# 第 6 回　安定化有限要素法
# （1D 移流方程式）

筑波大学システム情報工学科
構造エネルギー工学専攻
田中聖三

## 1 次元移流方程式

基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad \Omega$$

境界条件

$$u = \hat{u} \qquad \text{on} \quad \Gamma_1$$ （Dirichlet 境界条件）

## 有限要素法による流体解析の歴史

1966 年　O.C. Zienkiewicz, et.al.，ダムの遮水壁に対する有限要素法.

1969 年　J.T. Oden，非定常非圧縮性粘性流体に対する Galerkin 法による定式化.
（三角形の同次補間要素（流速･圧力 1 次要素）で定式化. 流体解析への布石）

→実際は，使用できない要素であった.

1970 年代前半　音速法（擬似圧縮性を仮定した方法）による解析

後半　ペナルティー法による解析.

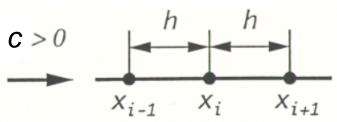
1980 年　T.J.R. Hughes，上流型近似解法の議論（後の SUPG 法へ発展）

⇩ 安定化有限要素法および，
その他の安定化手法の開発，応用.

## 安定化有限要素法 (SUPG 法 ) の開発

有限差分法において，移流項に中心差分を適用した場合，高 Reynolds 数の流れ場では，数値不安定が発生していた. これに対して，風上差分法が開発されていた.

1 次元移流 - 拡散問題




$$c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - k\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

Central Difference Approximate

$$c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - k\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0$$

Upwind Difference Approximate

$$c\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - k\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0$$

## 風上差分法

Central Difference Approximate

$$c\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}-k\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=0$$

Upwind Difference Approximate

$$c\frac{u_i-u_{i-1}}{h}-k\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$c\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}-(k+k_\infty)\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=0 \qquad k_\infty=\frac{ch}{2}$$



## 風上有限要素法

風上差分 ＝ 中心差分 ＋ 人工粘性

$$c\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}-(k+k_\infty)\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=0$$

⇒ Galerkin 法 ＋ 人工粘性 ＝ 風上有限要素法？

$$\int_0^h N_i c\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j+(k+k_\infty)\int_0^h\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j=0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^h\left(N_i+\frac{k_\infty}{c}\frac{dN_j}{dx}\right)c\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j+k\int_0^h\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j=0$$

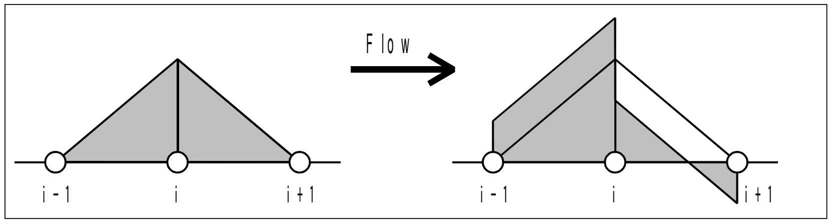
筑波大学 University of Tsukuba

## 風上有限要素法

$$\int_0^h\left(N_i+\frac{k_\infty}{c}\frac{dN_j}{dx}\right)c\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j+k\int_0^h\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j=0$$

$$\Downarrow \quad \tau=?$$

$$\int_0^h\left(N_i+\tau c\frac{dN_j}{dx}\right)c\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j+k\int_0^h\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j=0$$




1979 年 ASME Winter Annual Meeting で Leonald は，ソース項が存在すると，解が poor となってしまうことを指摘した。

筑波大学 University of Tsukuba

## 流線風上化 Petrov-Galerkin 法

Leonard の指摘した，ソース項がある場合の問題，

$$c\frac{du}{dx}-f=0$$

を考える．この式に，流線風上有限要素法を適用すると，

$$\int_0^h\left(N_i+\tau c\frac{dN_j}{dx}\right)c\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j-\int_0^h N_iN_j\,dx\,f_j=0$$

これは，移流項とソース項に異なる重みを用いており，残差が 0 とならない．

よって，両項に同じ重みを用いると，以下のようになる．

$$\int_0^h\left(N_i+\tau c\frac{dN_j}{dx}\right)c\frac{dN_j}{dx}\,dx\,u_j-\int_0^h\left(N_i+\tau c\frac{dN_j}{dx}\right)N_j\,dx\,f_j=0$$

筑波大学 University of Tsukuba

## 流線風上化 Petrov-Galerkin 法

$$\int_0^h \left( N_i + \tau c \frac{dN_i}{dx} \right) \left( c \frac{dN_j}{dx} u_j - N_j f_j \right) dx = 0$$

このように，試行関数と試験関数に異なる関数を用いる方法を Petrov-Galerkin 法と呼ぶ．
（同じものを用いる場合を，Galerkin 法と呼ぶが，この通常の Galerkin 法を特に区別したい場合には，Bubnov-Galerkin 法と呼ぶ．）

よって，
流線風上化 Petrov-Galerkin 法
(SUPG: Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin Method )
となる．



