

第6回 有限要素法の基礎 (ポテンシャル流れ)

有限要素法の基礎

有限要素法の特徴 (流れ)

1. 基礎方程式に対して、変分原理 (もしくは重み付き残差方程式) に基づいた積分形の方程式を構成する。
2. 解析する領域を細かく有限要素で分割する。
3. 有限要素の内部を補間式を用いて内挿補間する。
4. 要素毎に校正された離散化方程式を領域全体で重ね合わせ、全体の離散方程式を構成する。
5. この方程式を解く。

有限要素法の基礎

有限要素法の歴史

- 1956年 Turner, Clough, et., al. Journal of Aerospace Science, "Stiffness and deflection analysis of complex structures".
 - 航空機の翼の設計のための解析, 固有値解析が主流
 - 三角形要素を用いて任意形状の構造物の解析
 - 変分原理は用いられていないが、有限要素法の創始的論文
- 1960年 Clough, Proc. 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, "The finite element method in plane stress analysis"
 - 有限要素法と呼称した最初の論文
 - 変分方程式による離散化を提案
- 線形弾性体の応力解析

これらは有限要素法を体系的に実用化した論文, 使用されている理論は, 先人の研究に基づいている. 例えば, 三角形要素内の変分方程式による近似方法については, 1851年 Schellback, "Probleme der Variationsrechnung" にまでさかのぼる.

有限要素法の基礎

有限要素法の歴史 (流れ解析)

- 1967年 Zienkiewicz, et., al. "The Finite Element Methods in Structural and Continuum Mechanics" 出版される.
 - 体系的・理論的, そして記述的に理解しやすく, 有限要素法が普及することとなる。
- 1968年 Martin, "Finite element analysis of fluid flows"
 - ポテンシャル流れの有限要素解析法の提案
 - 当時は有限要素法は構造解析のみであるという認識が一般的
 - ポテンシャル流れは, 汎関数の最小化問題により, 支配微分方程式が与えられるため, 有限要素法の適用が可能であった
- 1969年 Oden, Journal of Engrg. Mech. Div. ASCE, "Finite element analogue of Navier-Stokes equations",
 - 非圧縮性粘性流体への有限要素法の適用を試みる
 - Galerkin法による重み付き残差法を使用 (三角形1次要素)
 - 計算結果は無く, 定式化のみ. => 実は間違っていた...

1次元 Laplace 方程式

基礎方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{on } \Omega$$

境界条件

$$u = g \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (\text{Dirichlet 境界条件})$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (\text{Neumann 境界条件})$$

重み付き残差方程式 (Weighted Residual Equation)

$$\int_{\Omega} w^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} d\Omega = 0 \quad \text{on } \Omega$$

$$w^h = 0 \quad \text{on } \Gamma_1$$

寄り道 (重み付き残差法の直感的意味)

基礎方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{on } \Omega$$

近似方程式

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} = R \quad \text{on } \Omega \quad \begin{array}{l} u^h: \text{関数により近似された解} \\ R: \text{誤差 (残差)} \end{array}$$

残差はゼロにはできない。(正解は"神のみぞ知る"ところ。*上記の場合は違う)

そこで、任意の重み関数を乗じて領域内全体で残差をゼロとるように考える。
(工学で重要な加重平均の考え方)

$$\int_{\Omega} w^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\Omega} w^h R d\Omega \quad \text{on } \Omega$$

弱形式化

重み付き残差方程式 (境界条件考慮)

$$\int_{\Omega} w^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} d\Omega - \int_{\Gamma} w^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial n} - q^h \right) d\Gamma = 0 \quad \text{on } \Omega$$



実習 1: 以下の弱形式化を導け
ヒント: Gauss-Green の公式

弱形式 (Weak Form)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma_2} w^h q^h d\Gamma \quad \text{on } \Omega$$

“弱”の意味は元の式の解に比べ、微分可能性の要請が弱いことに由来する。
境界条件の取り扱いに大きな変化があったことに注意する。
Keyword: 基本境界条件, 自然境界条件

