知ればよい。

境界層内での温度分布

境界層内での温度分布を

$$T(y)=C_1+C_2y+C_3y^2+C_4y^3$$

とおくと、この式が満足すべき境界条件は、

$$y=0 \quad : \quad T(0)=T_w$$

$$y=0 \quad : \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$y=\delta_t \quad : \quad T(\delta_t)=T_\infty$$

$$y=\delta_t \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial y}=0$$

であるから、境界層内での温度分布は、

$$\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

熱伝達率の評価

境界層内の温度分布： $$\frac{T-T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_\infty - T_w)\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\delta_t} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{\delta_t^3}\right)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = (T_\infty - T_w)\cdot\frac{3}{2\delta_t}$$

熱伝達率は、

$$h = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \Big/ (T_w - T_\infty) = \frac{3}{2}\cdot\frac{k}{\delta_t}$$

温度境界層厚さ $\boxed{\delta_t}$ がわかれば、熱伝達率が評価できる。

ニュートンの冷却則と熱伝達率

熱伝達→熱伝達率の予測

熱移動量（Newton's Law of Cooling）：

$$Q = hA\left(T_\infty - T_w\right)$$

予測

(1) 流れ場の予測

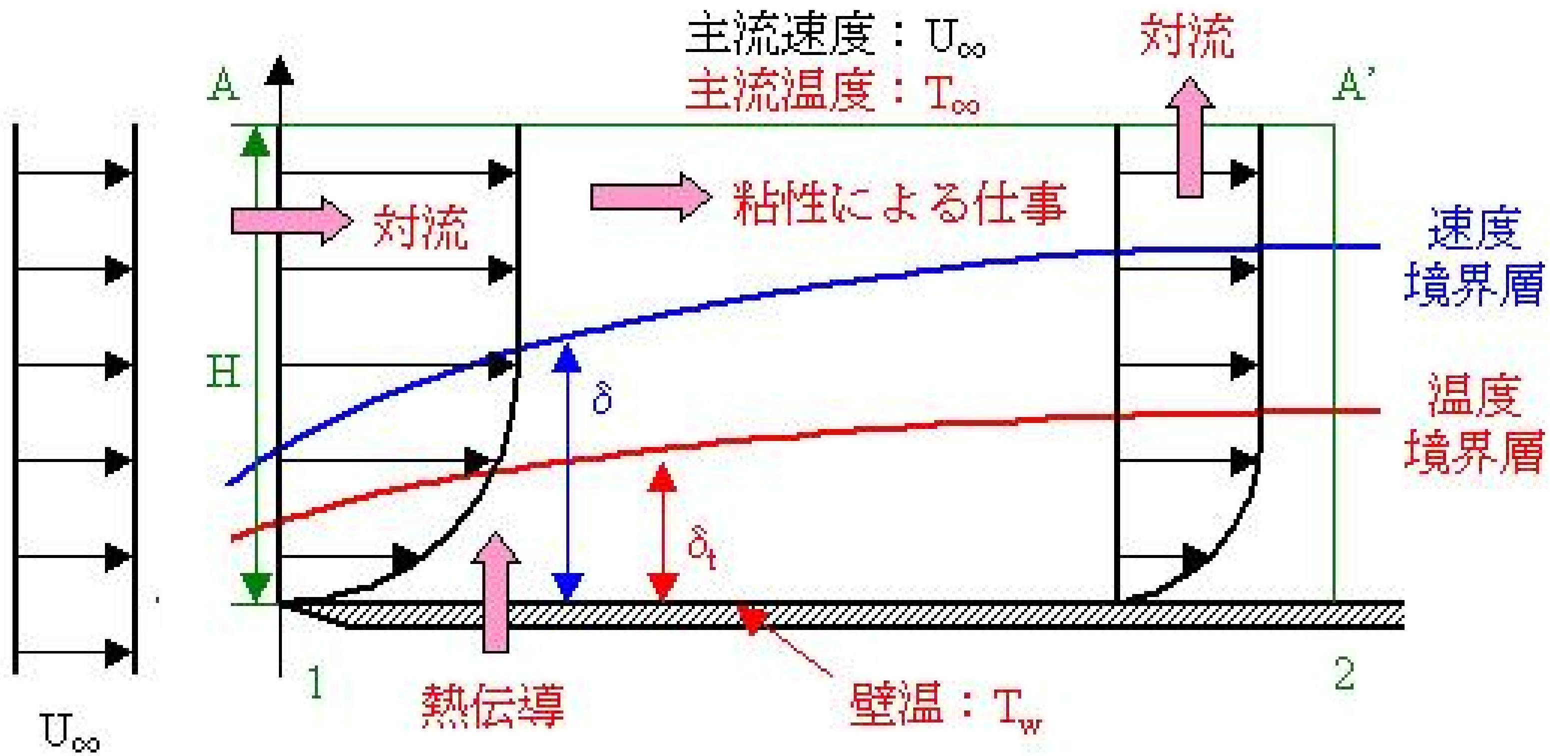
→運動の法則、速度境界層

(2) 流れの場の中で成り立つエネルギー収支

→温度場

(3) 加熱面と流体間の熱伝達率の予測

エネルギー積分方程式
→ 温度境界層厚さの導出



エネルギー保存式

仮定として、$\delta \geq \delta_t$ とすると、エネルギー収支式は、

$$\left(\text{対流によって流入するエネルギー}\right)+\left(\text{粘性力による仕事}\right)+\left(\text{壁からの熱移動}\right)$$
$$=\left(\text{対流によって流入するエネルギー}\right)$$

であるから

$$\left(\text{面1より流入するエネルギー}\right)=\int_0^H \rho u dy \cdot c_p T$$

$$\left(\text{面2より流出するエネルギー}\right)=\int_0^H \rho u dy \cdot c_p T+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^H \left(\rho u dy \cdot c_p T\right) dx\right\}$$

$$\left(\text{面AA'より流出するエネルギー}\right)=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \left(\rho u dy\right) dx\right\}\cdot c_p T_\infty$$

$$\left(\text{粘性力による仕事}\right)=\left\{\int_0^H \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\right\}\cdot dx$$

$$\left(\text{壁からの熱移動}\right)=-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}\cdot dx$$

エネルギー積分方程式

$$\int_0^H \rho c_p uTdy + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^H \rho udy\right)dx\right\}c_p T_\infty + \left\{\int_0^H \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\right\}dx - k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} dx$$

$$= \int_0^H \rho c_p uTdy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^H \rho c_p uTdy\right)dx$$

“エネルギー積分方程式”

