

講義予定(案)

1. (9/2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第2章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第3章) + 変換 (テキスト第4章)
5. (10/7) 計算 (テキスト第5章) + 連立一次方程式の解法 (テキスト第6章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法 (テキスト第7章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第7章)
8. (11/4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析 by 金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際 by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) (予備日)



差分スキームを吟味するための数学的概念

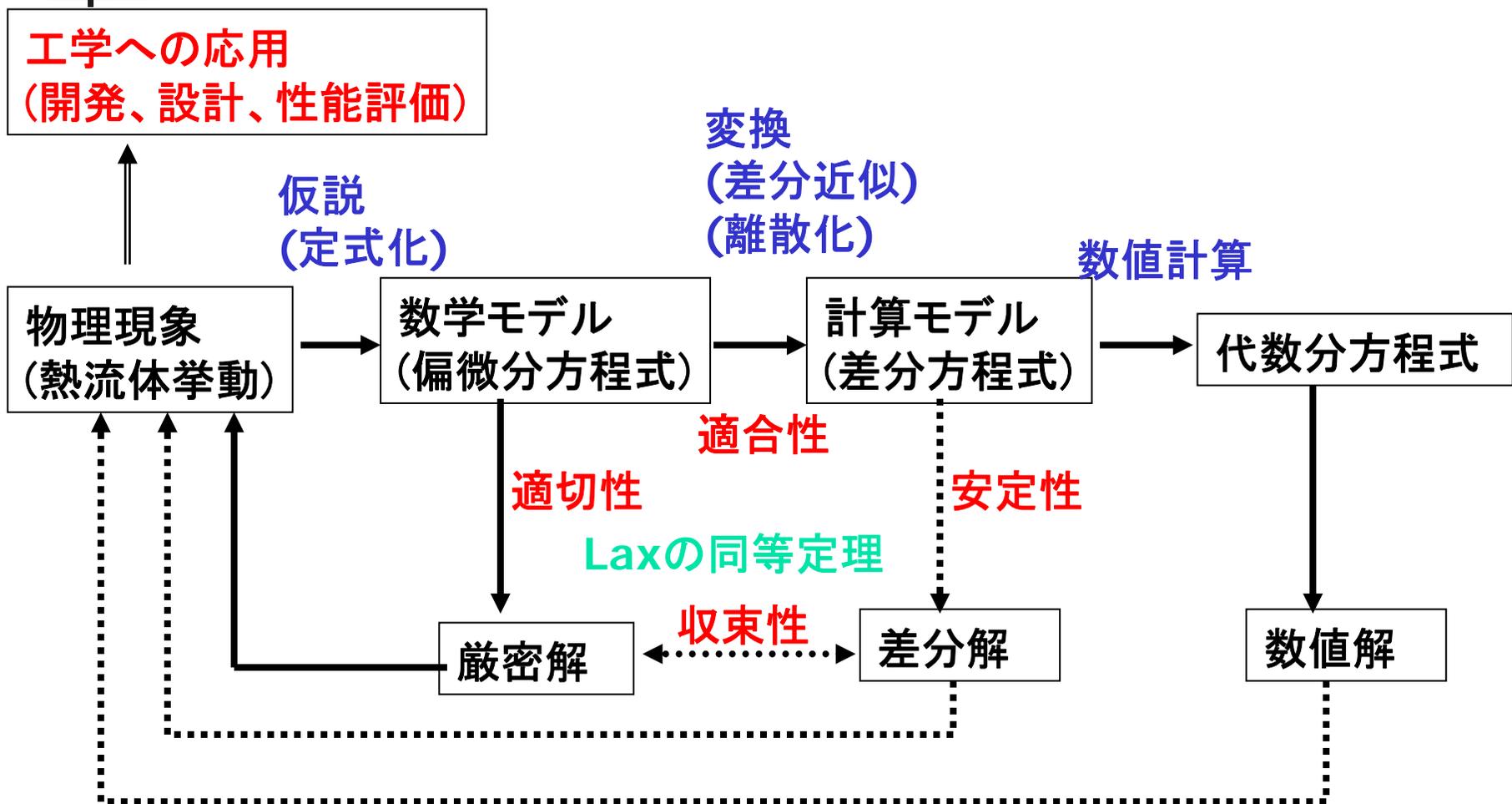
- ⌚ 適切性(well-posed)
- ⌚ 適合性(consistency)
- ⌚ 安定性(stability)
- ⌚ 収束性(convergency)

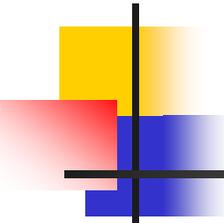


- ⌚ Laxの同等定理

「初期値問題が適切であるとき、差分スキームの差分要素が適合条件を満たしていて、安定であれば収束する。」

変換 —変化する方程式の定性的性質—





モデル問題：線形問題に対する解析例

微分方程式： $\frac{dy}{dx} = ay$ $y(0) = y_0$

厳密解： $y(x) = y_0 e^{ax}$ (適切性)

前進差分による差分表現：

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = ay_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{適合性})$$

より $y_{i+1} = (1 + \Delta x \cdot a)y_i$

$i=0, 1, 2, \dots, n$ に対して記述すると、

$$\begin{aligned} y_i &= (1 + \Delta x \cdot a)y_{i-1} \\ \cancel{y_{i-1}} &= (1 + \Delta x \cdot a)\cancel{y_{i-2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{y_2} &= (1 + \Delta x \cdot a)\cancel{y_1} \\ \cancel{y_1} &= (1 + \Delta x \cdot a)y_0 \end{aligned}$$

辺々掛け合わせることによって、 $y_i = (1 + \Delta x \cdot a)^i y_0$



モデル問題：線形問題に対する解析例

$$y_i = (1 + \Delta x \cdot a)^i y_0$$

$0 < (1 + \Delta x a) < 1$ のとき

$i \rightarrow \infty$ に対して

$(1 + \Delta x \cdot a)^i \rightarrow$ 有界 (安定性)

