

講義予定

1. 第1回目 10/2 阿部 数値シミュレーションの手続き
2. 第2回目 10/9 阿部 差分方程式と差分スキーム
3. 第3回目 10/16 田中 方程式の代数化, 連立1次方程式の解法
4. 第4回目 10/23 田中 並列計算法
5. 第5回目 10/30 阿部 MAC法など差分の計算方法
6. 第6回目 11/13 田中 有限要素法
7. 第7回目 11/20 田中 有限要素法
8. 第8回目 12/4 田中 有限要素法, N-Sプログラムによる実習
9. 第9回目 12/11 阿部 乱流・熱流体・多相流
10. 第10回目 12/18 田中 津波解析など事例紹介
11. 第11回目 12/25 (試験予定日)

流体運動の基礎方程式

質量保存式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad u: x \text{方向流速} \quad v: y \text{方向流速}$$

2次元非圧縮性流れのNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

p: 圧力 v: 動粘性係数 ρ: 密度

渦度と流れ関数

渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

流れ関数(コーシーリーマンの関係式)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

流れ関数ψについてのPoisson方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

渦度輸送方程式の導出

非保存系表示のNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

上式をyで微分した式から、下式をxで微分した式を差し引く。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad : \text{渦度輸送方程式}$$

ここで

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad : \text{渦度}$$

流れ関数についてのPoisson方程式の導出

流れ関数の定義式(コーシーリーマンの関係式)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

を、以下の渦度の定義式に代入する

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

流れ関数 ψ についてのPoisson方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

渦度移動方程式

2次元渦度移動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

渦度移動方程式を1次元とし、 $\nu = 1/\text{Re}$ として書き換えると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)$$

対流拡散方程式となる。

圧力方程式

保存系表示のNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

上式をxで、下式をyで微分して足し合わせる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S_p \quad : \text{ 圧力}p\text{についてのPoisson方程式}$$

$$S_p = \rho \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} - \frac{\partial D}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad : \text{ 発散}$$

圧力についてのポアソン方程式

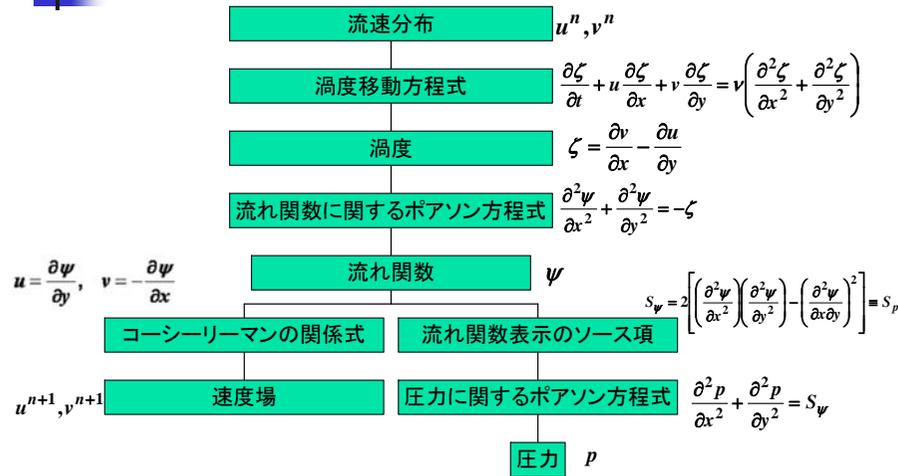
圧力 p についてのPoisson方程式を流れ関数を用いて表すと、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S_p$$

ここで

$$S_p = 2\rho \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \equiv S_p$$

計算フローチャート

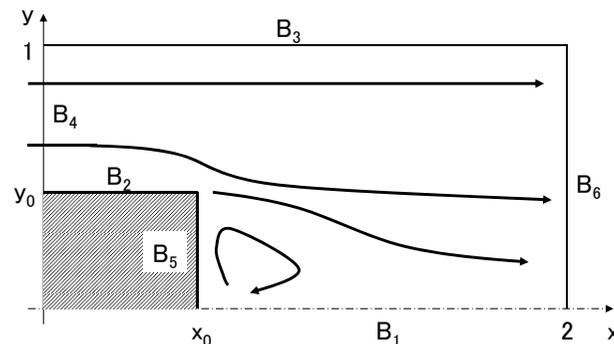


計算手順

- i. $t=0(n=0)$ での初期値から初めて $t=n\Delta t$ まで計算が完了しているとする。したがって、変数値 $u^n, v^n, \zeta^n, \psi^n$ は既知である。
- ii. 渦度移動方程式にしたがって、内点の新しい変数値 ζ^{n+1} を計算する。
- iii. 内点での新しい ζ^{n+1} を用い、流れ関数方程式にしたがって内点の新しい ψ^{n+1} を反復収束過程から計算する。
- iv. 新しい値 ψ^{n+1} を用いて新しい流速 u, v を $u^{n+1} = \partial \psi^{n+1} / \partial y$
 $v^{n+1} = -\partial \psi^{n+1} / \partial x$ から計算する。
- i. 内点における新しい ζ^{n+1}, ψ^{n+1} を用い、境界条件から新しい境界値を計算する。

問題設定

下図に示したように境界 B_1, B_2, \dots, B_6 がある。領域 $(0 \leq y \leq y_0, 0 \leq x \leq x_0)$ は流れに置かれた障害物である。障害物後方の流れを計算しなさい。



基礎方程式と基本関係式

バックステップ流れを渦度 ζ と流れ関数 ψ で記述すると基礎方程式は

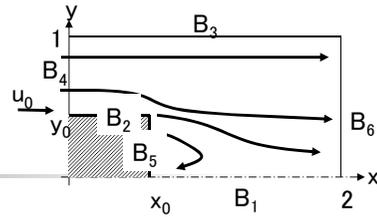
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である。

境界条件1



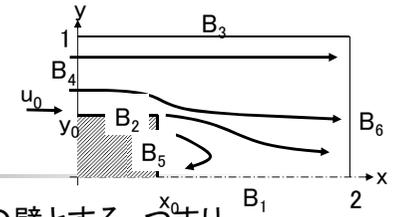
B_1 は中心線とし、 B_2 と B_5 はそれぞれ障害物の上面と底面とする。
 B_3 は上方境界、 B_4 は上流境界、 B_6 は流出境界と呼ばれる。
 境界 B_2 - B_5 - B_1 は流線であるから $\psi = \text{Const}$ である。
 記述の便利のために

$$\psi(B_2 - B_5 - B_1) = 0$$

と書く。上流境界 B_4 では一様な流速 u_0 で流れが体系に入る。
 つまり次の条件である。

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u_0 & (y_0 \leq y \leq 1) \\ \psi(0, y, t) &= u_0(y - y_0) & (y_0 \leq y \leq 1) \\ \zeta(0, y, t) &= 0 & (y_0 \leq y \leq 1) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \leftarrow u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \leftarrow \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