1次要素による離散化

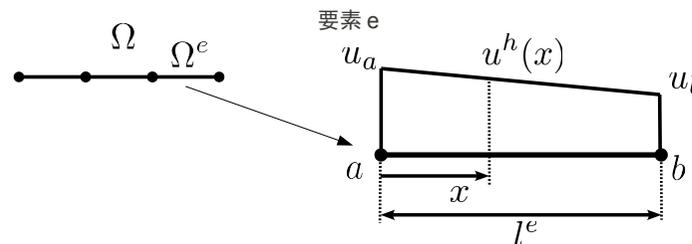
各関数を近似

$$u^h(x) = N_a(x)u_a + N_b(x)u_b \quad \text{on } \Omega^e$$

$$w^h(x) = N_a(x)w_a + N_b(x)w_b$$

*未知量の関数と重み関数に同じ形状関数を用いる手法を Galerkin 法という。

1次の形状関数 $N_a = 1 - \frac{x}{l^e}$ $N_b = \frac{x}{l^e}$



1次要素による離散化

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} d\Omega$$

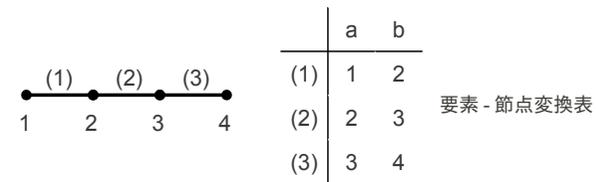
$$= \int_{\Omega^e} \langle w_a \quad w_b \rangle \left\{ \begin{array}{c} \frac{dN_a}{dx} \\ \frac{dN_b}{dx} \end{array} \right\} \langle \begin{array}{cc} \frac{dN_a}{dx} & \frac{dN_b}{dx} \end{array} \rangle \left\{ \begin{array}{c} u_a \\ u_b \end{array} \right\} d\Omega$$

$$= \langle w_a \quad w_b \rangle \int_{\Omega^e} \left\{ \begin{array}{c} \frac{-1}{l^e} \\ \frac{1}{l^e} \end{array} \right\} \langle \begin{array}{cc} \frac{-1}{l^e} & \frac{1}{l^e} \end{array} \rangle d\Omega \left\{ \begin{array}{c} u_a \\ u_b \end{array} \right\}$$

$$= \langle w_a \quad w_b \rangle \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_a \\ u_b \end{array} \right\}$$

全体系への重ね合わせ

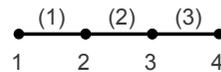
$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} d\Omega = \langle w_a \quad w_b \rangle \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_a \\ u_b \end{array} \right\}$$



$$\langle w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{l^{(1)}} & \frac{-1}{l^{(1)}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{l^{(1)}} & \frac{1}{l^{(1)}} + \frac{1}{l^{(2)}} & \frac{0}{l^{(2)}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{l^{(2)}} & \frac{1}{l^{(2)}} + \frac{1}{l^{(3)}} & \frac{-1}{l^{(3)}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{l^{(3)}} & \frac{1}{l^{(3)}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \right\}$$

連立1次方程式の導出

要素長が全て l とし、節点4に流出がある場合、



$$\langle w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \rangle \left\{ \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{array} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

重み関数 w は任意の値であるため、この方程式が成り立つのは？

連立1次方程式の導出

$$\frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \end{array} \right\}$$

有限要素法による Laplace 方程式の離散化結果は、要素長が一定の場合、中心差分を用いた離散化結果と同様である。

2次元 Laplace 方程式

基礎方程式

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{on } \Omega$$

境界条件

$$u = g \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (\text{Dirichlet 境界条件})$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = q \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (\text{Neumann 境界条件})$$