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^H (T_\infty - T)\cdot udy\right] + \frac{\mu}{\rho c_p}\left\{\int_0^H \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy\right\}dx = \alpha\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

粘性散逸項を無視することにすると

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)\cdot udy\right] = \alpha\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}$$

エネルギー積分方程式の変形

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)\cdot u\,dy\right] = \alpha \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T_w)\frac{(T_\infty - T_w + T_w - T)}{(T_\infty - T_w)}\cdot u_\infty \frac{u}{u_\infty}dy\right] = \alpha \left.\frac{\partial (T - T_w)}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$(T_\infty - T_w)\cdot u_\infty \frac{d}{dx}\left[\int_0^H \left(1 - \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}\right)\cdot\left(\frac{u}{u_\infty}\right)dy\right] = (T_\infty - T_w)\cdot \alpha \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}\right)\right|_{y=0}$$

ここで

$$\frac{u(y)}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

エネルギー積分方程式の解法

$\delta > \delta_t$の仮定より、積分の上限は$H \rightarrow \delta_t$でよい
（なぜならば、$y > \delta_t$では$T = T_\infty$）

$$(T_\infty - T_w) \cdot u_\infty \cdot \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta_t}\left(1 - \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}\right) \cdot \left(\frac{u}{u_\infty}\right) dy\right] = \alpha (T_\infty - T_w) \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}\right)\right\}_{y=0}$$

$\theta_\infty = T_\infty - T_w$とすると

$$\theta_\infty \cdot u_\infty \cdot \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta_t}\left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right\} \cdot \left\{\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right\} dy\right]$$

$$= \alpha \theta_\infty \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right\}_{y=0}$$

よって、

$$\theta_\infty \cdot u_\infty \cdot \frac{d}{dx}\left[\delta\left\{\frac{3}{20}\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^2 - \frac{3}{280}\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^4\right\}\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha \theta_\infty}{\delta_t}$$

エネルギー積分方程式の解法

ここで、$\xi=\delta_t/\delta$とおくと

$$\theta_\infty \cdot u_\infty \cdot \frac{d}{dx}\left[\delta\left\{\frac{3}{20}\xi^2 - \frac{3}{280}\xi^4\right\}\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\xi\delta}$$

