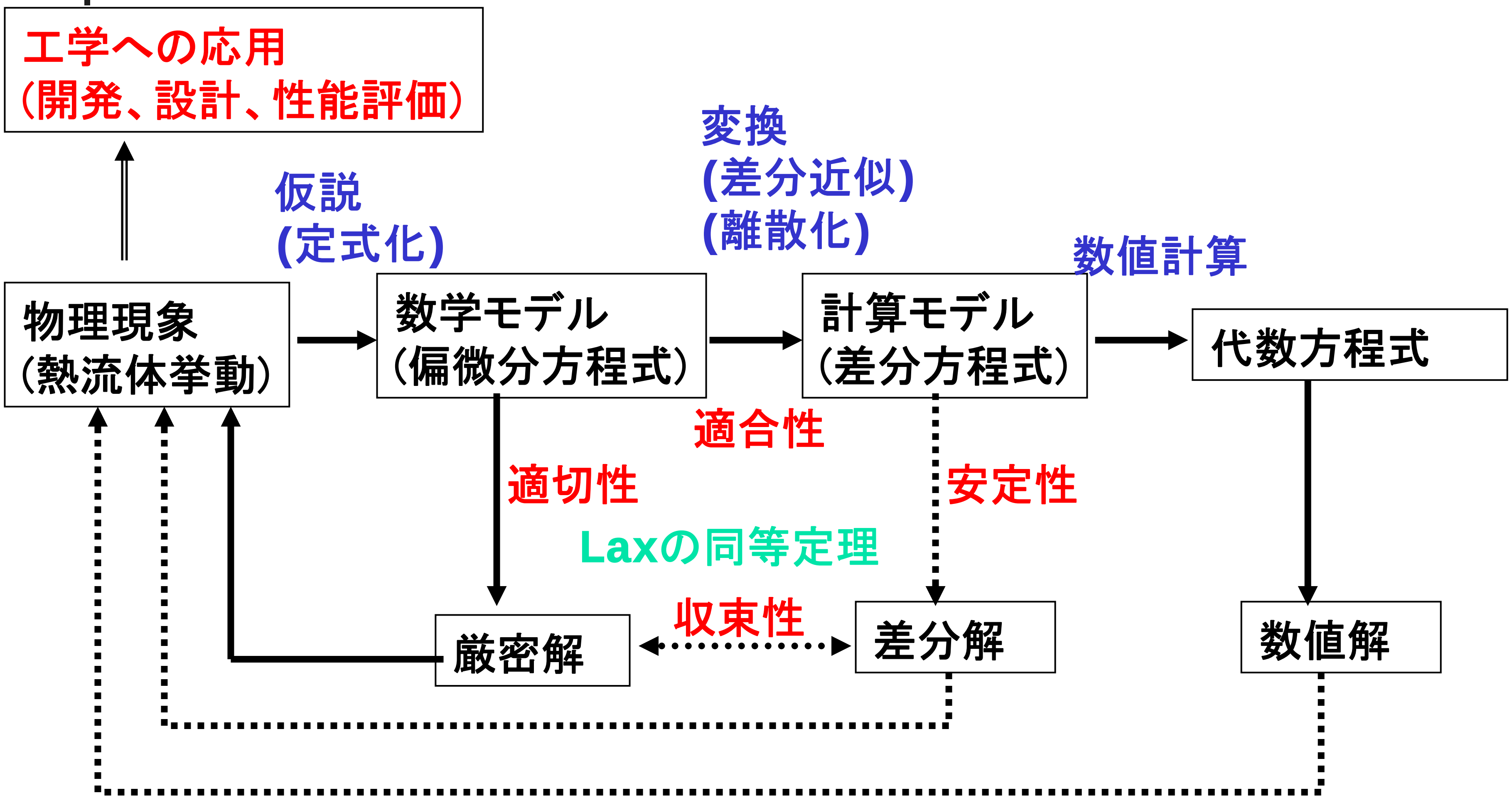
講義予定(案)