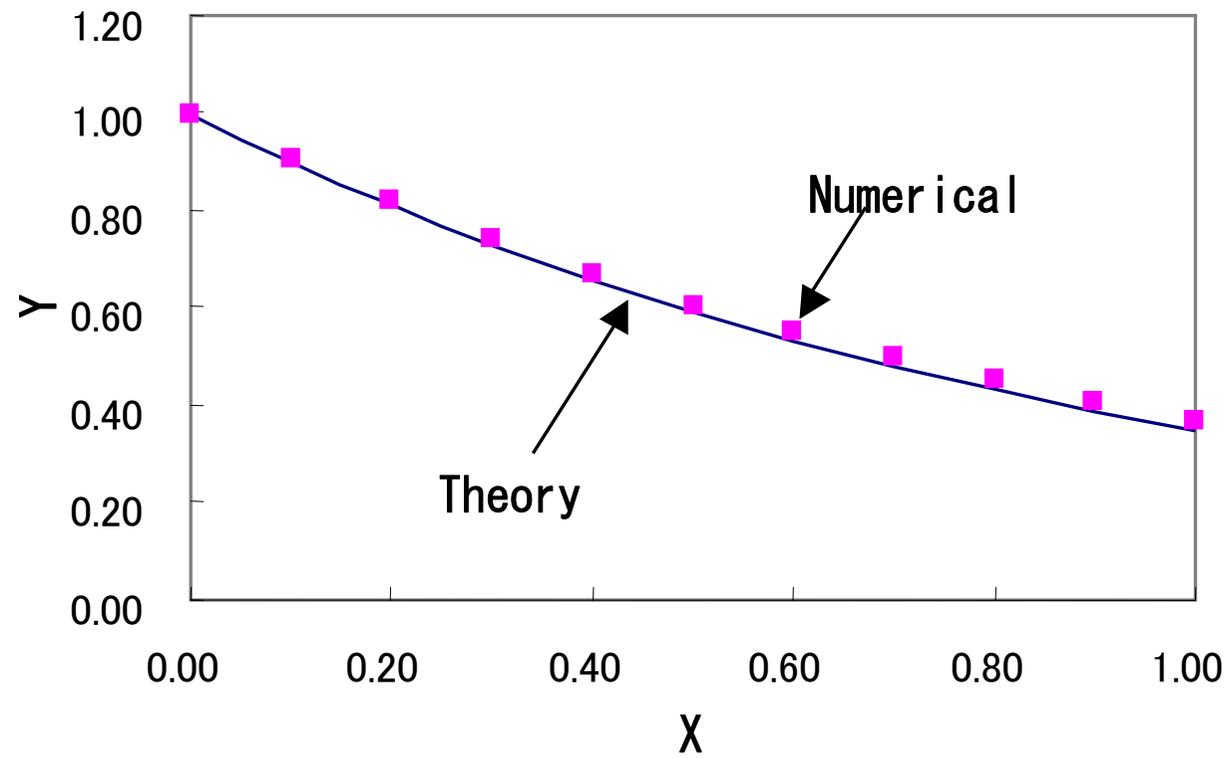
一方

$0 < \Delta x a \ll 1$ のとき $x = \Delta x \cdot i$ であるから

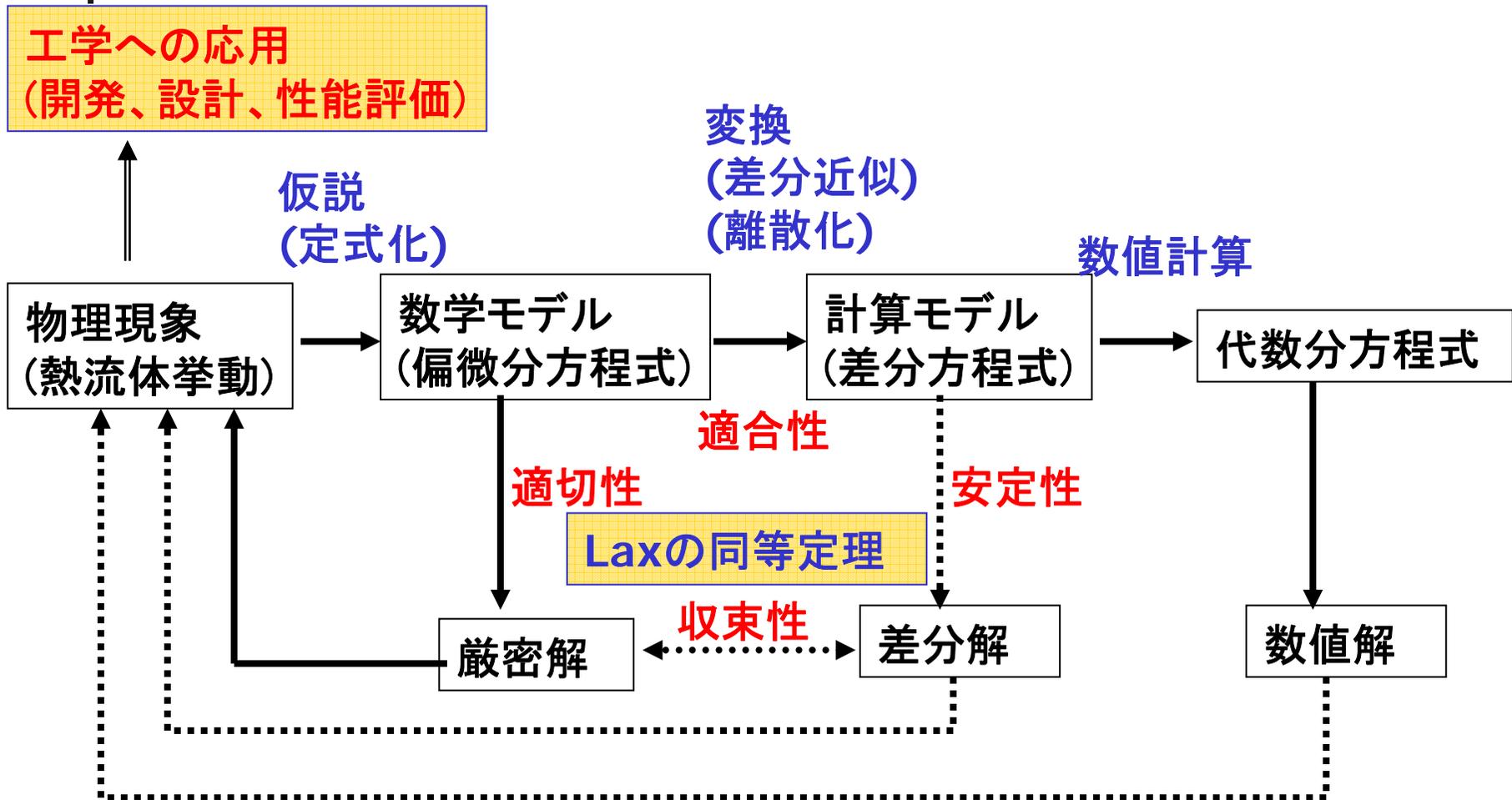
$y(x) = y_0 e^{ax}$ を $x=0$ のまわりで級数展開すると、

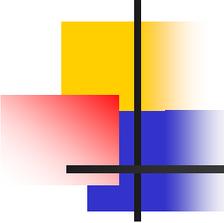
$$y(x) = y_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta x a}{1!} + \frac{(\Delta x a)^2}{2!} + \frac{(\Delta x a)^3}{3!} + \dots \right\}^i$$