境界条件2



障害物の上面 B_2 ではすべりなしの壁とする。つまり、

$$u(x, y_0) = v(x, y_0) = 0 \quad (0 \leq x \leq x_0)$$

B_2 の上では $\partial v / \partial x = 0$ である。したがって

$$\zeta(x, y_0) = -\partial u(x, y_0) / \partial y \quad (0 \leq x \leq x_0)$$

境界 B_2 の上では流線の条件式より

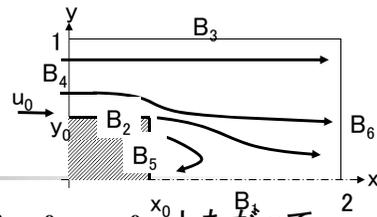
$$\psi(x, y_0) = 0$$

同じように障害物の底面 B_5 では

$$\zeta(x_0, y) = \partial v(x_0, y) / \partial x \quad (0 \leq y \leq y_0)$$

$$\psi(x_0, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq y_0)$$

境界条件3



境界 B_1 は中心線であるから、 $\partial u / \partial y = 0$, $v = 0$ したがって、
 $\zeta(x, 0) = 0 \quad (x_0 \leq x \leq 2)$

B_4 における速度の条件より
 $\psi(x, 0) = 0 \quad (x_0 \leq x \leq 2)$

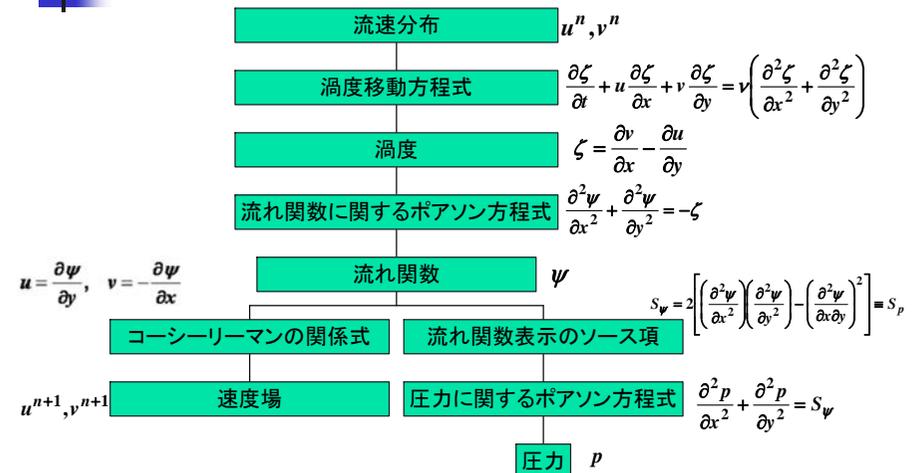
上方境界 B_3 もすべりなしの壁とした。この境界も流線であるから
 $\psi = \text{Const}$ である。 B_4 における流線の条件より

$$\psi(x, 1) = u_0(1 - y_0) \quad (0 \leq x \leq 2)$$

また、 B_2 における条件より

$$\zeta(x, 1) = \partial u(x, 1) / \partial y \quad (0 \leq x \leq 2)$$

計算フローチャート



渦度移動方程式の差分表現

渦度移動方程式のFTCS近似

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n + \Delta t (fux + fuy + visx + visy)$$

$$fux = -u_{i,j} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x}$$

$$fuy = -v_{i,j} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y}$$

$$visx = v \frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

$$visy = v \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

SOR法によるPoisson方程式の数値解析

流れ関数 ψ についてのPoisson方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

この式は連立一次方程式となる。これをSOR法で解くこととする。つまり、第k回目の反復値を $\psi^{(k)}$ とすると

$$\psi_{i,j}^{(k+1)} = \psi_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{2(1+\beta^2)} \left[\psi_{i-1,j}^{(k+1)} + \psi_{i+1,j}^{(k+1)} + \beta^2 (\psi_{i,j+1}^{(k+1)} + \psi_{i,j-1}^{(k+1)}) - 2(1+\beta^2) \psi_{i,j}^{(k)} - \Delta x^2 \zeta_{i,j}^n \right]$$

$$\beta = \Delta x / \Delta y$$

Poisson方程式の差分スキーム(1/6)

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$$

空間に中心差分近似を用いた差分方程式

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -g_{i,j}$$

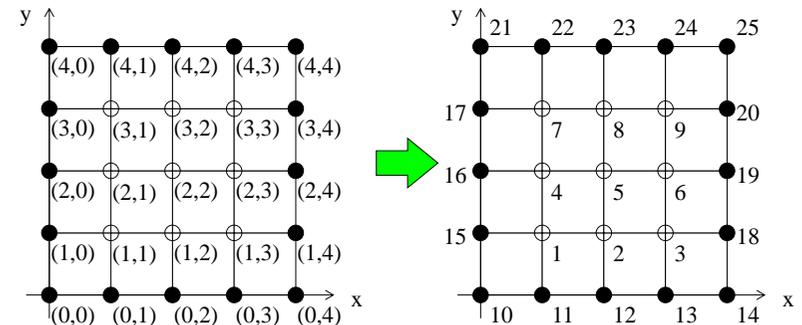
$\Delta x = \Delta y$ とする。

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 g_{i,j}$$

Poisson方程式の差分スキーム(2/6)

Natural ordering:

$u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{3,3}$ を u_1, u_2, \dots, u_9 と番号を付け直す



Poisson方程式の差分スキーム(3/6)

Natural ordering によって差分式は以下のように表すことができる

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & 4 & & & & & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & & & & \\ & -1 & & & 4 & -1 & & & & \\ & & -1 & & & 4 & -1 & & & \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & & \\ & & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & & -1 & & & 4 & \\ & & & & & & -1 & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_1 + u_{11} + u_{15} \\ \Delta x^2 g_2 + u_{12} \\ \Delta x^2 g_3 + u_{13} + u_{18} \\ \Delta x^2 g_4 + u_{16} \\ \Delta x^2 g_5 \\ \Delta x^2 g_6 + u_{19} \\ \Delta x^2 g_7 + u_{17} + u_{22} \\ \Delta x^2 g_8 + u_{23} \\ \Delta x^2 g_9 + u_{20} + u_{24} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