## 1 次元非定常移流方程式

基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

SUPG 法に基づく重み付き残差方程式

$$\int_s u^* \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \right) ds + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{s_e} \tau c \frac{\partial u^*}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \right) ds = 0$$

$$\tau = \frac{h}{2u}$$



## 離散化

1 次元線形要素

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2, \quad u^* = N_1 u_1^* + N_2 u_2^*$$

$$N_1 = \frac{h-x}{h}, \quad N_2 = \frac{x}{h}$$

時間方向の離散化

$$\dot{u} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

$$u = \theta u^{n+1} + (1-\theta) u^n$$

$$\theta = \begin{cases} 0 & \cdots \text{ forward Euler} \\ \frac{1}{2} & \cdots \text{ Crank-Nicolson} \\ 1 & \cdots \text{ backward Euler} \end{cases}$$



## 離散化 ( 練習 )

$$\int_s u^* \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \right) ds + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{s_e} \tau c \frac{\partial u^*}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \right) ds = 0$$

1 要素で考える

$$\int_0^h u^* \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \int_0^h \tau c \frac{\partial u^*}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0$$

$$\frac{h}{6} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \frac{c}{2} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\tau c}{2} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \frac{\tau c^2}{h} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

## 離散化（練習）

領域内の全要素で重ねあわせ

有限要素方程式

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{M}_s\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_s\mathbf{u} = 0$$

時間方向の離散化

$$\left\{\frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}_s}{\Delta t} + \theta\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}_s\right)\right\}\mathbf{u}^{n+1} = \left\{\frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}_s}{\Delta t} - (1-\theta)\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}_s\right)\right\}\mathbf{u}^{n}$$

未知量の変更

$$\left\{\frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}_s}{\Delta t} + \theta\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}_s\right)\right\}\Delta\mathbf{u} = -\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}_s\right)\mathbf{u}^{n}$$

$$\Delta u = u^{n+1} - u^{n}$$



## 課題 ST4　移流問題（締切 :12/2）

1. 第2回（阿部先生担当）の課題（移流方程式の解法）と同様の条件でSUPG法を用いて解析せよ。
2. CFL条件を変えて、解の安定性を比較せよ。
3. θを変え、時間積分精度の議論をせよ。



## V & V について

伊理正夫:”計算の品質向上を目指して”, 日本機械学会誌，1995.7.

工業製品についていえば, 品質管理がおろそかにされ, 品質保証のなされていない製品には市場競争力, 国際競争力がない. 製造技術においては品質と信頼性の概念は最も重要なものであり, 品質に敏感で内技術は今やないといってよい.

計算技術と製造技術とでは同列に論じられない点も多いかもしれないが, 現在までの所, 計算および計算結果についての品質, 信頼性の概念の重要性が関係者の間で一般に広く認識されているとは言いがたいのではないか. しかし, 計算も技術の一つであるとすれば, このような現状は速やかに改善されなければならない.

少々誇張して「今までの計算は, 計算のやりっぱなしだ」と言ったりすることもある. 計算者はその手順や結果について他人をきちんと説得し納得させることができなければならない.

コンピュータの性能はどんどん向上しており, 並列超高速計算技術も現実のものと成りつつある. 扱う問題の規模の拡大にこの性能向上のすべてを当てるのでは無く, その一部（あるいは全部）を計算の品質の向上にも振り向けたいものである.



## V & V について

検証 (verification)

コード（実装）と計算モデル（近似）の両方を検証

- Code verification（コード, ソフトウェアの検証）
  - 数理モデルの解として正しい結果が得られるか？
    - アルゴリズムが適切であるか
    - コードに間違いがないか
- Calculation verification（計算モデル, 計算手法の検証）
  - 計算手法の検証
    - 適切な数理モデル（偏微分方程式等）の近似となっているか
    - 演繹的な計算手法の評価

妥当性確認 (validation)

物理現象に対して適切な計算であるかを確認

- 現象に対するモデル化の妥当性
- Validation は問題毎にユーザーが行う.
- 手法・コードに行うのではなく, 問題設定について行う.
- 実験・観測結果との比較
  - 実験条件と計算条件の対応
  - 実験における不確かさと計算条件の不確かさを考慮
  - 物性値の決定に用いた実験結果とは別の実験結果を用いる.

# ASME V & V

ASME V & V 10-2006: Guide for V & V in Computational Solid Mechanics

- ASME V & V 10.1-2012: An Illustration of the Concepts of V & V in Computational Solid Mechanics
- ASME V & V 10.2~10.x-*Draft*: V&V 10 の解説書

ASME V & V 20-2009: Standard for V & V in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer

- ASME V & V 20.1~20.2-*Draft*: V&V 20 の補足

ASME V & V 30-*Draft*: Standard for V & V of System Analysis and Computational Fluid Dynamics Software for Nuclear Applications

ASME V & V 40-*Draft*: Standard for V & V in Computational Method for Medical Devices



# ASME V & V10