仮定より、$\delta>\delta_t$、よって$\xi<1$だから

ξ^4はξ^2に比べて小さいので

$$\frac{3}{20}\theta_\infty \cdot u_\infty \cdot \frac{d}{dx}\left[\delta\xi^2\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\xi\delta} \longrightarrow \boxed{\frac{u_\infty}{10}\left(2\delta\xi\frac{\partial\xi}{\partial x} + \xi^2\delta\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = \frac{\alpha}{\xi\delta}}$$

を解けばよい。境界条件は、

$x=x_0$ ：　$\delta t=0 \Leftrightarrow \xi=0$

ここで

$$\delta\frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{140}{13}\cdot\frac{\nu}{u_\infty} \qquad \text{かつ} \qquad \delta^2 = \frac{280}{13}\cdot\frac{\nu x}{u_\infty}$$

であるから

エネルギー積分方程式の解法

より、解くべき式は

$$\xi^3 + 4x\xi^2 \frac{d\xi}{dx} = \frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu}$$

となる。ここで

$$\xi^2 \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d\xi^3}{dx}$$

であるから、

$$\xi^3 + \frac{4}{3}x\frac{d\xi^3}{dx} = \frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu}$$

この微分方程式の解は、

$$\xi^3 = \frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]$$

エネルギー積分方程式の解法

今、プラントル数 $\mathrm{Pr} \equiv \nu/\alpha$ を定義すると、

$$\therefore \xi = \sqrt[3]{\frac{13}{14}}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.026}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

エネルギー積分方程式の解法

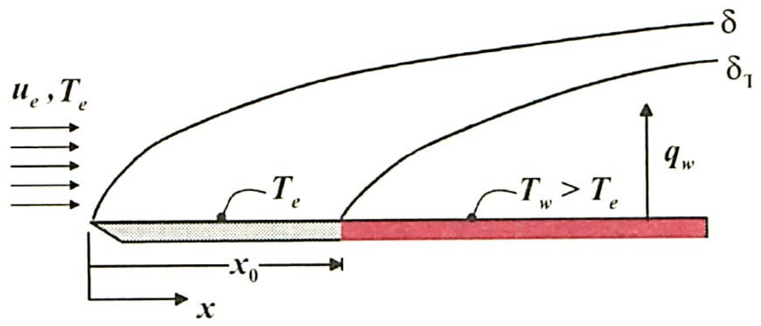
今、プラントル数 $\mathrm{Pr} \equiv \nu / \alpha$ を定義すると、

$$\therefore \xi = \sqrt[3]{\frac{13}{14}} \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.026} \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

ここで、速度境界層厚さは、

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$



熱伝達率とヌッセルト数

$$h=\frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t}=\frac{3}{2}k\cdot\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)\cdot\left(\frac{x}{\delta}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{3}{2}k\left\{1.026\cdot \Pr^{\frac{1}{3}}\left(1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)\right\}^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}}{4.64}\cdot\frac{1}{x}$$

$$h=0.332\cdot\frac{k}{x}\cdot \Pr^{\frac{1}{3}}\cdot \mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

ヌッセルト数： $Nu=hx/k$

$$\boxed{Nu=0.332\cdot \Pr^{\frac{1}{3}}\cdot \mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}}$$

ヌッセルト数

$$Nu \equiv \frac{hL}{k} = \frac{h \cdot \Delta T}{k \dfrac{\Delta T}{L}} = \frac{\text{熱伝達による熱移動}}{\text{熱伝導による熱移動}}$$

プラントル数

$$\mathrm{Pr} \equiv \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{動粘性係数}}{\text{温度伝導率}} = \frac{\text{速度境界層厚さ}}{\text{温度境界層厚さ}}$$