Poisson方程式の差分スキーム(4/6)

$$U_1 = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T, \quad U_2 = (u_4 \ u_5 \ u_6)^T, \quad U_3 = (u_7 \ u_8 \ u_9)^T$$

$$B_1 = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \quad B_2 = (b_4 \ b_5 \ b_6)^T, \quad B_3 = (b_7 \ b_8 \ b_9)^T$$

以上の置き換えによって、行列式は、以下の形に書き換わる

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \\ & A_{32} & A_{33} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

ここで

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (i,j=1,2,3: i \neq j)$$

疎な行列(Sparse Matrix)

格子分割の数: n 分割とすると

変数の数: $n \times n = n^2$

係数行列の全要素数: $n^2 \times n^2 = n^4$

非零の要素数: $(n+2(n-1)) \times n + n \times (n-1) \times 2 = (5n-4)n$

非零の要素数の割合: $(5n-4)/n^3$

n=1	100 %	$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$
n=2	75 %	
n=5	16.8 %	
n=10	4.6 %	
n=20	1.2 %	
n=50	0.1968 %	
n=100	0.0496 %	

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (i,j=1,2,3, i \neq j)$$

SOR法1

Gauss-Seidel法を書き、その左辺を仮の反復値 $\tilde{u}_i^{(k+1)}$ と見る。
すなわち、

$$a_{i,i} \tilde{u}_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{i,j} u_j^{(k)} + b_i$$

と定義する。反復値 $u_i^{(k+1)}$ は重み ω として

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \omega [\tilde{u}_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}]$$

あるいは変形して

$$u_i^{(k+1)} = (1-\omega)u_i^{(k)} + \omega \tilde{u}_i^{(k+1)}$$

ω は緩和係数と呼ばれる。

SOR法2

$\omega > 1$ を過緩和といい、 $\omega < 1$ を不足緩和という。
上式から $\tilde{u}_i^{(k+1)}$ を消去すると、

$$a_{i,i}u_i^{(k+1)} = a_{i,i}u_i^{(k)} + \omega \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}u_j^{(k)} + b_i - a_{i,i}u_i^{(k)} \right]$$

この表現をSOR法という。行列Aを分離すると、この式のベクトル形式は

$$(D - \omega)Eu^{(k+1)} = [(1 - \omega)D + \omega F]u^{(k)} + \omega b$$

である。

SOR法3

$$L = D^{-1}E, \quad U = D^{-1}F$$

と定義するとこの式は

$$u^{(k+1)} = (1 - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]u^{(k)} + \omega(1 - \omega L)^{-1}D^{-1}b$$

となる。この式を整理して、

$$u^{(k+1)} = L_\omega u^{(k)} + \omega(1 - \omega L)^{-1}D^{-1}b$$

$$L_\omega = (1 - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]$$

が反復法の行列形式による表現である。 L_ω はSOR行列と呼ばれ、 $L_{\omega=1}$ はGauss-Seidel行列を意味している。

SOR法4

$$a_{i,i}u_i^{(k+1)} = a_{i,i}u_i^{(k)} + \omega \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}u_j^{(k)} + b_i - a_{i,i}u_i^{(k)} \right]$$

この式中において

$$R = D^{-1}\omega$$

とし、右辺第2項の[]の中の1, 2, 3項は

$$b - A\tilde{u}^{(k)}$$

とかける。こうすると上式は、

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + R[b - A\tilde{u}^{(k)}]$$

よって、SOR法は残差修正法である。 → Program SOR

境界条件の差分表現1

すべりなしの壁を考える。つまり、次の条件

$$u_{i,j0} = 0, \quad v_{i,j0} = 0,$$

が指定される壁である。(ij0+1)の流れ関数 ψ_{ij0+1} を点(ij0)でTaylor展開すると

$$\psi_{i,j0+1} = \psi_{i,j0} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j0} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j0} \Delta y^2 + \dots$$

である。壁面(ij0)はひとつの流線を形成し、 $\psi_{ij0} = \text{const}$ (i=1,2,...)である。 $B_2 - B_5 - B_1$ も流線であって、この場合 $\psi_{B_2 - B_5 - B_1} = 0$ とした。

境界条件の差分表現2

すべりなしの壁では、

$$u_{i,j_0} = \partial\psi/\partial y|_{i,j_0} = 0$$

となる。しかし、y方向には流速uは分布をもつ。つまり

$$\partial^2\psi/\partial y^2|_{i,j_0} = \partial u/\partial y|_{i,j_0} \neq 0$$

である。ところで、壁面での渦度 $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ は、

$$\partial v/\partial x|_{i,j_0} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\zeta = -\partial u/\partial y$$

となる。すべりのない壁では $u_{i,j_0} = v_{i,j_0} = 0$ であるが、「渦度の生成」はある。

境界条件の差分表現3

これらの式を流れ関数をTaylor展開した式に代入すると、

$$\psi_{i,j_0+1} = \frac{1}{2}\zeta_{i,j_0}\Delta y^2 \quad \text{あるいは} \quad \zeta_{i,j_0} = 2\psi_{i,j_0+1}/\Delta y^2$$

となる。一般に壁面を点(i,w)とすると、この点の境界条件は、

$$\zeta_{i,w} = 2(\psi_{i,w+1} - \psi_{i,w-1})/\Delta n^2$$

である。ところで、壁面での渦度 $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ は、

$$\partial v/\partial x|_{i,j_0} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\zeta = -\partial u/\partial y$$

となる。すべりのない壁では $u_{i,j_0} = v_{i,j_0} = 0$ であるが、「渦度の生成」はある。ここで Δn^2 は壁面に垂直にはなれた次の格子点までの距離である。

境界条件の差分表現4

鋭い角(i_0j_0)について考える。鋭い角の流れ関数 ψ_{i_0,j_0} の評価は心配ない。鋭い角の渦度 ζ_{i_0,j_0} の指定には以下の式が用いられる。

- 不連続近似

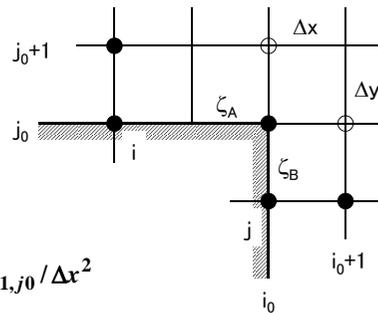
$$\zeta_A = 2\psi_{i_0,j_0+1}/\Delta y^2, \quad \zeta_B = 2\psi_{i_0+1,j_0}/\Delta x^2$$