数値解析結果と理論値との比較



変換 —変化する方程式の定性的性質—

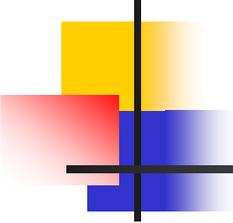




差分法方程式の適合性の評価

対流・拡散方程式について、

1. FTCSスキーム: 1次の打ち切り誤差
(打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t)$)
2. Leap Frog スキーム: 2次の打ち切り誤差
(打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t^2)$)
3. 風上差分: 1次の打ち切り誤差
(打ち切り誤差 $O(\Delta x)$, $O(\Delta t)$)



風上差分（1次の打ち切り誤差）

対流・拡散方程式について、1次の打ち切り誤差となる差分近似

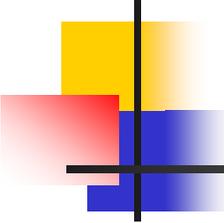
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

（打ち切り誤差 $O(\Delta x)$, $O(\Delta t)$ ）

差分スキーム：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



Leap Frog スキーム（2次の打ち切り誤差）

対流・拡散方程式について、2次の打ち切り誤差となる差分近似

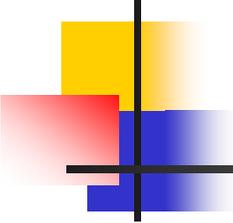
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

（打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t^2)$ ）

差分スキーム：

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + 2d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



FTCSスキーム（1次の打ち切り誤差）

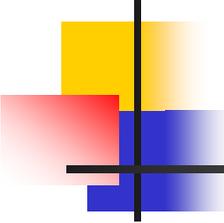
対流・拡散方程式について、FTCSスキームを用いて差分近似する

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

差分スキーム：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2} + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

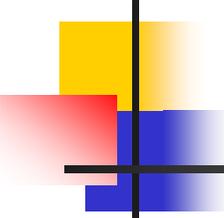


差分法方程式の適合性の評価

対流・拡散方程式について、

- | | | |
|--------------------------|---|-----|
| 1. FTCS: 1.5次の打ち切り誤差 | ⇒ | 不安定 |
| 2. Leap Frog : 2次の打ち切り誤差 | ⇒ | 不安定 |
| 3. 風上差分: 1次の打ち切り誤差 | ⇒ | 安定 |

Program: ADVDF1



動的不安定性と静的不安定性

拡散・対流方程式に対するFTCS近似

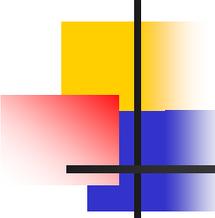
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

この方程式の解に「ゆらぎ」が含まれているとする。時刻nの解をゆらぎのない差分解 \bar{u}_i^n とゆらぎ ε_i に分ける。

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \varepsilon_i$$

この式をFTCS近似式に代入し、時刻nでゆらぎのない差分解が存在すると仮定すると、 Δt 進めたときの増分 Δu_i は

$$\Delta u_i = -\Delta t \frac{c}{2\Delta x} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}) + \Delta t \alpha \frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{\Delta x^2}$$



動的不安定性

右辺第2項のみを考える。点*i*近傍の初期摂動を

$$\varepsilon_{i-1} > 0, \quad \varepsilon_i < 0, \quad \varepsilon_{i+1} > 0, \quad \varepsilon_{i+2} < 0$$

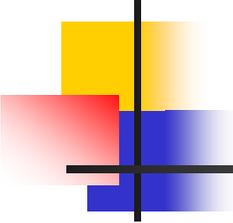
とする。この初期摂動を Δu_i の式に代入すると

$$\Delta u_i = \Delta t \alpha \frac{\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i}{\Delta x^2} > 0$$

が得られる。つまり点*i*の摂動は $\varepsilon_i < 0$ であったが $\Delta u_i > 0$ となって、時間を Δt 進めることによって摂動 ε_i を増分 Δu_i が補償する傾向になる。同様に点*i+1*における増分 Δu_{i+1} を考えると、

$$\Delta u_{i+1} = \Delta t \alpha \frac{\varepsilon_{i+2} + \varepsilon_i - 2\varepsilon_{i+1}}{\Delta x^2} < 0$$

となり、摂動 ε_{i+1} を増分 Δu_{i+1} が補償する傾向になる。



静的不安定性

右辺第1項のみを考える。点*i*近傍の初期摂動を

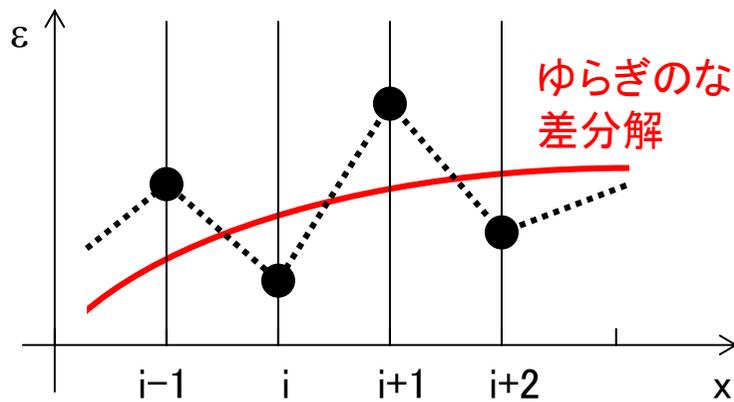
$$\varepsilon_{i-1} > 0, \quad \varepsilon_i < 0, \quad \varepsilon_{i+1} > 0, \quad \varepsilon_{i+2} < 0$$

とする。同様に、この初期摂動を Δu_i の式に代入すると

$$\Delta u_i = -\Delta t \frac{u}{2\Delta x} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}) < 0 \quad (\text{ただし、}\varepsilon_{i+1} \geq \varepsilon_{i-1} \text{)}$$

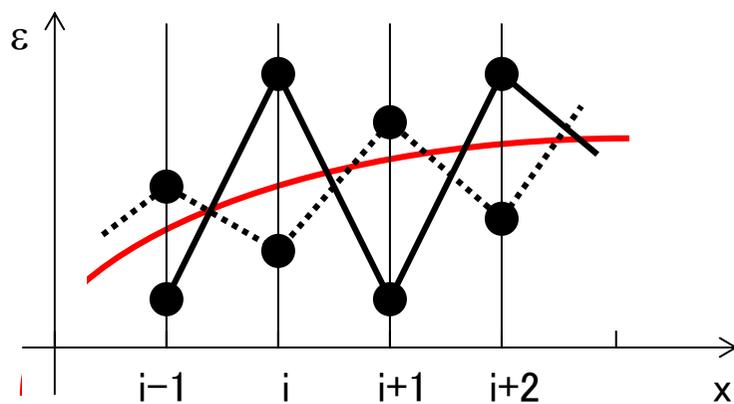
となる。つまり点*i*の摂動は $\varepsilon_i < 0$ であるのに、対流による補償 $\Delta u_i < 0$ となってしまう、摂動は単調に成長する。

