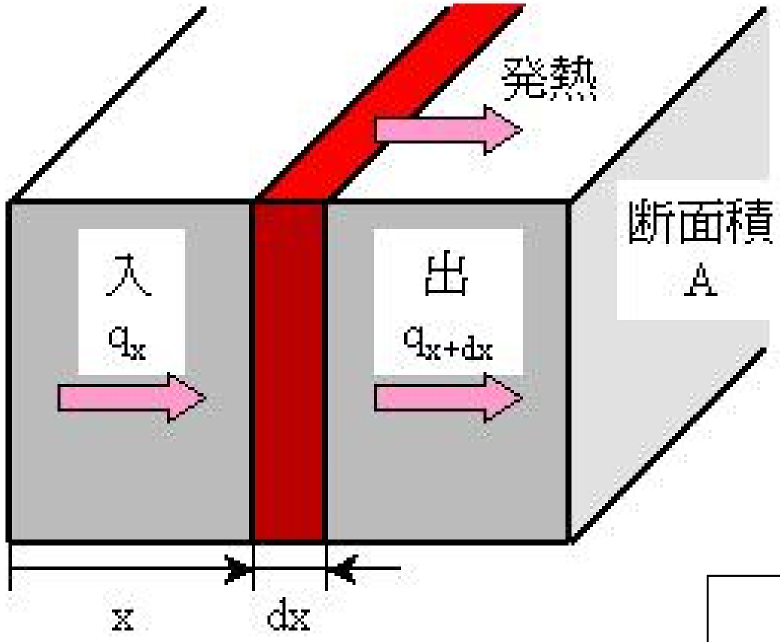
# 第3章　二次元定常熱伝導

- 伝熱工学の基礎： 伝熱の基本要素、フーリエの法則、ニュートンの冷却則
- 1次元定常熱伝導： 熱伝導率、熱通過率、熱伝導方程式
- 2次元定常熱伝導： ラプラスの方程式、数値解析の基礎
- 非定常熱伝導： 非定常熱伝導方程式、ラプラス変換、フーリエ数とビオ数
- 対流熱伝達の基礎： 熱伝達率、速度境界層と温度境界層、層流境界層と乱流境界層、境界層厚さ、混合平均温度
- 強制対流熱伝達： 管内乱流熱伝達、円柱および球の熱伝達、管群熱伝達
- 自然対流熱伝達： 垂直平板自然対流熱伝達、密閉層内自然対流、共存対流熱伝達
- 輻射伝熱： ステファン-ボルツマンの法則、黒体と灰色体、輻射率、形態係数
- 凝縮熱伝達： 鉛直平板膜状凝縮、凝縮数、水平円管膜状凝縮、滴状凝縮
- 沸騰熱伝達： 沸騰曲線、気泡力学、沸騰熱伝達率

# 一次元熱伝導方程式




単位体積当りの発熱量：$\dot{q}$

比熱：c [J/kg・K]

密度：$\rho$ [kg/m$^3$]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ k \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \dot{q}$$

<u>様々な初期条件、境界条件下で、要素内の温度分布温度変化を予測することができる。</u>

# 各座標系における三次元熱伝導方程式

- 熱伝導率が一定とした場合、（ $\rho c$ :熱容量）
  温度伝導率（Thermal Diffusivity）: $\alpha = k/\rho c$ [m2/s]とすると、
- 直交座標系:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