（例）

空気、He、H_2、O_2、N_2： $\mathbf{Pr \sim 0.7}$

水蒸気 ： $\mathbf{Pr \sim 1.0}$

水 ： $\mathbf{Pr = 13 \sim 5}$

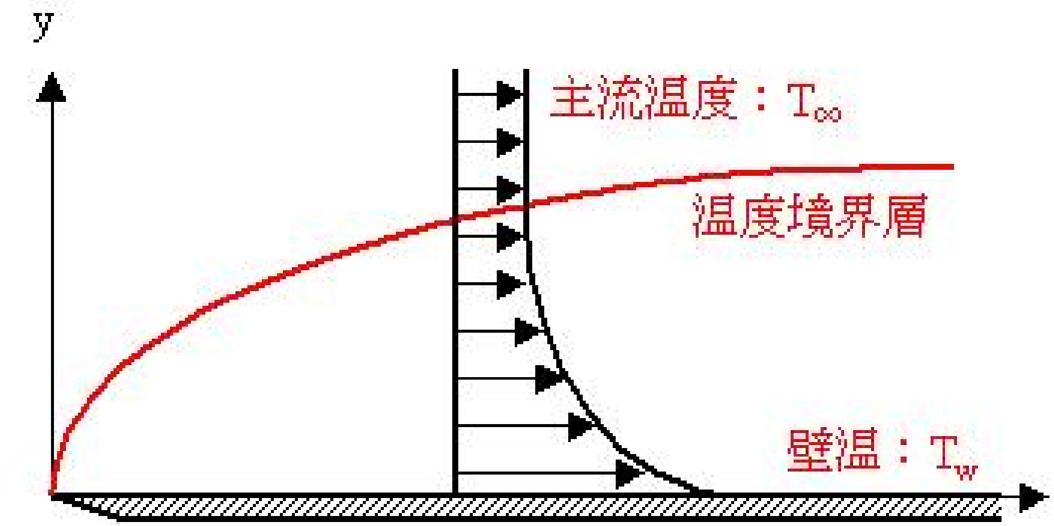
油 ： $\mathbf{Pr = 47100 \sim 276}$

Pr の意味

（1） 温度境界層厚さと速度境界層厚さの比に関係するパラメータ

（2） 与えられた境界層外の流れ場に対して、どの程度厚く温度、速度境界層が発達するかを示す指標

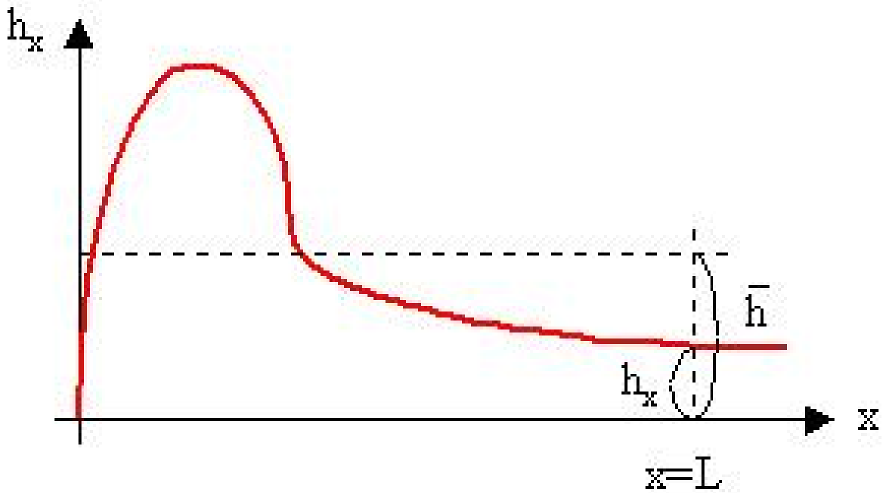
膜温度



一般に、壁温と主流温度は異なり、温度分布が生じる、この壁温と主流温度の違いによって発生する物性値の違いを考慮するため、以下の式で計算される膜温度を用いるのが普通である。

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

平均熱伝達率



次式よって求められる熱伝達率は、板の前線からの距離xによって変化する局所的な値である。

$$Nu_x = 0.332 \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \mathrm{Re}_x^{1/2}$$

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{k}$$

x=0からx=Lまでの熱の移動を求めるためには、x=0からx=Lの区間での熱伝達率を求めておかなければならない。すなわち、

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x dx}{\int_0^L dx}$$

平均熱伝達率

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L 0.332 \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \mathrm{Re}^{1/2} \cdot \frac{k}{x} dx}{\int_0^L dx}$$