動的不安定性と静的不安定性

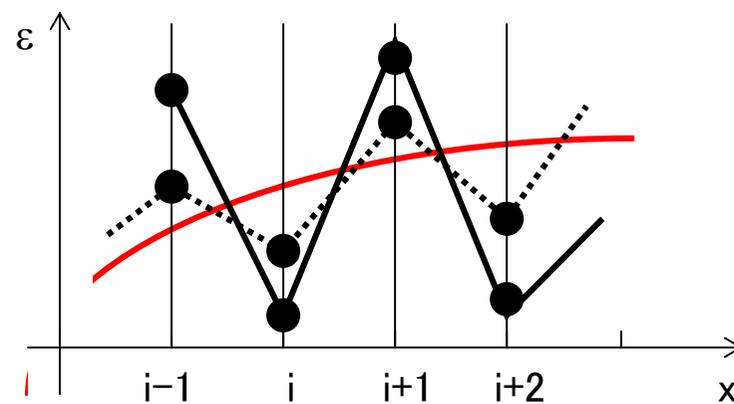


Program: ADVDF

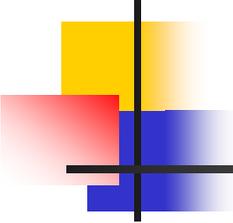
初期摂動



動的不安定性



静的不安定性



熱伝導方程式の厳密解

— モデル問題5 —

熱伝導方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

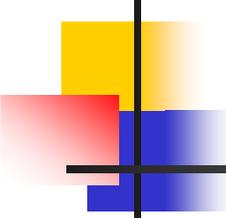
初期条件と境界条件：

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

(解)

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$



Von Neumannの安定性解析(1/4)

熱伝導方程式に対するFTCSスキーム

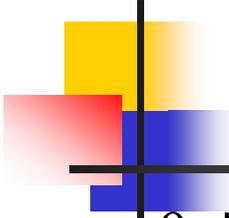
$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$d = \alpha \Delta t / \Delta x^2$$

この方程式の解のFourier級数のそれぞれの部分を次式のようにする。

$$u_i^n = V^n e^{jki\Delta x}$$

とする。Vⁿは波数がkである成分の時刻nにおける振幅関数である。jは虚数単位である。



Von Neumannの安定性解析(2/4)

$\theta = k\Delta x$ として上式を書き改めて、

$$u_i^n = V^n e^{ij\theta}$$

同様に u_i^{n+1} , u_{i+1}^n , u_{i-1}^n もそれぞれ、

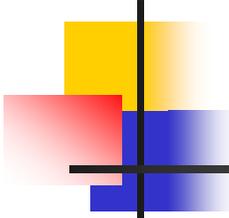
$$u_i^{n+1} = V^{n+1} e^{ij\theta}, \quad u_{i\pm 1}^n = V^n e^{(i\pm 1)j\theta}$$

これらをFTCSスキームに代入する。

$$V^{n+1} = V^n \left[1 + d(e^{j\theta} + e^{-j\theta} - 2) \right]$$

G をパラメータとすると、この式は $V^{n+1} = GV^n$ の形をしている。 G を書き改めると

$$G = 1 - 2d(1 - \cos \theta) \quad : \text{増幅行列}$$



Von Neumannの安定性解析(3/4)

熱伝導方程式のFTCSスキームが有界ならば

$$|G| \leq 1$$

が全ての θ について成立しなければならない(安定規準)。

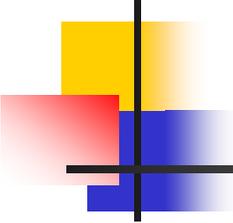
$$-1 \leq 1 - 2d(1 - \cos \theta) \leq 1$$

よって、左側の不等式の $1 - \cos \theta \leq 2$ に注意すると、

$$d \leq \frac{1}{2} \quad \text{あるいは} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

これが熱伝導方程式のFTCSスキームに対する安定性確保の条件である。ここで d を拡散数(diffusion number)という。

拡散数の条件: Program: HEAT



Von Neumannの安定性解析(4/4)

拡散数の条件についての計算例: Program: HEAT

(計算例1) 安定な条件の場合

$$\Delta x = \frac{1}{19}$$

$$\Delta t = 0.00125$$

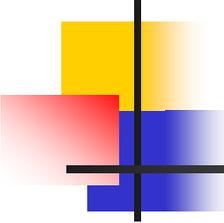
$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.4 < \frac{1}{2}$$

(計算例2) 不安定な条件の場合

$$\Delta x = \frac{1}{22}$$

$$\Delta t = 0.002$$

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.8 > \frac{1}{2}$$



安定な差分スキーム：完全陰解法

熱伝導方程式を時間に後退、空間に中心差分近似したスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$

von Neumannの安定解析を行う。

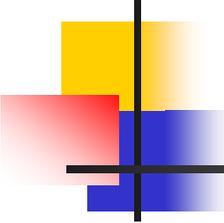
$$u_i^n = V^n e^{ij\theta}, \quad u_{i\pm 1}^{n+1} = V^{n+1} e^{(i\pm 1)j\theta}$$

これらをスキームに代入して増幅行列Gを求めると、

$$G = 1 / [1 + 2d(1 - \cos \theta)]^2$$

$d > 0$, $1 - \cos \theta \geq 0$ であることから $|G| \leq 1$ である。すなわち

この差分スキームは、どのようなdに対しても、安定である。



完全陰解法によるモデル計算例(問題5)

先の解析よりも変域の分割を多くする。
すなわち、 $i=1$ と $i=I_m$ を境界点、 $i=2,3,\dots,I_m-1$ を内点とする。
基礎式に対応する連立一次方程式は、境界条件を含めて

$$Au = b$$

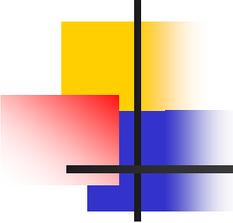
$$u = \left(u_2^{n+1} \quad u_3^{n+1} \quad \cdots \quad u_{I_m-1}^{n+1} \right)^T$$

$$b = \left(u_2^n + du_1^n \quad u_3^n \quad u_4^n \quad \cdots \quad u_{I_m-2}^n \quad u_{I_m-1}^n + du_{I_m}^n \right)^T$$

$$a_{i,i} = 1 + 2d$$

$$a_{i+1,j} = a_{i,j+1} = -d$$

Program: HEAT



完全陰解法によるモデル計算例(問題5)