重み付き残差方程式 (Weighted Residual Equation)

$$\int_{\Omega} w^h \nabla^2 u^h d\Omega = 0 \quad \text{on } \Omega$$

$$w^h = 0 \quad \text{on } \Gamma_1$$

弱形式化

重み付き残差方程式 (境界条件考慮)

$$\int_{\Omega} w^h \nabla^2 u^h d\Omega - \int_{\Gamma} w^h (\nabla u^h \cdot \mathbf{n} - q^h) d\Gamma = 0 \quad \text{on } \Omega$$



弱形式 (Weak Form)

$$\int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \nabla u^h d\Omega - \int_{\Gamma} w^h q^h d\Gamma = 0 \quad \text{on } \Omega$$

三角形 1 次要素による離散化

各関数を近似

$$u^h(x) = N_a(x)u_a + N_b(x)u_b + N_c(x)u_c \quad \text{on } \Omega^e$$

$$w^h(x) = N_a(x)w_a + N_b(x)w_b + N_c(x)w_c$$

形状関数

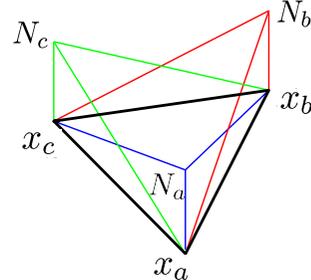
$$N_{\alpha}^e = a_{\alpha}^e + b_{\alpha}^e x + c_{\alpha}^e y$$

$$a_{\alpha}^e = \frac{1}{2\Delta^e} (x_{\beta}^e y_{\gamma}^e - x_{\gamma}^e y_{\beta}^e)$$

$$b_{\alpha}^e = \frac{1}{2\Delta^e} (y_{\beta}^e - y_{\gamma}^e)$$

$$c_{\alpha}^e = \frac{1}{2\Delta^e} (x_{\gamma}^e - x_{\beta}^e)$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \{ x_{\alpha}^e (y_{\beta}^e - y_{\gamma}^e) + x_{\beta}^e (y_{\gamma}^e - y_{\alpha}^e) + x_{\gamma}^e (y_{\alpha}^e - y_{\beta}^e) \}$$



三角形 1 次要素による離散化

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega^e} \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_b}{\partial x} \\ \frac{\partial N_c}{\partial x} \end{Bmatrix} \langle \frac{\partial N_a}{\partial x} \ \frac{\partial N_b}{\partial x} \ \frac{\partial N_c}{\partial x} \rangle \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix} d\Omega$$

$$= \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \int_{\Omega^e} d\Omega \begin{Bmatrix} b_a \\ b_b \\ b_c \end{Bmatrix} \langle b_a \ b_b \ b_c \rangle \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}$$

$$= \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \Delta^e \begin{bmatrix} b_a b_a & b_a b_b & b_a b_c \\ b_b b_a & b_b b_b & b_b b_c \\ b_c b_a & b_c b_b & b_c b_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}$$

三角形1次要素による離散化

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega^e} \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_b}{\partial y} \\ \frac{\partial N_c}{\partial y} \end{Bmatrix} \langle \frac{\partial N_a}{\partial y} \ \frac{\partial N_b}{\partial y} \ \frac{\partial N_c}{\partial y} \rangle \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix} d\Omega$$

$$= \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \int_{\Omega^e} d\Omega \begin{Bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{Bmatrix} \langle c_a \ c_b \ c_c \rangle \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}$$

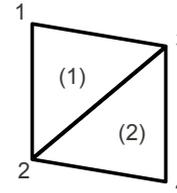
$$= \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \Delta^e \begin{bmatrix} c_a c_a & c_a c_b & c_a c_c \\ c_b c_a & c_b c_b & c_b c_c \\ c_c c_a & c_c c_b & c_c c_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}$$