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第2章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第3章) +変換 (テキスト第4章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第5章)+連立一次方程式の解法(テキスト第6章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第7章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第7章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析 by 金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際 by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) (予備日)

第5章　計算
ー　解の精度と計算の労力のトレードオフ　ー



解の精度と計算の労力のトレードオフ

線形定常熱伝導問題

一次元Laplace方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

を境界条件

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 1$$

のもとで解く。

差分方程式

差分方程式

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \text{あるいは} \quad -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = 0$$

変域は格子間隔ΔxでI$_{m+1}$個に区切られているとする。すなわち

$$x_i = (i-1)\Delta x \quad (i = 1,2,\cdots,I_{m+2}), \quad \Delta x = \frac{1}{I_{m+1}}$$

格子点 $i = 2,3,\cdots,I_m$ は内点であり $i = 1,\quad i = I_{m+2}$ は境界点である。境界点は $u_1 = 0,\quad u_{I_{m+2}} = 1$ と指定する。

差分方程式の具体的表示

差分方程式を、境界条件を組み込んで具体的に書くと、

$$-0+2u_2-u_3=0$$

$$-u_2+2u_3-u_4=0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$-u_{I_{m-1}}+2u_{I_m}-u_{I_{m+1}}=0$$

$$-u_{I_m}+2u_{I_{m+!}}-1=0$$

差分方程式の行列表示

連立一次方程式を変数ベクトルuと定数ベクトルbを用いて行列の形に表すと

$$\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解法の手順

```
1290 '*computation
1300 '*boundary condition
1320 '*initial guess for nonlinear equation
1340 '*iteration
1360 '*specification of matrix A & vector b
1380 '*Gauss eliminator
1400 '*data shift
1420 '*plotting
1440 '*data transfer
1460 '*exact solution
1480 '*judgement of convergence
1500 '*return to matrix-specification
```

Program: SHEAT

非線形定常熱伝導問題

熱伝導率がα(u)のように温度の関数である場合の熱流束

$$q_x = -\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

熱伝導率α(u)

$$\alpha(u) = 1 + \sigma u \quad (\sigma > 0)$$

定常非線形熱伝導方程式

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\sigma u)\frac{du}{dx}\right] = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

差分方程式

差分方程式

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\chi_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}-\chi_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\right)=0$$

$$\chi_{i\pm 1/2}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sigma u_{i\pm 1}\right)+\left(1+\sigma u_i\right)\right]$$

$$u_1=0,\quad u_{I_{m+2}}=1$$

これらの式を整理すると、

$$-\chi_{i-1/2}u_{i-1}+\left(\chi_{i+1/2}+\chi_{i-1/2}\right)u_i-\chi_{i+1/2}u_{i+1}=0$$

差分方程式の行列表示

連立一次方程式を行列の形に表すと

$$A_\chi u = d, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix}^T, \quad d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \chi_{I_{m+3/2}} \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} b_2 & -c_2 & & & & & \\ -a_3 & b_3 & -c_3 & & & & \\ & -a_4 & b_4 & -c_4 & & & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & -a_{I_m} & b_{I_m} & -c_{I_m} \\ & & & & -a_{I_m+1} & b_{I_m+1} \end{pmatrix}$$

$$a = \chi_{i-1/2} \quad b = \chi_{i-1/2} + \chi_{i+1/2} \quad c = \chi_{i+1/2}$$

初期推測値

1．行列 A_x を指定するために数値解の予測値

$u_2^{(0)}, \quad u_3^{(0)}, \quad \cdots \quad u_{I_m}^{(0)}$ を設定する。

2．これより行列 $A_x^{(0)}$ が仮に定まる

3．行列式 $A_x^{(0)} u^{(1)} = d$ を解き、

解 $u_2^{(1)}, \quad u_3^{(1)}, \quad \cdots \quad u_{I_m}^{(1)}$ を求める。

4．この第k回目の手順を、$A_x^{(k)} u^{(k+1)} = d$ とする。

5．この手順を繰り返す。

6．第k回目の解$u^{(k)}$と$u^{(k+1)}$がほとんど同じであれば、
それを求めるべき解と決心する。

非線形熱伝導問題の厳密解

先の境界条件における非線形熱伝導問題の厳密解は

$$u(x) = -\frac{1}{\sigma} + \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{2+\sigma}{\sigma}x} \quad (0 \le x \le 1)$$