- ψ 対称近似

$$\zeta_A = 2\psi_{i_0,j_0+1}/\Delta y^2 + 2\psi_{i_0+1,j_0}/\Delta x^2$$

- 壁面平均値近似

$$\zeta_A = \psi_{i_0,j_0+1}/\Delta y^2 + \psi_{i_0+1,j_0}/\Delta x^2$$

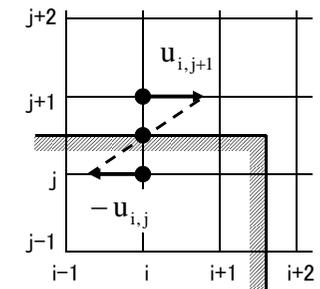


境界条件の差分表現5

右図のように格子状に壁を設定しないが点($ij+1/2$)は壁として表現可能である。この境界をすべりのない壁とする。つまり、 $u_{ij+1/2} = 0$ である。図中の u_{ij+1} に対して境界点(i,j)について、

$$u_{i,j} = -u_{i,j+1}$$

とおけば点($ij+1/2$)では $u_{ij+1/2} = 0$ となってすべりのない壁の近似となる。



時間ステップ Δt の制御法

Courant条件

$$c\Delta t / \Delta x < 1$$

拡散数の条件 (α : 拡散係数)

$$\alpha\Delta t / \Delta x^2 < 1/2$$

変係数の熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

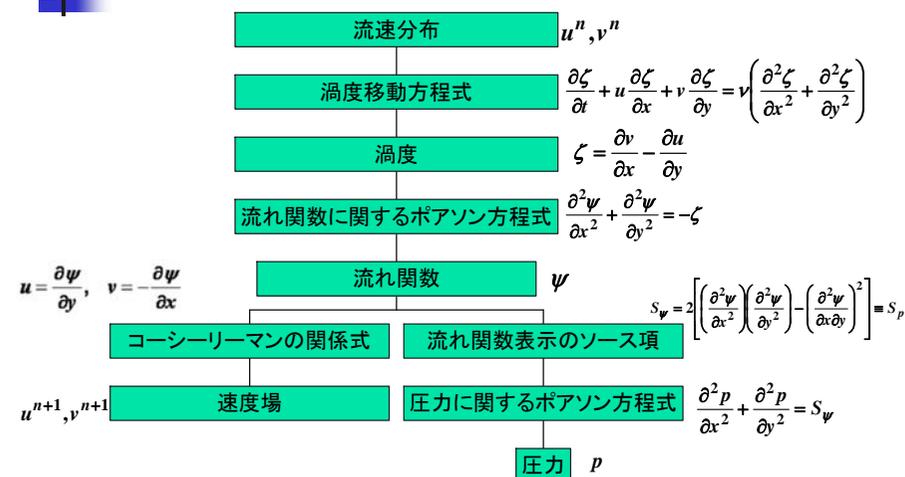
FTCSスキームの安定条件

$$\alpha(u)\Delta t / \Delta x^2 < 1/2$$

Δt_0 の決定法

$$\Delta t_0 = \left[u_0 / \Delta x + 2\nu / (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right]^{-1}$$

計算フローチャート



圧力・流速場 (u, v, p) を用いる解法

Los Alamos 国立研究所グループ T-3 (米国)

- MAC法 (Marker and Cell method): (Hallow and Welch, 1965; Welch et al., 1966)
- SMAC法 (Simplified Marker and Cell method): (Amsden and Hallow, 1970)
- FS法 (Frictional Step method または Two Step Projection method): (Kothe et al., 1992)
- HSMAC法 (Highly Simplified MAC method) または SOLA法: (Hirt et al., 1975)
- ICE法 (Hallow and Amsden, 1971)
- ALE法 (Hirt et al., 1974)
- VOF法 (Hirt and Nichols, 1981)

Imperial Collage (英国)

- SIMPLE法

基礎方程式： 連続の式と Navier-Stokes 方程式

基礎方程式

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{----- ①}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau + \vec{g} + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad \text{----- ②}$$

差分式 (流速と圧力のみを陰的に取り扱う)

$$\nabla \cdot \vec{V}^{n+1} = 0 \quad \text{----- ③}$$

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} = -\nabla (\vec{V} \cdot \vec{V})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^{n+1} + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \vec{g}^n + \frac{\vec{F}}{\rho^n} \quad \text{----- ④}$$

MAC法

差分式④の両辺の発散 (divergence, $\nabla \cdot$) をとる

$$\frac{\nabla \cdot \bar{v}^{n+1} - \nabla \cdot \bar{v}^n}{\Delta t} = -\nabla^2(\bar{v} \cdot \bar{v})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla^2 p^{n+1} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n} \right)$$

連続の式③を満足する圧力を p^{n+1} とすると、このとき

$\nabla \cdot \bar{v}^{n+1} = 0$ であるから、

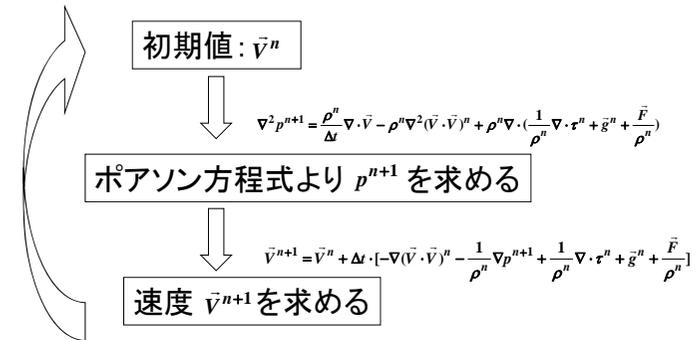
$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho^n}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{v}^n - \rho^n \nabla^2(\bar{v} \cdot \bar{v})^n + \rho^n \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n} \right)$$

時刻nにおいて、右辺は全て既知であるから、上式は p^{n+1} についてのポアソン方程式となる。一旦 p^{n+1} が求まると、

$$\bar{v}^{n+1} = \bar{v}^n + \Delta t \cdot \left[-\nabla(\bar{v} \cdot \bar{v})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^{n+1} + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n} \right]$$

より、 \bar{v}^{n+1} が決定できる。

MAC法の解法手順



SMAC法

求めるべき圧力場を $p^{n+1} = p^n + \delta p$ と分解すると、

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} = -\nabla(\bar{v} \cdot \bar{v})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla(\delta p) + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n}$$

上式を、陽的部分と陰的部分に分解する。

$$\frac{\bar{v} - \bar{v}^n}{\Delta t} = -\nabla(\bar{v} \cdot \bar{v})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^n + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n} \quad (\text{陽的部分})$$

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla(\delta p) \quad (\text{陰的部分})$$