全体系への重ね合わせ

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial w^h}{\partial y} \frac{\partial u^h}{\partial y} d\Omega$$

$$= \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \Delta^e \begin{bmatrix} b_a b_a & b_a b_b & b_a b_c \\ b_b b_a & b_b b_b & b_b b_c \\ b_c b_a & b_c b_b & b_c b_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}$$

$$+ \langle w_a \ w_b \ w_c \rangle \Delta^e \begin{bmatrix} c_a c_a & c_a c_b & c_a c_c \\ c_b c_a & c_b c_b & c_b c_c \\ c_c c_a & c_c c_b & c_c c_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{Bmatrix}$$



要素 - 節点変換表

	a	b	c
(1)	1	2	3
(2)	2	4	3

連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^{(1)} & K_{ab}^{(1)} & K_{ac}^{(1)} & 0 \\ K_{ba}^{(1)} & K_{bb}^{(1)} + K_{aa}^{(2)} & K_{bc}^{(1)} + K_{ac}^{(2)} & K_{ab}^{(2)} \\ K_{ca}^{(1)} & K_{cb}^{(1)} + K_{ca}^{(2)} & K_{cc}^{(1)} + K_{cc}^{(2)} & K_{cb}^{(2)} \\ 0 & K_{ba}^{(2)} & K_{bc}^{(2)} & K_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{\alpha\beta}^e = \Delta^e (b_{\alpha}^e b_{\beta}^e + c_{\alpha}^e c_{\beta}^e)$$

ポテンシャル流れ

ポテンシャル流れは非圧縮性、非粘性を仮定した完全流体の流れであり、その流速分布は、スカラー関数である速度ポテンシャルの勾配で表される。

$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

連続式より

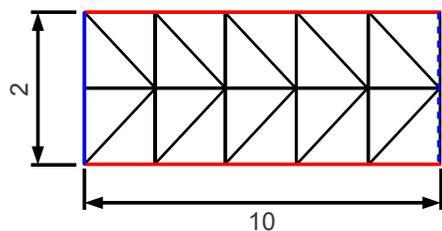
$$\nabla \cdot \mathbf{v} - f = 0$$



$$\nabla^2 \phi - f = 0 \quad \begin{cases} f = 0 & : \text{Laplace 方程式} \\ f \neq 0 & : \text{Poisson 方程式} \end{cases}$$

*fは湧き出し量

課題 ST2 ポテンシャル流れ



— $\phi = 10$
- - - $\phi = 0$
— $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

1. 上のような水路内の速度ポテンシャル分布を示せ。
2. 得られた速度ポテンシャル分布より速度を求めよ。

浸透流

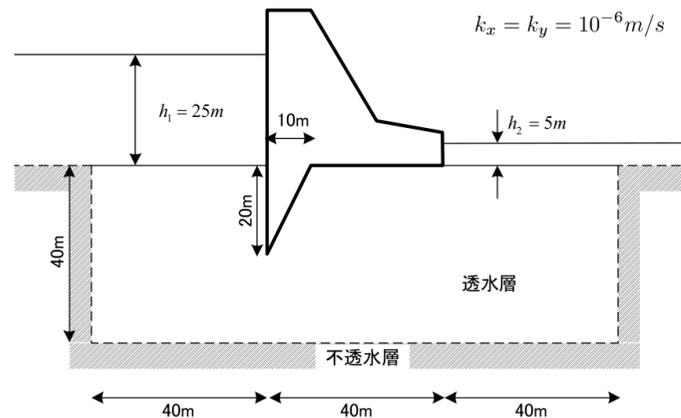
ダルシーの法則

$$u = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}$$

k_x, k_y : 浸透係数 [L/T]

h : ピエゾ水頭 [L]



課題 ST3 浸透流解析

1. 解析領域に対して、約 10m の要素サイズで有限要素分割を行え。
2. 与えられた問題設定に対して解析を行い、ピエゾ水頭の分布を図示せよ。
3. 得られたピエゾ水頭より流速分布を計算し図示せよ。
4. 一日当りの単位幅流量を求めよ。
5. 余力があれば、要素サイズを細かくし、解析結果 (流量) がどのように変化するか調査せよ。