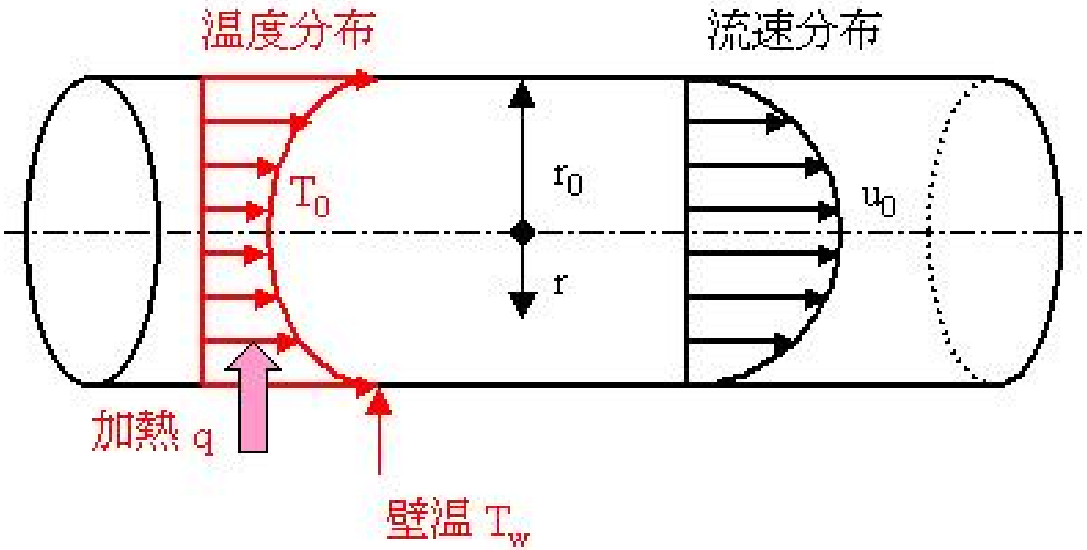
$$= \frac{1}{L} \cdot 0.332 \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \int_0^L \frac{k}{x} \cdot \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} dx$$

$$= 0.332 \cdot \frac{k}{L} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \int_0^L x^{-1/2} dx$$

$$= 0.332 \cdot \frac{k}{L} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \cdot 2\sqrt{L}$$

$$= 2 \cdot \frac{k}{L} \cdot 0.332 \cdot \mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \left(\frac{u_\infty L}{\nu} \right)^{1/2} \longrightarrow \bar{h} = 2 \cdot h\Big|_{x=L}$$

円管内の層流熱伝達



熱伝達率hは
$$q = h(T_w - T_b) = k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r0}$$

$$\longrightarrow\ h = k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r0} \Big/ (T_w - T_b)$$

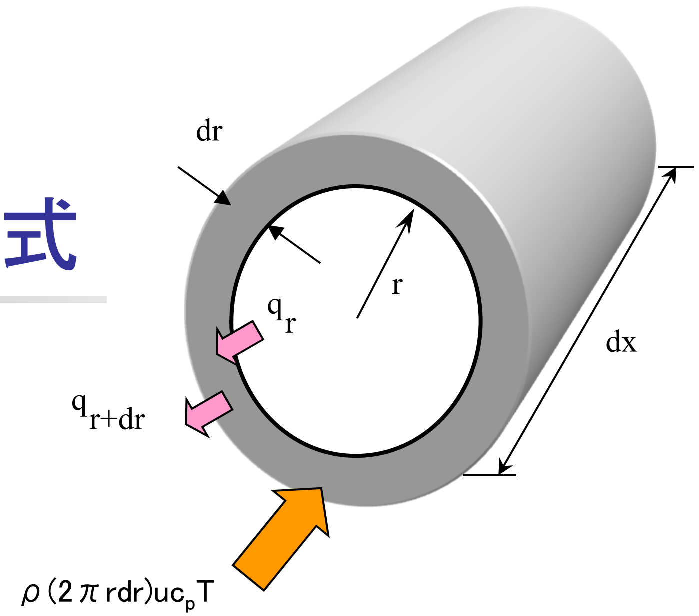
混合平均温度(Bulk Temperature)

$$T_b = \frac{\int_0^{r_0} \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot u \cdot c_p T}{\int_0^{r_0} \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot u \cdot c_p}$$

分子:　管断面の全エネルギー流量
分母:　質量速度と比熱の積の積分値
→　ある点での流れのもつ全エネルギーを表す温度

“Mixing-cup temperature”
「ある容器に流体を貯めて、平衡温度になった時の温度」
に等しい。

円管内の温度分布を表す式



環状の円管要素内のエネルギー収支は、

$$dq_r + \rho(2\pi r\cdot dr)\cdot uc_p T$$

$$= dq_{r+dr} + \rho(2\pi r\cdot dr)\cdot uc_p\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)$$

であるから

$$-k\cdot(2\pi r\cdot dx)\frac{\partial T}{\partial r} + \rho(2\pi r\cdot dr)\cdot uc_p T$$

$$= -k\cdot(2\pi(r+dr)\cdot dx)\left\{\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr\right\} + \rho(2\pi r\cdot dr)\cdot uc_p\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)$$