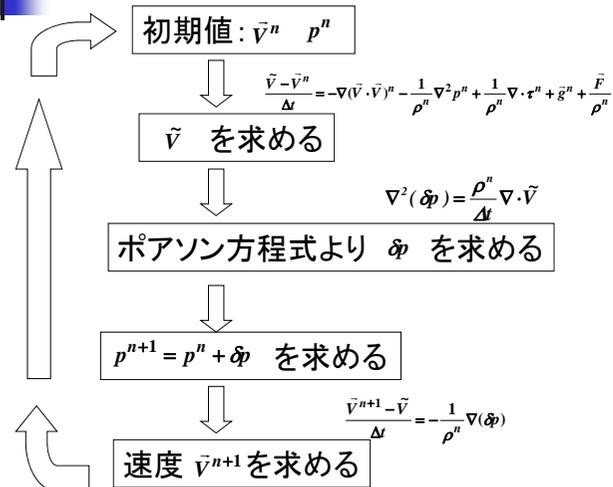
上式の両辺の発散 (divergence, $\nabla \cdot$) をとる

$$\frac{\nabla \cdot \bar{v}^{n+1} - \nabla \cdot \bar{v}}{\Delta t} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla(\delta p) \right)$$

連続の式 $\nabla \cdot \bar{v}^{n+1} = 0$ が満足される圧力を p^{n+1} とすると、

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{\rho^n}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{v}$$

SMAC法の解法手順



FS法 (Two Step Projection法)

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} = -\nabla(\bar{v} \cdot \bar{v})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^{n+1} + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n}$$

を、直接陽的部分と陰的部分に分解する。

$$\frac{\tilde{v} - \bar{v}^n}{\Delta t} = -\nabla(\bar{v} \cdot \bar{v})^n + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n} \quad (\text{陽的部分})$$

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \tilde{v}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla(p^{n+1}) \quad (\text{陰的部分})$$

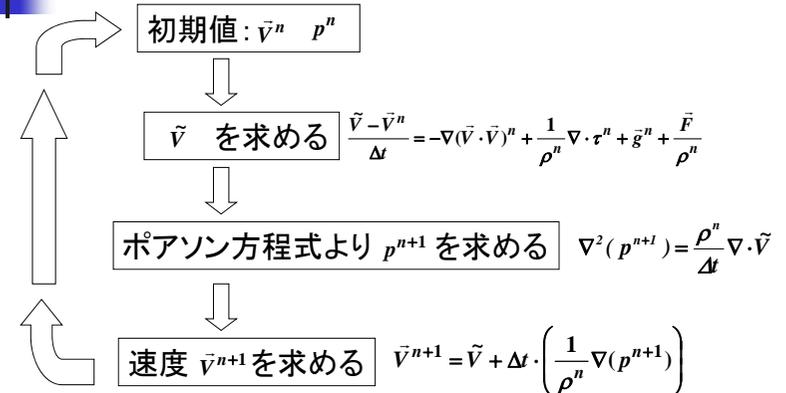
連続の式が満足されているとすると $\nabla \cdot \bar{v}^{n+1} = 0$ であるから
上式の両辺の発散 (divergence, $\nabla \cdot$) をとると、

$$\nabla^2(p^{n+1}) = \frac{\rho^n}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{v}$$

このポアソン方程式を解くことによって p^{n+1} が求まり、
最終的に、速度場が求められる。

$$\bar{v}^{n+1} = \tilde{v} + \Delta t \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla(p^{n+1}) \right)$$

FS法の解法手順



HSMAC法 (SOLA法)

セル(i,j)における発散 D_{ij} を定義する

$$D_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1})$$

これは、変数 $\{u_{i,j}^{n+1}\}$ $\{v_{i,j}^{n+1}\}$ が質量保存式を満足していない程度を表す指標となりうる。

$D < 0$ ならば、このセルに向かって正味で質量の流入が生じることに
対応し、このセルにおける圧力を低下させる必要がある。

逆に、 $D > 0$ ならば、このセルより正味で質量の流出が生じることに
対応し、このセルにおける圧力を増加させる必要がある。

このように、圧力を調整して D を0に調節すれば、最終的な速度場
が得られることがわかる。

HSMAC法 (SOLA法) アルゴリズム

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla(\bar{v} \cdot \bar{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau + \bar{g} + \frac{\bar{F}}{\rho}$$

差分式 (流速と圧力のみを陰的に取り扱う)

$$\frac{\tilde{v} - \bar{v}^n}{\Delta t} = -\nabla(\bar{v} \cdot \bar{v})^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^n + \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot \tau^n + \bar{g}^n + \frac{\bar{F}}{\rho^n}$$

$$\frac{\bar{v}^{n+1} - \tilde{v}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla(p^{n+1})$$

圧力変化分 δp が求められれば、速度場 \bar{v}^{k+1} が求められる

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{v}^{k+1} - \bar{v}^k}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla(\delta p)$$

流速の更新

$\delta p^{(k)}$ が計算されると、速度場は、

$$\frac{\vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla(\delta p)$$

より $\frac{\delta p}{\rho^n} \rightarrow \delta p$ とすると、

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$u_{i-1,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$v_{i,j}^{(k+1)} = v_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

$$v_{i,j-1}^{(k+1)} = v_{i,j-1}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

流速の更新

速度場の評価値、

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$u_{i-1,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$v_{i,j}^{(k+1)} = v_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

$$v_{i,j-1}^{(k+1)} = v_{i,j-1}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

を發散 $D_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} (u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1})$ の式に代入すると

$$\frac{\partial D}{\partial p} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u_{i,j}^{k+1}}{\partial p} - \frac{\partial u_{i-1,j}^{k+1}}{\partial p} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\partial v_{i,j}^{k+1}}{\partial p} - \frac{\partial v_{i,j-1}^{k+1}}{\partial p} \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{2\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \cdot \frac{2\Delta t}{\Delta y}$$

$$= 2\Delta t \cdot \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)$$

圧力の補正

いま、セル(i,j)における發散 $D_{i,j}$ をそのセルの圧力 $p_{i,j}$ の関数とみなすことにする。つまり、 $D_{i,j} = D(p_{i,j})$ である。 $D=0$ の根を求めるためにNewton法を用いると、

$$\delta p_{i,j} = p_{i,j}^{(k+1)} - p_{i,j}^{(k)} = -D_{i,j}^{(k)} / \left(\frac{\partial D_{i,j}}{\partial p_{i,j}} \right)^{(k)} \quad D^{(k+1)} \rightarrow 0 \quad \leftarrow p^{(k+1)} = p^{(k)} + \left(\frac{\partial p}{\partial D} \right) (D^{(k+1)} - D^{(k)})$$