完全陰解法による計算例: Program: HEAT

(計算例1) 陽解法では安定 → 陰解法でも安定

$$\Delta x = \frac{1}{19}$$

$$\Delta t = 0.00125$$

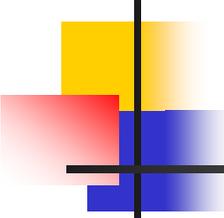
$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.4 < \frac{1}{2}$$

(計算例2) 陽解法では不安定 → 陰解法では安定

$$\Delta x = \frac{1}{22}$$

$$\Delta t = 0.002$$

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.8 > \frac{1}{2}$$



Courant条件 (1/2)

対流方程式の風上差分スキームは

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad C = c\Delta t / \Delta x$$

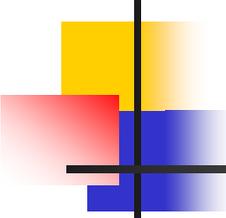
である。このスキームの安定性について吟味する。まず、数値解のFourier成分を j を虚数単位として、

$$u_i^n = V^n e^{ij\theta}, \quad \theta = k\Delta x$$

とする。この式と

$$u_i^{n+1} = V^{n+1} e^{ij\theta}, \quad u_{i\pm 1}^n = V^n e^{(i\pm 1)j\theta}$$

を上述したスキームに代入して増幅行列 G を求める。



Courant条件 (2/2)

増幅行列 G は、

$$|G|^2 = 2C(C-1)(1-\cos\theta) + 1$$

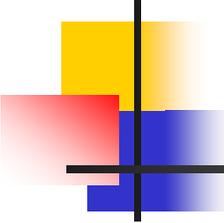
となる。von Neumannの安定性規準は任意の θ に対して

$$|G| \leq 1$$

となることである。この式において、 $C > 0$ 、 $1 - \cos\theta > 0$ であるから、この条件を満足するためには、

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

である。この条件をCourant条件という。



対流方程式の数値解の挙動 — モデル問題3 —

対流方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初期条件と境界条件:

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/5) \\ 1 & (1/5 \leq x \leq 2/5) \\ 0 & (2/5 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

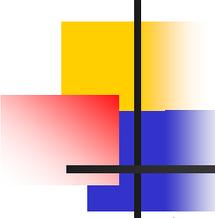
$$u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0 \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

(解)

$$u(x,t) = F(x - ct)$$



Program: ADVEX



対流方程式の数値解析結果例(1/2)

クーラン数の条件についての計算例: Program: ADVEC

(計算例1) 安定な条件の場合

$$c = 1$$

$$\Delta x = 0.025$$

$$\Delta t = 0.02$$

$$C = 1 \times \frac{0.02}{0.025} = 0.8 < 1$$

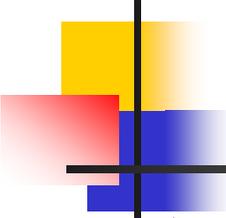
(計算例2) 不安定な条件の場合

$$c = 1$$

$$\Delta x = 0.025$$

$$\Delta t = 0.026$$

$$C = 1 \times \frac{0.026}{0.025} = 1.04 > 1$$



対流方程式の数値解析結果例(2/2)

クーラン数の条件についての計算例: Program: ADVEC

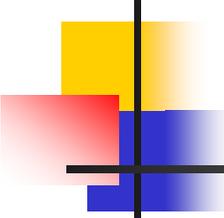
(計算例3) 厳密解と一致する場合

$$c = 1$$

$$\Delta x = 0.025$$

$$\Delta t = 0.0025$$

$$C = 1 \times \frac{0.025}{0.025} = 1$$



FTCSスキームの移動性

対流方程式のFTCSスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

摂動 ε が点 i に $\varepsilon_i = \delta$ として存在し他の全ての点では $\varepsilon = 0$ と仮定する。まず、点 $i+1$ における摂動は、

$$u_{i+1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (0 - \delta) = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \delta$$