より

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u$$

ただし

$$\alpha = \frac{k}{\rho\cdot c_p}$$

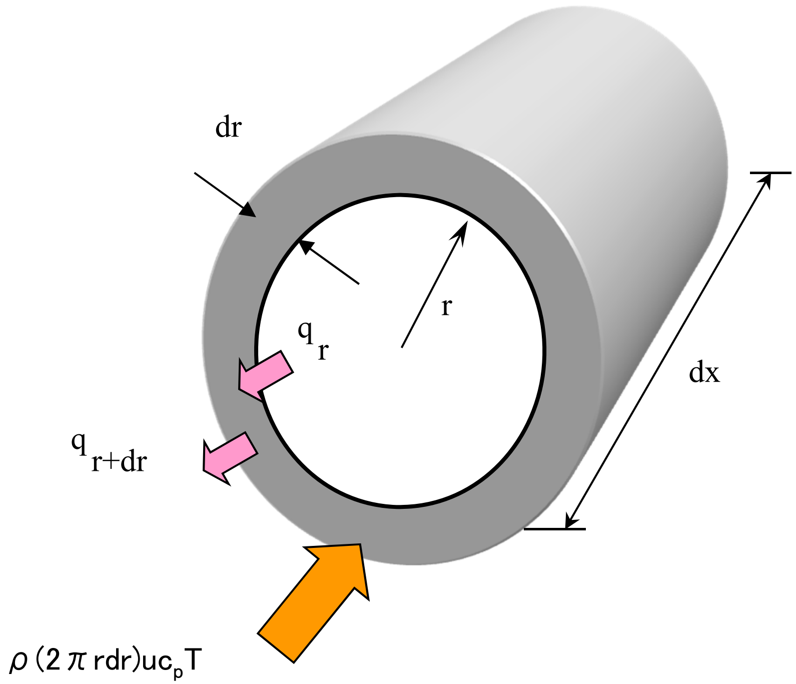
円管内の温度分布の導出

円管内の温度分布は、

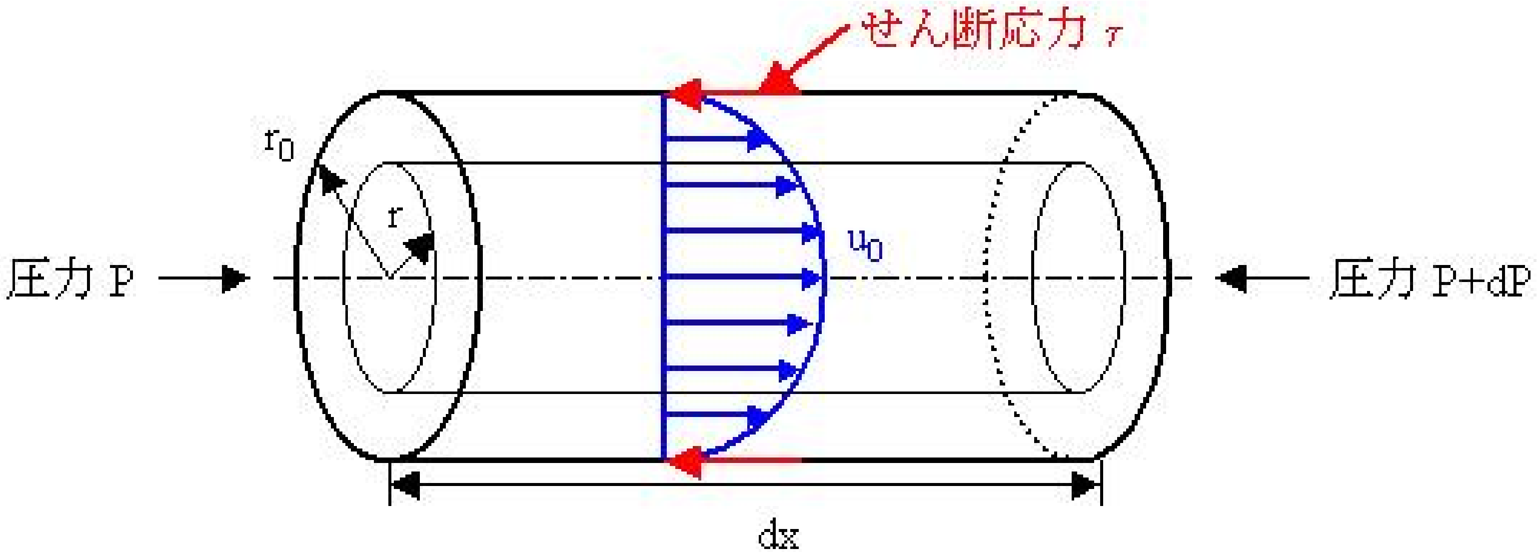
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u$$