であるので、数値解と比較できる。

Program: SHEAT

高温の場合に熱伝導が良くなる。

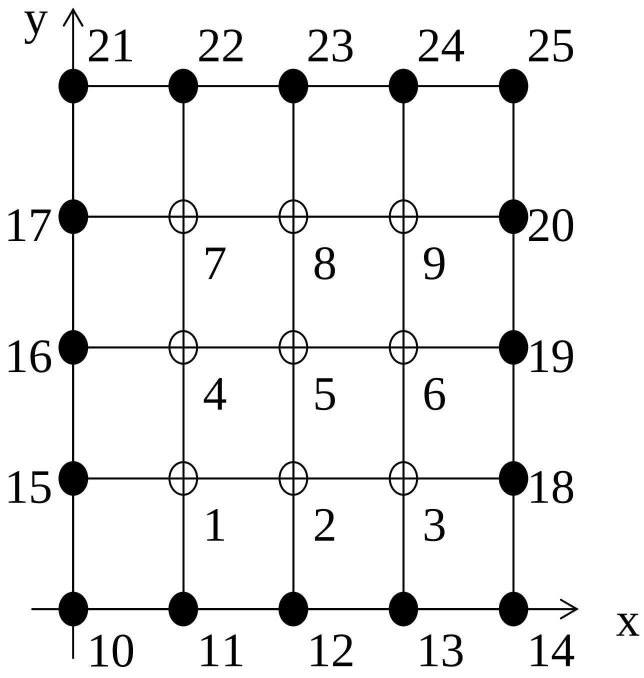
↓

X=1付近の高温領域で、温度勾配が小さくなる

Poisson方程式の数値解

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-g \quad (0\le x \quad y\le 1)$$



境界条件は、一辺が1の正方形の上でu=0とする。差分方程式は

$$-u_{i,j-1}-u_{i-1,j}+4u_{i,j}+u_{i+1,j}-u_{i,j+1}=\Delta x^2 g_{i,j}$$

ここで、Δx=Δyとした。

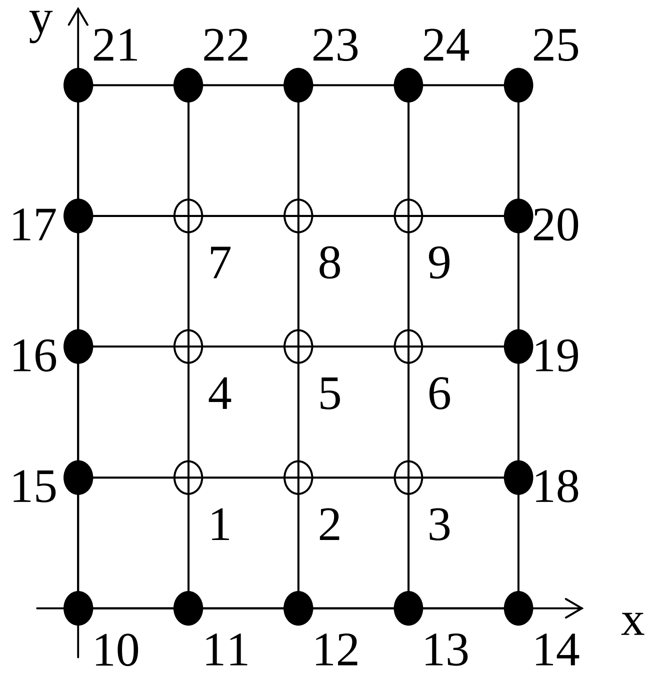
差分方程式の行列表示(1/2)

行列表示

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad (i, j = 1,2,3, \quad i \neq j)$$



差分方程式の行列表示(2/2)