- 円筒座標:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

- 球座標:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

# 2次元定常熱伝導における基礎方程式

- 熱源のある非定常3次元熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

- 熱源のない定常2次元熱伝導の場合

$$0 = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

- 解くべき方程式 ⇨ ラプラス方程式

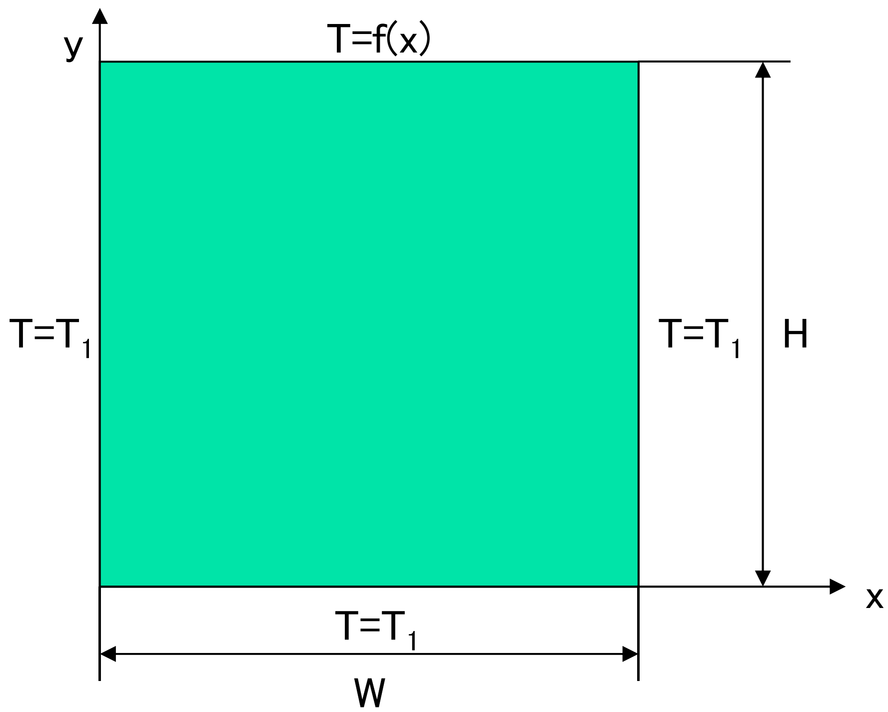
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

# 第3章　2次元定常熱伝導
# 2次元熱伝導の数学的解析(その1)

<u>矩形平板</u>

3つの板端の温度：　$T_1$

上端の温度分布：　f(x)




基礎方程式：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

境界条件(その1)

$y=0$　で　$T=T_1$

$x=0$　で　$T=T_1$

$x=W$　で　$T=T_1$

$y=H$　で　$T=T_m\sin\frac{\pi x}{W}+T_1$

# 基礎式の変形

変数分離法

$$T = XY \quad \text{ただし} \quad X = X(x)$$
$$Y = Y(y)$$

仮定した解Tを、基礎方程式に代入

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

x,yはそれぞれ独立であり、両辺はある定数$\lambda^2$に等しくなければならない。よって、

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$$

# 分離定数の適合性(x方向に正弦関数の境界条件)

$\lambda^2 = 0$のとき
$$X = C_1 + C_2 x$$
$$Y = C_3 + C_4 y$$
$$T = (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y)$$

この関数は境界条件に適合しないのでλは不適な条件である

$\lambda^2 < 0$のとき
$$X = C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x}$$
$$Y = C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y$$
$$T = \left(C_5 e^{-\lambda x} - C_6 e^{\lambda x}\right)\left(C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y\right)$$

この関数は境界条件に適合しないのでλは不適な条件である

# 適合する分離定数

$\lambda^2 > 0$のとき

$$X = C_9 \cos\lambda x + C_{10} \sin\lambda x$$
$$Y = C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}$$
$$T = \left(C_9 \cos\lambda x + C_{10} \sin\lambda x\right)\left(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}\right)$$

この条件は境界条件に適合する。$\theta = T - T_1$ として境界条件を代入する。境界条件は

$y = 0$ で $\theta = 0$

$x = 0$ で $\theta = 0$

$x = W$ で $\theta = 0$

$y = H$ で $\theta = T_m \sin\dfrac{\pi x}{W}$

# 未定係数の決定

この境界条件を適用すると、

$$0 = \left(C_9 \cos\lambda x + C_{10}\sin\lambda x\right)\left(C_{11} + C_{12}\right) \qquad (a)$$

$$0 = C_9\left(C_{11}e^{-\lambda y} + C_{12}e^{\lambda y}\right) \qquad (b)$$

$$0 = \left(C_9 \cos\lambda W + C_{10}\sin\lambda W\right)\left(C_{11}e^{-\lambda y} + C_{12}e^{\lambda y}\right) \qquad (c)$$

$$T_m \sin\frac{\pi x}{W} = \left(C_9 \cos\lambda x + C_{10}\sin\lambda x\right)\left(C_{11}e^{-\lambda H} + C_{12}e^{\lambda H}\right) \qquad (d)$$