ここで、kは第k番目の反復を表す。まず質量保存式をDとおき、 $u_{i,j}^{n+1}$, $u_{i-1,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j-1}^{n+1}$ を求めてから同式に代入する。求められた $D_{i,j}$ を $p_{i,j}$ で偏微分すれば次式のようなになる。

$$\delta p = -D / \left\{ 2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right\}$$

流速の更新

この式に $D^{(k)}$ を代入して $\delta p^{(k)}$ が計算されると、發散を0とすべく流速が更新される。

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$u_{i-1,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$v_{i,j}^{(k+1)} = v_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

$$v_{i,j-1}^{(k+1)} = v_{i,j-1}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

ここで加速係数を取り入れて、早く収束させる。

$$\delta p^{(k+1)} = -\omega D^{(k)} / \left\{ 2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right\} \quad (1 \leq \omega < 2)$$

対流項の差分

対流項 $f_{ux}^n, f_{uy}^n, f_{vx}^n, f_{vy}^n$

$$f_{ux}^n = \frac{1}{4\Delta x} \times \left[(u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n)^2 + \alpha |u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n| (u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n) - (u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n)^2 - \alpha |u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n| (u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) \right]$$

$$f_{uy}^n = \frac{1}{4\Delta y} \times \left[(v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n)(u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n) + \alpha |v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n| (v_{i,j}^n - v_{i,j+1}^n) - (v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n)(u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n) - \alpha |v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n| (u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n) \right]$$

対流項の差分

$$f_{vx}^n = \frac{1}{4\Delta x} \times \left[(u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n)(v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n) + \alpha |u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n| (v_{i,j}^n - v_{i+1,j}^n) - (u_{i,j-1}^n + u_{i+1,j-1}^n)(v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n) - \alpha |u_{i,j-1}^n + u_{i+1,j-1}^n| (v_{i,j-1}^n - v_{i,j}^n) \right]$$

$$f_{vy}^n = \frac{1}{4\Delta y} \times \left[(v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n)^2 - \alpha |v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n| (u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n) - (u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n)^2 - \alpha |u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n| (u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n) \right]$$

ここで重み α は、 $\alpha=0$ のときは中心差分となり差分近似の精度が高くなり、 $\alpha=1$ の時には風上差分となり安定性が確保されやすくなるという効果をもつ。

ドナー・セル差分(風上差分)

変化の激しい現象を扱う場合、

$$u_{i+1/2}^n > 0, u_{i+1/2}^{n+1} < 0 \quad \text{または} \quad u_{i-1/2}^n > 0, u_{i+1/2}^n < 0,$$

であった場合、数値的不安定性が発生しやすい。たとえば、

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x} (\rho_{i-1}^n u_{i-1/2}^n - \rho_i^n u_{i+1/2}^n) \quad (u \geq 0)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x} (\rho_{i+1}^n u_{i+1/2}^n - \rho_i^n u_{i-1/2}^n) \quad (u < 0)$$

とする。つまり流速の向きを考えてドナーが風上にいるようにする。上式では(i-1)がドナーで(i)がアクセプターとなる。この差分をドナー・セル差分という。

粘性項の差分

粘性項 f_{visx}^n, f_{visy}^n

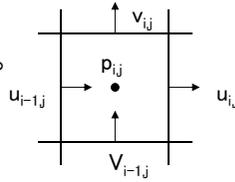
$$f_{visx}^n = \nu \left[\frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{1}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right]$$

$$f_{visy}^n = \nu \left[\frac{1}{\Delta x^2} (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) + \frac{1}{\Delta y^2} (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n) \right]$$

スタガード・メッシュ

セル(i,j)に対して、圧力をセル中心、流速はセルエッジで定義する。(スタガード・メッシュ)。
質量保存式を陰スキームで近似し、

$$\frac{1}{\Delta x} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}) = 0$$



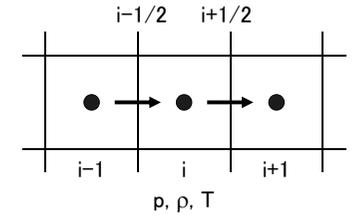
Navier-Stokes方程式を陽スキーム近似すると、

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} (p_{i,j}^n - p_{i+1,j}^n) - g_x - f_{ux}^n - f_{uy}^n + f_{visx}^n \right]$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} (p_{i,j}^n - p_{i,j+1}^n) - g_y - f_{vx}^n - f_{vy}^n + f_{visy}^n \right]$$

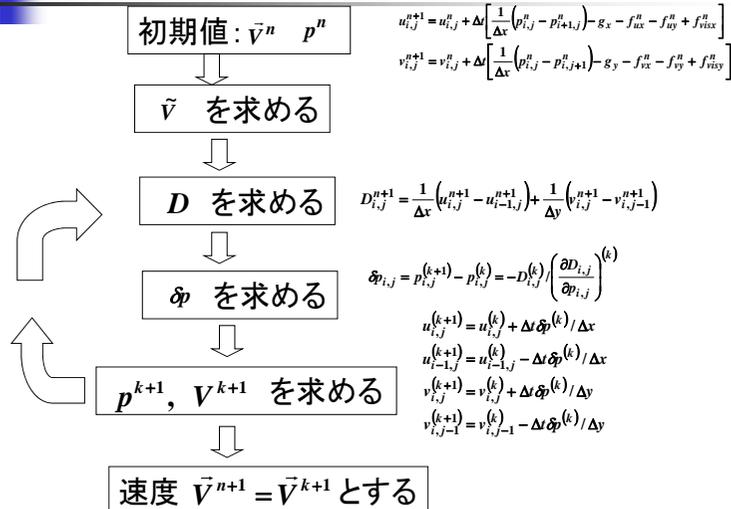
スタガード・メッシュの物理的意味

右図のように物理的考察によって初めから格子点あるいはメッシュ系をずらすものがある。圧力p、密度ρ、温度Tはセルの中心(i)で定義し、流速uはセルエッジ(i+1/2)で定義する。このようなメッシュ系をスタガード・メッシュという。