行列表示

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix}^T,$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix}^T$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_1 + u_{11} + u_{15} & \Delta x^2 g_2 + u_{12} & \Delta x^2 g_3 + u_{13} + u_{18} \end{pmatrix}^T$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_4 + u_{16} & \Delta x^2 g_5 & \Delta x^2 g_6 + u_{19} \end{pmatrix}^T$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_7 + u_{17} + u_{22} & \Delta x^2 g_8 + u_{23} & \Delta x^2 g_9 + u_{20} + u_{24} \end{pmatrix}^T$$

と定義する。

Poisson方程式の厳密解

Poisson方程式の厳密解は展開項数をMEX,NEXとすると

$$u(x,y)=\frac{4g_0}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{MEX,NEX}\left(\frac{2}{(2m-1)\pi}\right)\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)\sin(2m-1)\pi x\cos(2n-1)\pi y$$

となる。

Program: POILAP

Laplace方程式の厳密解

Laplace方程式の厳密解は、

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^m\right]}{m\sinh(m\pi)}\sinh(m\pi y)\cos(m\pi x)$$

となる。

Program: POILAP

疎な行列(Sparse Matrix)

格子分割の数:　n分割とすると

変数の数:　n×n=n^2

係数行列の全要素数:　$n^2 \times n^2 = n^4$

非零の要素数:　(n+2(n-1))×n+n×(n-1)×2=(5n-4)n

非零の要素数の割合:　(5n-4)/ n^3

n=1	100 %
n=2	75 %
n=5	16.8 %
n=10	4.6 %
n=20	1.2 %
n=50	0.1968 %
n=100	0.0496 %

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad (i, j = 1,2,3, \quad i \neq j)$$

非定常の問題：　波動方程式

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

初期条件

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1/2) \\ 2(1-x) & (1/2 \le x \le 1) \end{cases}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

境界条件

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

厳密解

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 8}{\pi^2(2m+1)} \sin[(2m+1)\pi x]\cos[(2m+1)\pi ct]$$

波動方程式の数値解法

波動方程式に対するCFLスキーム

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + \lambda^2 u_{i+1}^n + 2\left(1-\lambda^2\right)u_i^n + \lambda^2 u_{i-1}^n$$

内点を $i = 2,3,\cdots,I_m - 1$ とし、境界点を $i = 1,\quad i = I_m$ とする。

境界条件

$$u_1^n = u_{I_m}^n = 0 \quad \left(n = 0,1,2,\cdots\right)$$

Program: WAVE

電信方程式

電信方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

減衰項の中心差分近似

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{2\Delta t}$$

電信方程式の差分スキーム

$$(1+\lambda\sigma)u_i^{n+1}=-(1-\lambda\sigma)u_i^{n-1}+\lambda^2 u_{i+1}^n+2(1-\lambda^2)u_i^n+\lambda^2 u_{i-1}^n$$