(a)より　$C_{11} = -C_{12}$

(b)より　$C_9 = 0$

(c)より　$0 = C_{10}C_{12}\sin\lambda W\left(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}\right) \quad \therefore \sin\lambda W = 0$

よって、

分離定数λを整数であるとすると、 $\lambda = \dfrac{n\pi}{W} \quad \left(n = 0,1,2,\cdots\right)$

# 解の決定

求める微分方程式の解は、異なるnに対する一般解の和として記述することができる。すなわち、

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W}\sinh\frac{n\pi y}{W}$$

最後の境界条件(d)を適用すると、

$$T_m \sin\frac{n\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W}\sinh\frac{n\pi H}{W}$$

これより、n>1に対し$C_n$=0でなければならない。よって

$$T_m \sin\frac{\pi x}{W} = C_1 \sin\frac{\pi x}{W}\sinh\frac{\pi H}{W}, \qquad C_2 = C_3 = \cdots = 0$$

$$\therefore\ T = T_m \frac{\sinh(\pi y / W)}{\sinh(\pi H / W)}\sin\frac{\pi x}{W} + T_1$$

# 2次元熱伝導の数学的解析(その2)

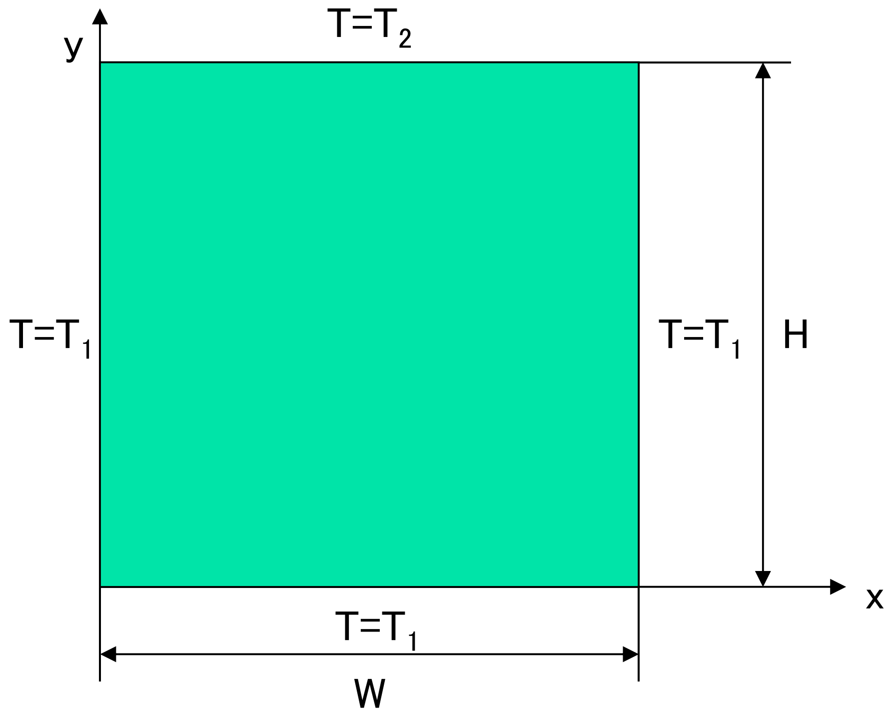
境界条件(その2):

$y = 0$ で $T = T_1$

$x = 0$ で $T = T_1$

$x = W$ で $T = T_1$

$y = H$ で $T = T_2$




境界条件の最初の3式より、
次式の解が得られる。

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi y}{W}$$

# 解の決定

第4の境界条件を代入すると

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{W} \sinh\frac{n\pi H}{W}$$

温度差$T_2$−$T_1$を区間0<x<W上のフーリエ級数に展開する。

$$\boxed{T_2 - T_1 = (T_2 - T_1)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{W}}$$

この2式を比較すると、

$$C_n = \frac{2}{\pi}(T_2 - T_1)\frac{1}{\sinh(n\pi H / w)}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}$$

よって、最終的な解は、

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{W}\frac{\sinh(n\pi y / w)}{\sinh(n\pi H / w)}$$