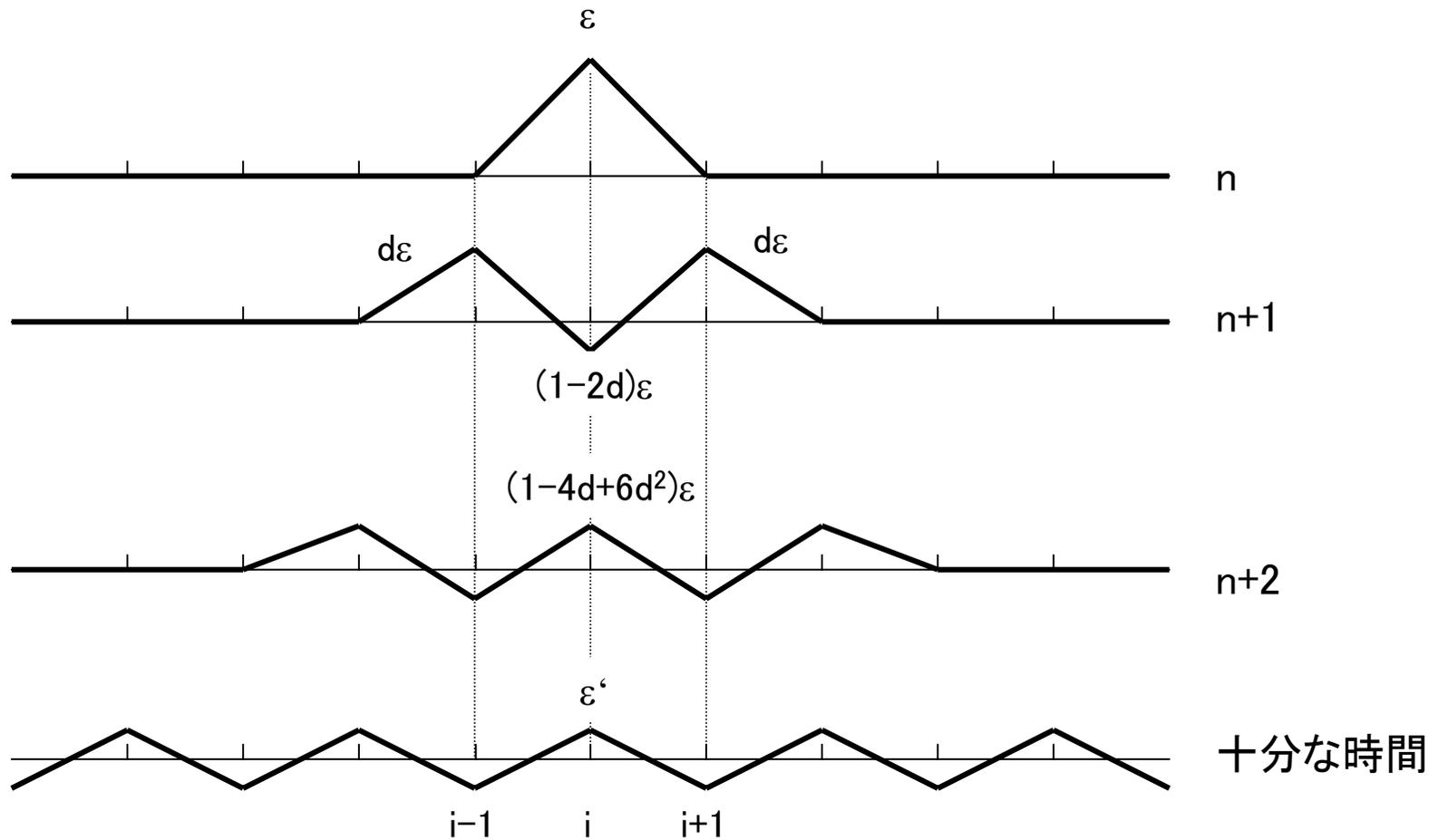
Δt の間に、対流によって摂動が下流へ運ばれている。

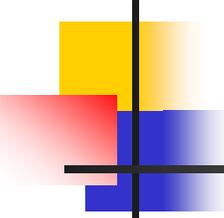
摂動の発生点 i では、 $u_i^{n+1} = \delta - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (0 - 0) = \delta$

上流点 $i-1$ では、 $u_{i-1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (\delta - 0) = -\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \delta$

摂動は上流へも運ばれている。

FTCSスキームにおける摂動の移動





風上差分スキームの移動性(1/2)

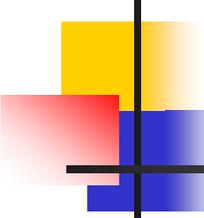
拡散方程式の風上差分スキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

この式に注目し点*i*での摂動 ε を $\varepsilon_i = \delta$ とし、他の全ての点で0と仮定する。振動発生点*i*の下流*i+1*では

$$u_{i+1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (0 - \delta) = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \delta$$

となり、対流によって摂動が運ばれている。



風上差分スキームの移動性(2/2)

摂動の発生点*i*では同じく、

$$u_i^{n+1} = \delta - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \delta$$

となる。摂動が発生した上流点*i-1*では、

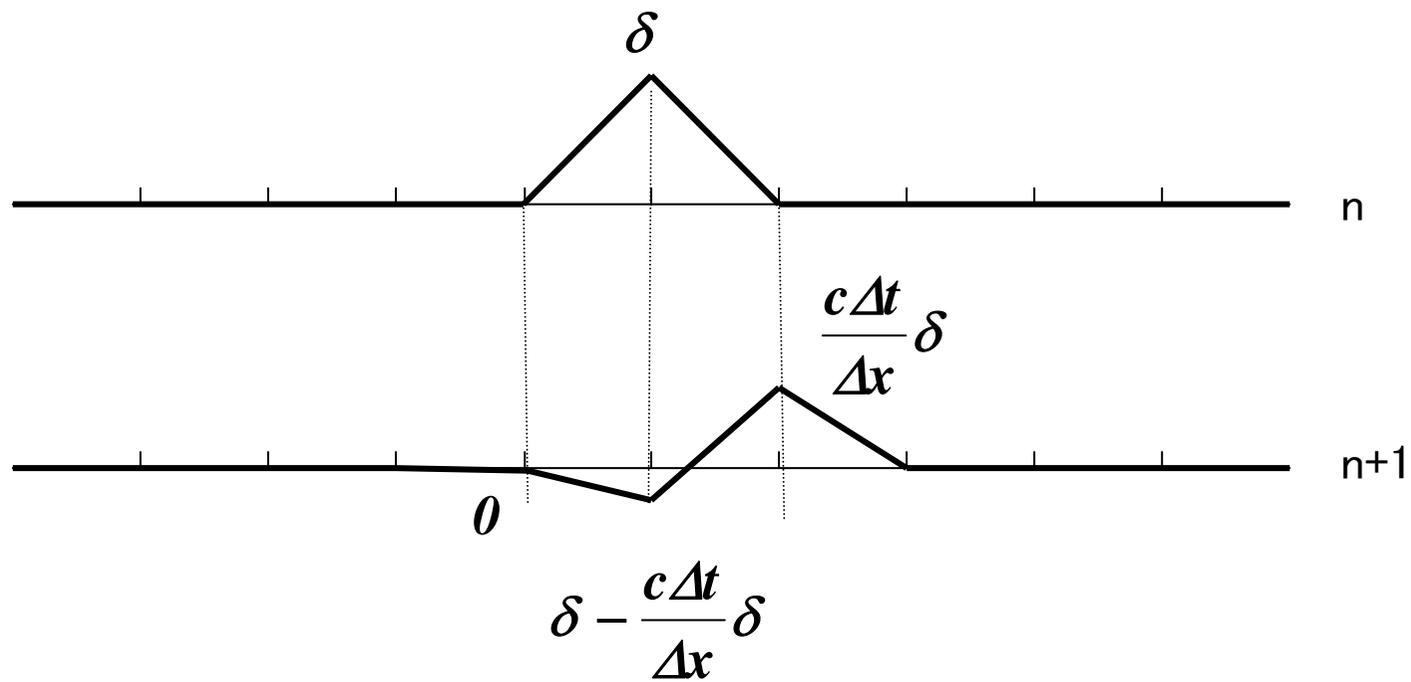
$$u_{i-1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (0 - 0) = 0$$

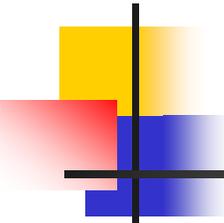
となる。摂動の発生点では、摂動が減少し、その分だけ下流の点に運ばれている。さらに上流点における摂動を調べると、対流による寄与は何もない。

すなわち、このスキームは移動性を備えている。

Program: TRANSP

風上差分スキームにおける摂動の移動





差分法方程式の移動性の評価

対流方程式について、

1. FTCS: 移動性なし

⇒ 不安定

2. Leap Frog : 移動性なし

⇒ 不安定

3. 風上差分: 移動性あり

⇒ 安定

Program: ADVDF1

FTCS (Forward-Time Centered Space) スキーム

- 差分式:

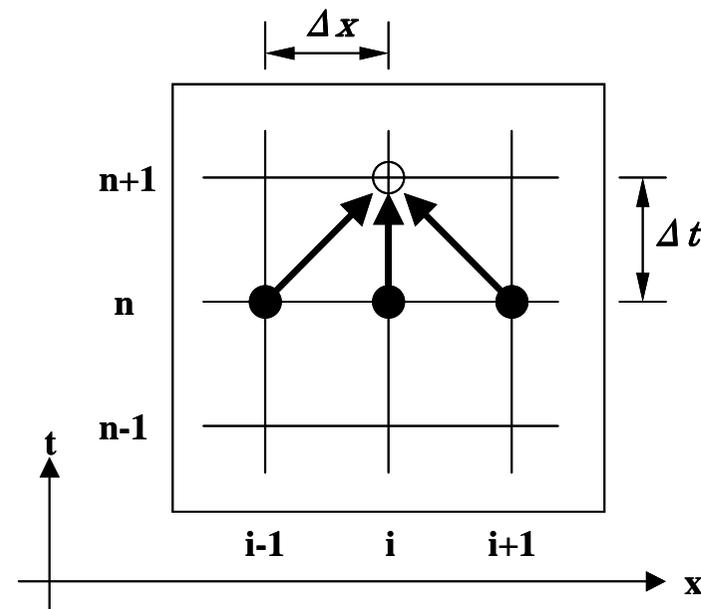
時間: 前進差分、空間: 中心差分で差分化

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- 差分解

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



蛙とび(Leapfrog)スキーム

- 差分式

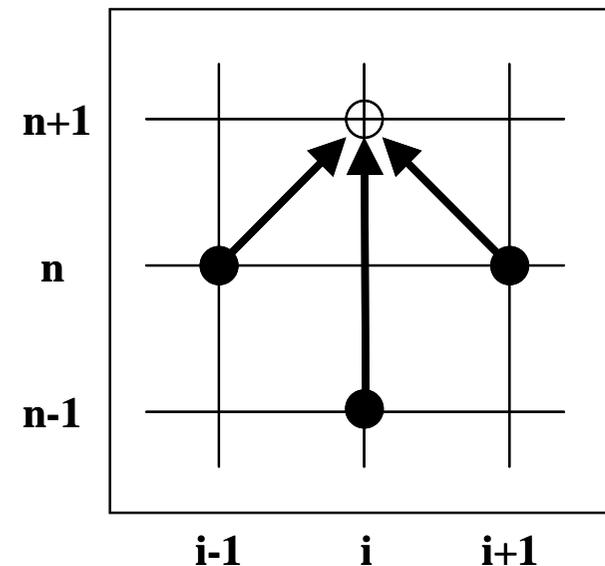
時間: 中心差分、空間: 中心差分

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

- 差分解

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$



ひし形(Rhomboid)スキーム

■ 差分式

$$\frac{\frac{1}{2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^n) - \frac{1}{2}(u_i^n - u_{i-1}^{n-1})}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

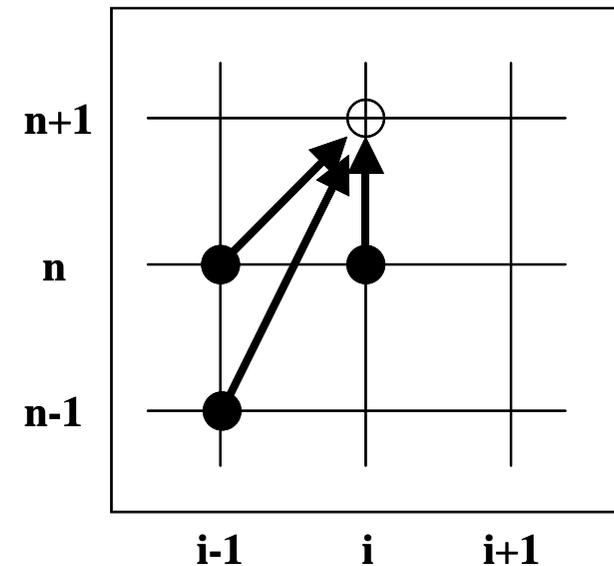
$$(u_i^{n+1} - u_{i-1}^n) - (u_i^n - u_{i-1}^{n-1}) = -2c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + u_i^n - u_{i-1}^{n-1} - 2c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + u_i^n - u_{i-1}^{n-1} - 2Cu_i^n + 2Cu_{i-1}^n$$

■ 差分解

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^{n-1} + (1 - 2C)(u_i^n - u_{i-1}^n)$$



風上 (Up-wind) スキーム

- 差分式

時間: 前進差分、空間: 風上差分 (この場合: 後退差分)

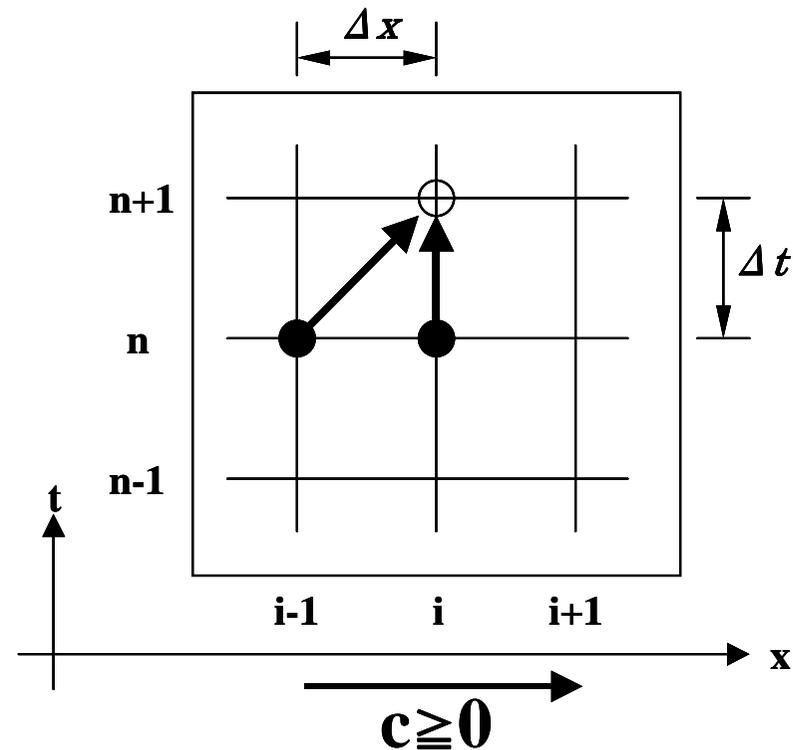
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C u_i^n + C u_{i-1}^n$$