なる式を、 $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ =一定 の仮定

のもとで解くことによって
得られる 。



円管内の力の釣り合い



力のバランスを考えると、

$$P \cdot \pi r^2 = \tau \cdot (2\pi r \cdot dx) + (P + dP)\pi r^2$$

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2}{r}\tau$$

一方、ニュートンの粘性則によって、

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

円管内の流速分布

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2}{r}\mu\frac{du}{dr}$$

$$\int_r^{r_0} du = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\int_r^{r_0} rdr$$

$$u(r_0) - u(r) = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\left(\frac{r_0^2 - r^2}{2}\right)$$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}\left(r^2 - r_0^2\right)$$

管中心での速度がu_0だから、$u(0)=u_0$

$$u(0) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}r_0^2$$

$$\frac{u(r)}{u(0)} = \frac{u(r)}{u_0} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

流速分布をエネルギー式に代入

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\left\{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}$$

これを解けば温度分布T(r)が求められる。

$$\int\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\int\left\{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}rdr$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4r_0^2}\right)+C_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4r_0^2}\right)+\frac{C_1}{r}$$

$$\int\frac{\partial T}{\partial r}dr=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\int\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4r_0^2}\right)dr+\int\frac{C_1}{r}dr$$

$$T=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16r_0^2}\right)+C_1\ln(r)+C_2$$

円管内の温度分布

温度に対する境界条件、r=0： $\frac{\partial T}{\partial r}=0$ 、$T=T_0$
より、　　　　$C_1=0$、$C_2=T_0$であるから、

温度分布は、$T=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot u_0\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16r_0^2}\right)+T_0$

壁面温度は： $T_w=T(r_0)=\frac{3}{16}\cdot\frac{u_0r_0^2}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+T_0$

混合平均温度： $T_b=\frac{7}{96}\cdot\frac{u_0r_0^2}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+T_0$

温度勾配： $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0}=\frac{u_0r_0}{4\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}$

円管内層流熱伝達率の評価

$$h=\frac{k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0}}{T_w-T_b}=\frac{k\frac{u_0r_0}{4\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}}{\left(\frac{3}{16}-\frac{7}{96}\right)\cdot\frac{u_0r_0^2}{\alpha}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}}=\frac{24}{11}\frac{k}{r_0}$$

いま、ヌッセルト数：$Nu\equiv\frac{hd_0}{k}$

$d_0=2r_0$だから、 $Nu=\frac{48}{11}=4.364$

（参考）平板の場合　$Nu=0.032\times Re^{\frac{1}{2}}\times Pr^{\frac{1}{3}}$

問題5-1

拡大管(Diffuser)の中を20(℃)の水が、10(kg/s)の割合で流れている。管の内径は、入り口断面で3.0(cm)、出口断面で9.0(cm)である。摩擦のない流れとして、出入り口での静圧上昇を計算しなさい。
ただし、ベルヌーイの法則

$$P_1+\frac{1}{2}\rho u_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho u_2^2$$

が成り立つとし、水の密度を1000(kg/m^3)する。

ベルヌーイの法則：

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

解法の方針5-1

出入り口での静圧上昇は、ベルヌーイの法則より

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 - \frac{1}{2}\rho u_2^2 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$

出入り口での速度は、質量速度を、$G(kg/s)$　とすると、

連続の式

$$\boxed{G = \rho A_1 u_1 = \rho A_2 u_2}$$　より　$u_1 = \dfrac{G}{\rho A_1}$,　$u_2 = \dfrac{G}{\rho A_2}$

また　$A_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$,　$A_2 = \dfrac{\pi d_2^2}{4}$　であるから、

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{G}{\rho A_1}\right)^2 - \left(\frac{G}{\rho A_2}\right)^2\right\} =$$

問題5-2

内径1 cmの円管に油が、流量0.14 kg/sで流れている。油は、入口より一様な速度で流入するものとし、速度助走区間を求めよ。さらに、管摩擦係数λ_fを用い、十分に発達した流れの区間における管軸1 m当たりの圧力損失を求めよ。なお、油はニュートン流体とし、密度r=860 kg/m3、粘度m=0.0172 Pa・sとする。なお、速度助走区間は以下の式で記述できる。

$L_u/d \approx 0.05Re_d$: 層流(Re_d≦2300)　　$L_u/d \approx 10$: 乱流(Re_d>2300)