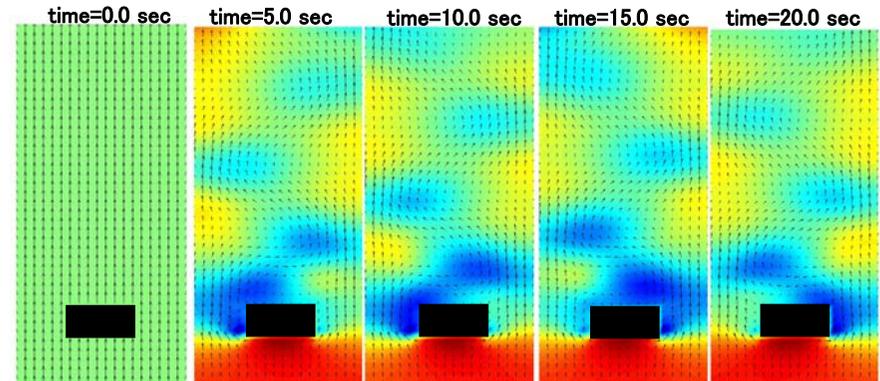
この系では物理学的直感によく訴える。圧力 p_{i-1} と p_i の圧力差によって流体運動が生じ $u_{i-1/2}$ が駆動される。また、セル中心の密度は $u_{i-1/2}$ で運び込まれる質量と $u_{i+1/2}$ で運び出される質量によって蓄積量が定まると考えたのである。

HSMAC法の解法手順



カルマン渦列の計算結果

計算条件: Inlet velocity = 15.0 cm/s
kinematic viscosity = 0.15 cm²/s
 $\Delta x=0.2, \Delta y=0.4, \text{IMAX}=20, \text{JMAX}=40$



VOF関数の輸送方程式

関数Fの時間空間での変化をセル中心で定義し、流速u、vは、セルエッジで定義するスタガード・メッシュを採用すると、VOF関数の輸送方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla F = 0$$

の差分近似は次式で与えられる。

$$F_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^n - \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} \left(u_{i+1/2,j}^n F_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n F_{i-1/2,j}^n \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(v_{i,j+1/2}^n F_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n F_{i,j-1/2}^n \right) \right]$$

上式を解くことによって、関数Fの輸送が数値的に計算される。

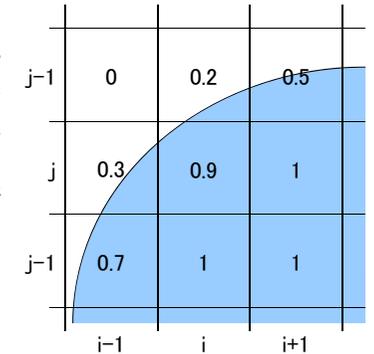
VOF法 - VOF関数

自由表面を記述する方法の1つにVOF法がある。これは、 $\Delta x \times \Delta y$ なるセル体積に占める流体体積の比率をVOF関数または単にF関数と定義して流体の領域を記述するものである。図中のセル(I,J)では流体占有率は0.7でセル(I-1,j)では0.3であると読む。表現の便利のために

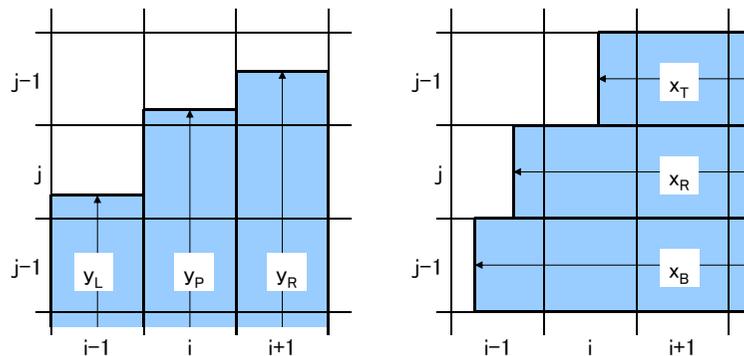
$$F_{i,j} = 0.9$$

$$F_{i-1,j} = 0.3$$

のように記す



界面位置



VOF関数による界面位置の決定

y方向の自由表面位置

$$y_p = \dots + F_{i,j-1} \Delta y_{j-1} + F_{i,j} \Delta y_j + \dots + F_{i,j+1} \Delta y_{j+1} + \dots$$

x方向の自由表面位置

$$x_p = \dots + F_{i-1,j} \Delta x_{i-1} + F_{i,j} \Delta x_i + \dots + F_{i+1,j} \Delta x_{i+1} + \dots$$

表面こう配の差分近似

$$(y_p - y_L) / \Delta x_{x-1/2}, \quad (y_R - y_p) / \Delta x_{x+1/2}$$

これらを内分すると次式のようなになる

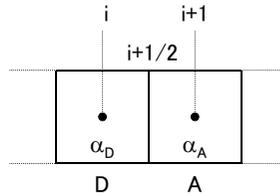
$$\frac{dy}{dx} \Big|_i = \frac{(y_R - y_p) / \left(\frac{\Delta x_{x-1/2}}{\Delta x_{x+1/2}} \right) + (y_p - y_L) / \left(\frac{\Delta x_{x-1/2}}{\Delta x_{x+1/2}} \right)}{\Delta x_{x-1/2} + \Delta x_{x+1/2}}$$

ドナーアクセプター法

関数Fを数値的に解く工夫のひとつとしてドナーアクセプター法がある。ドナーとアクセプターにおける気相と液相の割合をそれぞれ α_D 、 α_A とする。セルエッジ(i+1/2)の密度を次式のようにする。

$$\rho_{i+1/2} = \begin{cases} \rho_l & (\alpha_D = 0) \\ \rho_g \alpha_A + \rho_l (1 - \alpha_A) & (0 < \alpha_D < 1) \\ \rho_g & (\alpha_D = 1) \end{cases}$$

ここで、気相の密度を ρ_g 、液相の密度を ρ_l とした。



ドナーアクセプター法

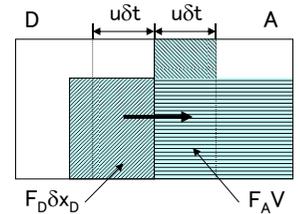
セルエッジの流速を u と表し、ドナーをD、アクセプターをAと表す。Dセルには全体 $F_D \delta x_D$ の流体がある。これを斜線を引いた長方形とする。 δt 時間にセルエッジの単位面積あたりを通過してDからAに輸送される体積Vは

$$V = u \delta t$$

である。これは点線で囲んだ領域内である。 δt 内にDからAに輸送される変数Fは

$$F_{AD} u \delta t = F_{AD} V = F_A V$$

したがって、Dセルの流体は全てAセルに輸送されずにDセルに流体が残る。

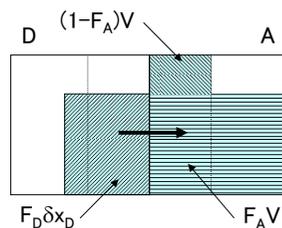


ドナーアクセプター法

右図のように $F_A V > F_D \delta x_D$ の場合、 $F_D \delta x_D$ よりも多い流体をDからAに送ることができない。そこで、輸送量は