# 関数展開による熱伝導方程式の解法

# 関数展開の原理

関数F(x)　が既知関数　$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$
線形結合によって記述されるとする。

$$F(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

係数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$　が適切に算出されれば、

任意関数F(x)　は、既知関数 $\{\varphi_m(x)\}$

によって記述できたことになる。

# 関数展開のために望ましい性質

1．直交条件(orthogonal)：

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad (m \neq n)$$

2. 正規化条件(normalize)：

$\varphi_m(x) = \varphi_n(x)$ のときノルム(norm)が定義できる

$$\|\varphi_m\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_m^2(x)dx}$$

↓

正規直交関数

# 正規直交関数による展開係数の決定

正規直交関数 $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx = \delta_{mk}$

ここで

$$\delta_{mk} \equiv \begin{cases} 1 & (m = k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases}$$

クロネッカのデルタ関数

↓

$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx$$

↓

$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = c_k \int_a^b \varphi_m^2(x)dx = c_m \longrightarrow \{c_m\}$$

# 定数の正弦波(sin波)による展開

区間[0 1]における関数

$$u(x) = 1 \quad (0 \le x \le 1)$$

を正弦波で展開すると、

$$u(x) = 1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(2m-1)\pi x \quad (0 \le x \le 1)$$

ここで、展開係数$c_m$ は、

$$c_m = \frac{4}{(2m-1)\pi}$$

$$\downarrow$$

長方形を展開するのに十分な展開項数は？

Program: ORTHG

# 2次元熱伝導方程式の厳密解

２次元熱伝導方程式(Laplace方程式):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1\right)$$

境界条件:（Dirichlet条件）

$$u(0, y) = 0 \quad (0 \le y \le 1)$$
$$u(1, y) = 0 \quad (0 \le y \le 1)$$
$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$
$$u(x, 1) = 1 \quad (0 \le x \le 1)$$

（解）

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[1-(-1)^m\right]}{m \sinh(m\pi)} \sinh(m\pi y) \sin(m\pi x)$$