また、管摩擦係数λ_fは以下の式で記述できる。

$\lambda_f = \dfrac{64}{Re_d}$: 層流(Re_d≦2300)　　$\lambda_f = 0.3164 Re_d{}^{-1/4}$: 乱流(Re_d>2300)

また、長さl [m]当たりの圧力損失は以下で表される。

$$\Delta p = \lambda_f \frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho u^2$$

問題5-3

27℃で1atm(=1.0132×10^5Pa)の空気が平板に沿って2m/sの流速で流れている。平板の前縁からの距離が20cmにおける境界層厚さを計算せよ。ただし、空気のガス定数は287J/kgKであり、27℃における粘性係数は1.98×10^{-5}kg/msである。

問題5-4

問題5-3の流れにおいて、平板が全面にわたって60℃に加熱されているとする。このとき、平板前縁から20cmまでの間の長さにおいて奪われる熱量を求めよ。ただし、奥行きz方向については単位厚みを考えよ。
ただし、以下の値を使用してよい。

$$\nu = 17.36 \times 10^{-6} (m^2 / s)$$
$$k = 0.02749 (W / m \cdot K)$$
$$Pr = 0.7$$
$$C_p = 1.006 (kJ / kg \cdot K)$$

解法の方針5-4

いま、レイノルズ数、ヌッセルト数は、

$$Re = \frac{u_\infty x}{\nu} =$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3} =$$

であるから、熱伝達率は

$$h_x = Nu_x \frac{k}{x} =$$

ここで、平均熱伝達率は、この2倍であるから、

$$\bar{h} = 2 \times h_x =$$

よって　奪われる全熱量は、

$$Q = \bar{h} A (T_w - T_\infty) =$$

問題5-5

単位体積当たりの発熱量がQの熱源が一様に分布した厚さLの平板がある。片面は断熱されており、もう一方の面は、温度T_1の流体と熱交換している。この流体と板壁面との熱伝達率をhとするとき、板内部の温度分布を記述する式を求めなさい。ただし、この平板の熱伝導率をkとする。

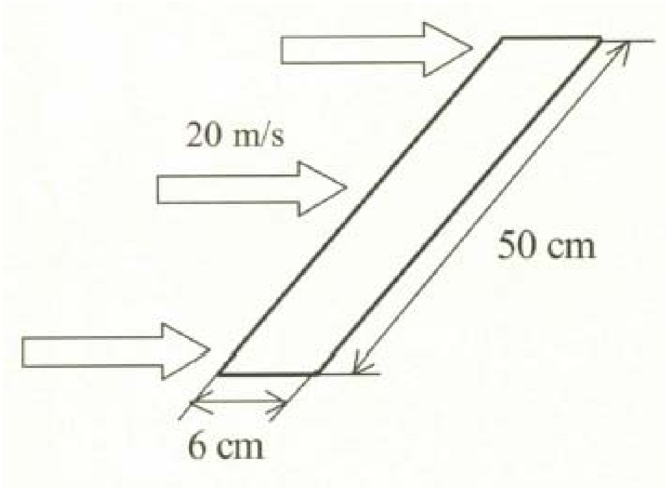
問題5-6

単位体積当たり発熱する熱量が、0.35[MW/m^3]の平板壁がある。片面は断熱されているが、もう一方の面は、93[℃]の流体と熱交換している。流体と壁との間の熱伝達率を570[W/m^2・K]、平板壁の熱伝導率を21[W/m・K]、平板壁の厚さを7.5[cm]とし、壁内部の最高温度を計算しなさい。

問題5-7

２OOAの電流が、長さが1m、直径3.0mmのステンレス鋼製針金中を流れる。ステンレス鋼線は、110℃の液体に浸されており、熱伝達率は、4[kW/m^2/K]とする。ステンレス鋼線の中心温度を求めなさい。ただし、ステンレス製の針金の熱伝導率を k=19[W/m・K]とし、鋼の比抵抗を70[μΩ・cm]とする。

問題5-8



図に示すように、長さ6 cmで幅50 cmの平板上を温度20 ºCの空気が速度20 m/sで流れている。平板表面が一様な温度60 ºCに保たれる時、その表面(片面)からの単位幅当たりの放熱量はいくらか。ただし、40 ºCにおける空気の動粘度を1.70×10-5 m^2/s、熱伝導率を0.0272 W/(m·K)、プラントル数Pr=0.711とし，熱伝達率には平均熱伝達率 $\overline{h}$ を用いること.