$$F_{AD} u \delta t = F_D \delta x_D$$

となる。



ドナーアクセプター法

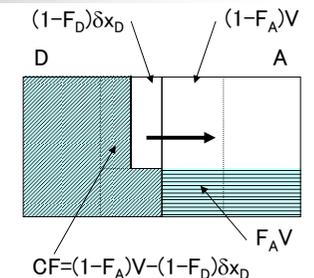
右図の場合、Dセルのボイド保有量 $(1-F_D) \delta x_D$ よりも多い $(1-F_A)V$ のボイド量がAセルに伝播され、物理的解釈から好ましくない。したがって、次式で求められる流体の量

$$CF = (1-F_A)V - (1-F_D) \delta x_D$$

を追加してAセルに輸送する。つまり δt 時間内にDからAに伝播される変数Fの量は

$$F_{AD} u \delta t = F_A V + CF$$

である。



ドナーアクセプター法

以上の式をまとめると、

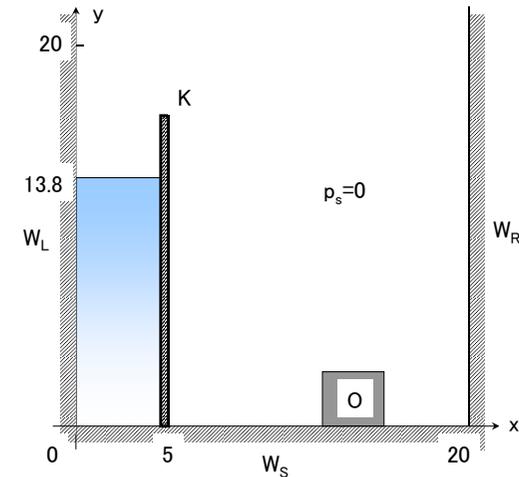
$$F_{AD}u_{i+1/2,j}\delta t = \text{sgn}(u_{i+1/2,j}) \times \min[F_{AD}|V_x| + CF, F_D\delta x_D]$$

$$V_x = u_{i+1/2,j}\delta t$$

$$CF = \max[(1 - F_{AD})|V_x| - (1 - F_D)\delta x_D, 0]$$

ここで、式の演算minはDセルが保有する流体 $F_D\delta x_D$ 以上の流体が輸送されるのを防ぎ、この式の演算maxはDセルが保有するボイド以上のボイドが輸送されるのを禁止している

壊れたダムの流れ



壊れたダムの流れ

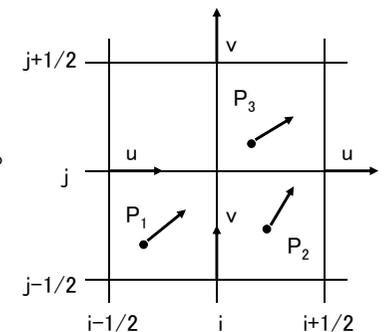
非圧縮性の流体の運動方程式を速度 u 、 v と圧力 p で記述すると、基礎式は質量保存式ならびにNavier-Stokes方程式である。図に示すように長方形 ($0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 13.8$)のようにな水が蓄えられている。 $t=0$ において板 K を瞬時に取り除く。水は形状を変化させながら下流の障害物 O を乗り越えて右壁 W_R に到達する。自由表面の変化に注目しつつ水の運動を求めよ。

この図の初期条件と境界条件を付帯させて質量保存式ならびにNavier-Stokes方程式を解け。ただし壁面 W_L 、 W_B 、 W_R と障害物 O 壁面はすべりなしの壁とする。

Program: BVOF

MAC法 (マーカーセル法)

右図に示すようにスタガードメッシュ系とし、セルエッジで流速が定義されるとする。セルの中に質量のない粒子を配置する。この粒子は流速とともに移動する。このマーカー粒子の位置と動きを点や線で描くと条痕線が得られる。その結果として表面形状が記述できる、と考えるものである。



MAC法 (マーカーセル法)

マーカー粒子の移動の計算は、セルエッジで定義された流速を内挿し、個々の粒子の速度を定めて時間積分することである。

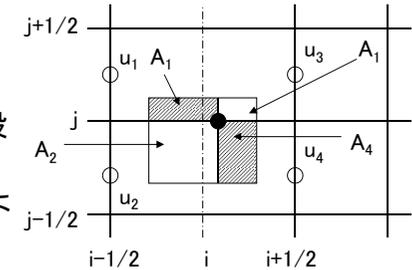
時間 $t=n\Delta t$ における第 p 番目の粒子の位置 (x_p^n, y_p^n) は、時刻 $t=0$ の初期位置 (x_p^0, y_p^0) から次式によって求められる。

$$x_p^{n+1} = x_p^n + u_p^n \Delta t$$

$$y_p^{n+1} = y_p^n + v_p^n \Delta t$$

MAC法 (マーカーセル法)

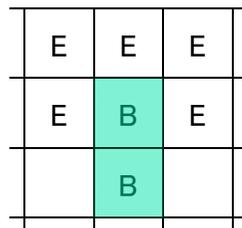
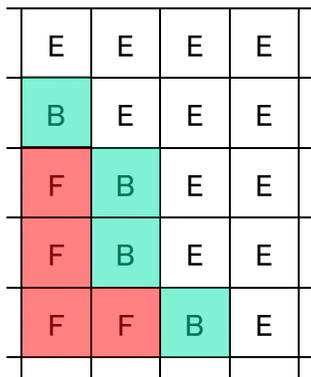
右図を元にしてマーカー粒子の流速 u_p, v_p の内挿を考える。点 $P(x_p^n, y_p^n)$ の周辺に $\Delta x \times \Delta y$ の大きさの領域を設定し、その分割領域 A_1, A_2, A_3, A_4 を重みとして次式のように2方向の線形補完して、



$$u_p = \frac{A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4}{\Delta x \Delta y}$$

のように u_p が決定される。

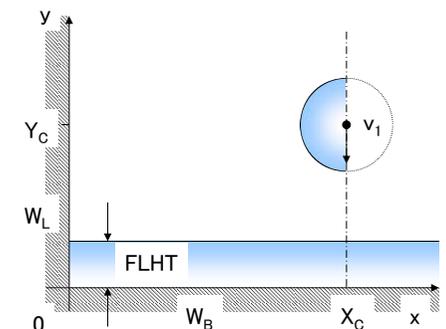
マーカーセル法におけるセルの定義



F : Full cell
E : Empty cell
B : Boundary cell

水滴の衝突

右図に示すように点 (X_C, Y_C) に半径 R の水滴が速度 $(0, v_1)$ で厚さの小さい静水に衝突する。自由表面の変化に注目しつつ過渡状態を求めよ。ただし対称の条件とし、左壁、底面はすべりなし壁とする。



Program: DROP (SMAC)