↓

Program: POLAX

# 差分法による熱伝導方程式の数値解法

# 差分法における空間の記述

連続的な空間(x,y)を等間隔に

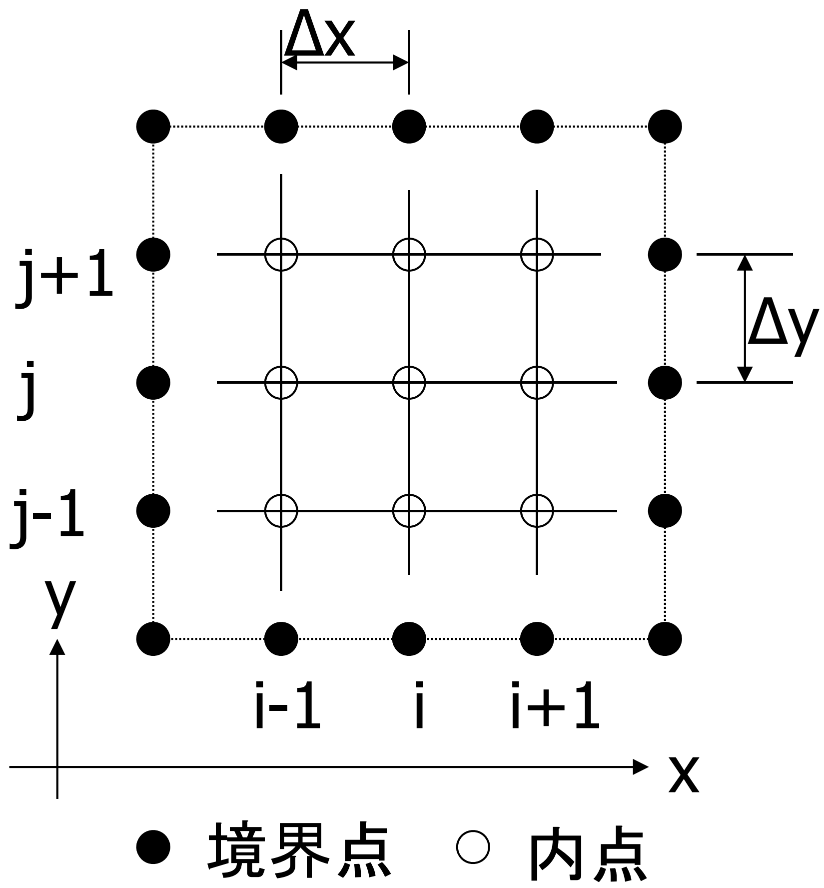
x方向に$\Delta x$

y方向に$\Delta y$

で分割。

x方向にi番目、
y方向にj番目
おける変数を
$u(i\Delta x, j\Delta y)$

$u_{i,j}$ と記述する。



# 空間の前進差分近似

$u_{i+1,j}$を点(i,j)においてxについてTaylor展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

$\left.\partial u / \partial x\right|_{i,j}$について解く

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x + O\left(\Delta x^2\right) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

であることを示している。これを空間の前進差分近似（forward space difference）という。

# 空間の後退差分近似

$u_{i\text{-}1,j}$を点(i,j)においてxについてTaylor展開

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

$\left.\partial u / \partial x\right|_{i,j}$ について解く

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x + O\left(\Delta x^2\right) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

であることを示している。これを空間の後退差分近似（backward space difference）という。

# 空間の中心差分近似

$u_{i+1,j}$ 、$u_{i-1,j}$を点(i,j)においてxについてTaylor展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

上式から下式を差し引く

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + 2\cdot\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

$\partial u / \partial x|_{i,j}$ について解くと

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right)$$

これは、導関数$\partial u / \partial x$ が

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right)$$ であることを示している。

# 2階の導関数の差分商(1/2)

$u_{i+1,j}$ 、$u_{i-1,j}$を点(i,j)においてxについてTaylor展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots$$

上式と下式を足し合わせる

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \cdots$$

$\left.\partial^2 u / \partial x^2\right|_{i,j}$ について解く

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

# 2階の導関数の差分商(2/2)

これは、導関数 $\partial u/\partial x$ を表現する差分商 $\Delta u/\Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

であることを示している。これを空間の中心差分近似
(centered space difference)という。

# 空間の差分商(1/2)

$u_i^n$ の時空間の点(i,n)における空間についての差分商

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$ （前進差分近似）

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$ （後退差分近似）

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$ （中心差分近似）

---

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

# Poisson方程式の差分スキーム

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g$$

空間に中心差分近似を用いた差分方程式

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -g_{i,j}$$

Δx=Δyとする。

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 g_{i,j}$$

# 5点差分スキーム
# (Five-term recurrence scheme)

$\Delta x=\Delta y$とした場合のPoisson方程式の差分近似式

$$-u_{i+1,j}-u_{i-1,j}+4u_{i,j}-u_{i,j+1}-u_{i,j-1}=\Delta x^2 g_{i,j}$$

$u_{i,j}$について整理すると、

$$u_{i,j}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}+\Delta x^2 g_{i,j}\right)$$

変数、$u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$ が既知の場合、$u_{i,j}$ の値が求まることを示している。

↓

- 表計算による熱伝導方程式の解法
- C言語による数値解析

# 問題3-1

平均熱伝導率が、$k_A$=1.3[W/m・K]の材料で作られた厚さ$\Delta X_A$=10[mm]の壁がある。この壁に、平均熱伝導率が、$k_B$=0.35[W/m・K]の断熱材をつけ、1$m^2$当たりの熱損失を1830[W]以下にしたい。壁の内側の表面温度を1300℃とし、断熱材の外側の温度を30[℃]と仮定するとき、必要となる断熱材の厚さ$\Delta X_B$をもとめなさい。

# 問題3-2

一様な熱源q(W/m$^3$)が分布した厚さ2L、熱伝導率が、k[W/m・K]の平板壁がある。片面の温度を$T_1$ [℃]とし、もう一方の面の温度を$T_2$ [℃]に保つとき、平板壁内での温度分布を導け。

# 問題3-3

長さが20m、直径3.2cmのステンレス鋼製針金に100V の電圧がかかっている。針金の外表面温度が93℃であるとき、針金の中心温度を計算せよ。ただし、ステンレス製の針金の熱伝導率を k=22.5[W/m･K]とし、鋼の比抵抗を70[μΩ･cm]とする。