Program: WAVE

非定常熱伝導問題の陽解法

非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件

$$u(x,0) = 1$$

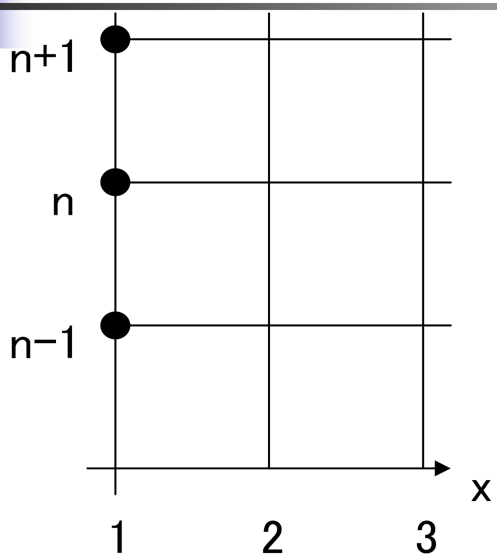
境界条件

$$u(0,t) = 0, \quad \partial u(1,t)/\partial x = 0$$

非定常熱伝導方程式に対するFTCSスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

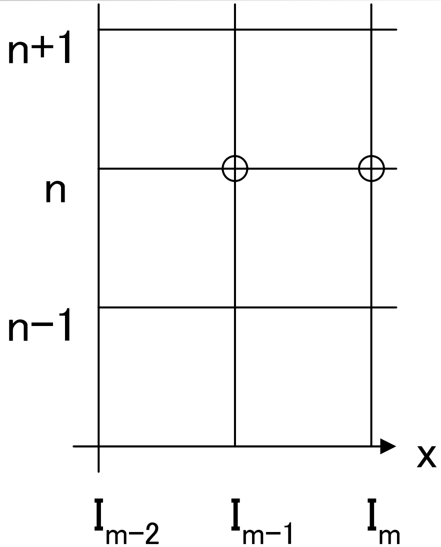
境界条件の与え方



$$u(0,t)=0$$

$$\rightarrow \quad u_1^n = 0 \qquad (n=0,1,\cdots)$$

Dirichlet条件：



$$\partial u(1,t)/\partial x = 0$$

$$\rightarrow \quad u_{I_m} = u_{I_m - 1} \qquad (n=0,1,\cdots)$$

Neumann条件：

Program: HEAT

非定常熱伝導問題の陰解法

時間に後退、空間に中心差分近似するスキーム

$$-du_{i-1}^{n+1}+(1+2d)u_i^{n+1}-du_{i+1}^{n+1}=u_i^n, \quad d=\alpha\Delta t/\Delta x^2$$

$$(i=2,3,\cdots I_m-1, \quad n=1,2,\cdots)$$

境界を $i=1, \quad i=I_m+2$ とすると、点2と点I_m−1では

$$(1+2d)u_2^{n+1}-du_3^{n+1}=u_2^n+du_1^{n+1}$$

$$-du_{I_m-2}^{n+1}+(1+2d)u_{I_m-1}^{n+1}=u_{I_m-1}^n+du_{I_m+2}^{n+1}$$

この場合、 $u_1^{n+1}=u_{I_m+2}^{n+1}=0$ である。非定常熱伝導問題も定常熱伝導問題と同じく $Au^{n+1}=b \quad (n=1,2,3,\cdots)$ の形の連立一次方程式の数値解法に帰着される。

境界条件:Neumann条件

格子系は $i = 1,2,3,\cdots I_m - 1$ の格子点からなり、境界点は $i = 1,\quad i = I_m - 1$ とする。

x=0における条件: $u_1^n = 0$

x=1におけるNeumann条件: $\dfrac{u_{I_m}^{n+1} - u_{I_m-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$ あるいは $u_{I_m}^{n+1} = u_{I_m-1}^{n+1}$

i=2, I_m−1における差分スキーム

$$(1+2d)u_2^{n+1} - du_3^{n+1} = u_2^n + du_1^{n+1} = u_2^n$$

$$-du_{I_m-2}^{n+1} + (1+2d)u_{I_m-1}^{n+1} - du_{I_m}^{n+1} = -du_{I_m-2}^{n+1} + (1+d)u_{I_m-1}^{n+1} = u_{I_m-1}^n$$

Program: HEATIM

表計算ソフトによる熱伝導解析

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0	51.07237	64.4262	66.64282	65.19423	61.99906	57.19167	49.72089	37.43022	0
0	31.6532	39.86327	39.9896	36.95083	32.13504	25.61034	17.04673	4.261682	0
0	18.33154	22.32332	21.16744	17.95006	13.67962	8.787319	3.538683	0.884671	0
0	9.599884	11.13954	9.804685	7.44554	4.818129	2.370757	0.884245	0.221061	0
0	4.507474	4.936661	3.986152	2.683597	1.479724	0.668902	0.241968	0.060492	0
0	1.896977	1.953679	1.448326	0.878807	0.45038	0.195639	0.069671	0.017418	0
0	0.716155	0.697562	0.483257	0.27722	0.136799	0.058171	0.020536	0.005134	0
0	0.227735	0.213375	0.142508	0.079438	0.038443	0.016165	0.00568	0.00142	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Poisson方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$