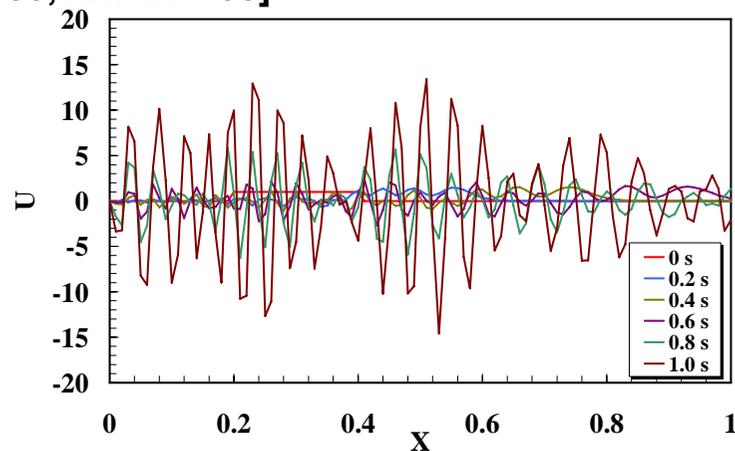
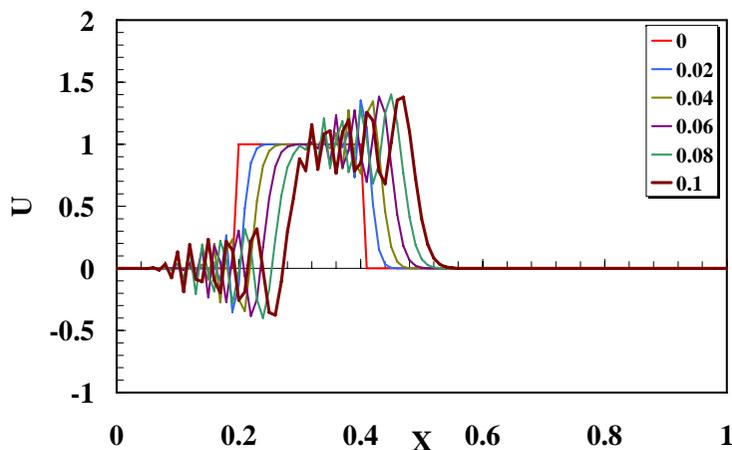
- 差分解

$$u_i^{n+1} = (1 - C) u_i^n + C u_{i-1}^n$$

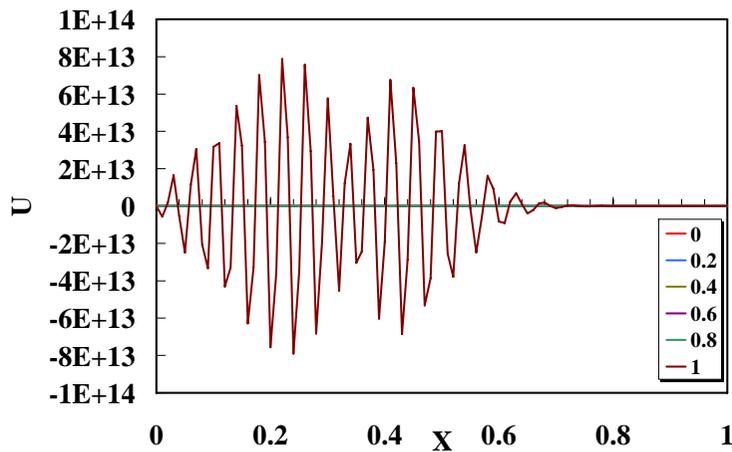


FTCS Schemeによる計算例

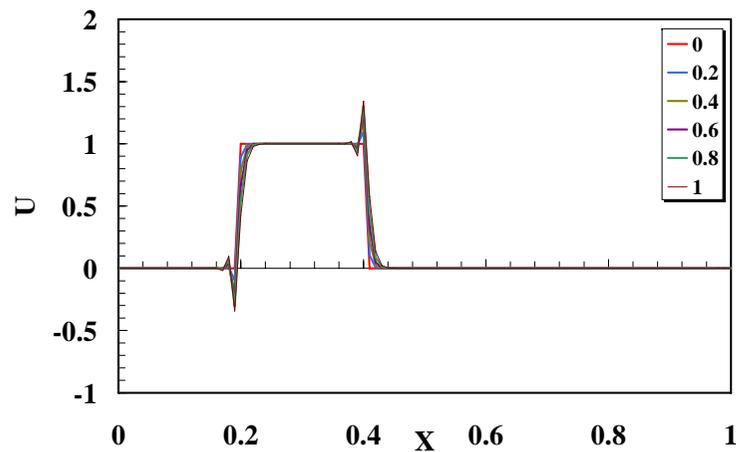
C=0.1 [c=1, TMAX=1000, XMAX=100]



C=1.0 [c=1, TMAX=100, XMAX=100]

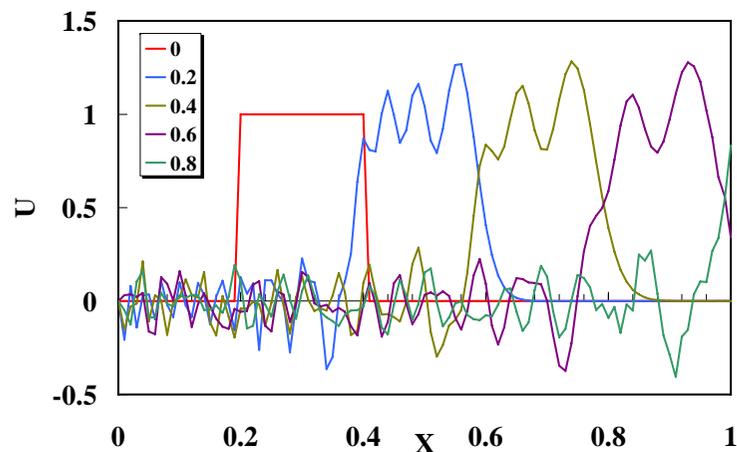
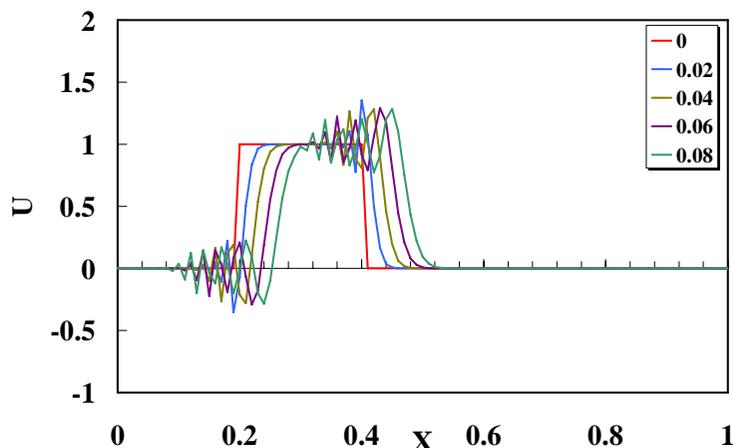


C=0.001 [c=0.01, TMAX=1000, XMAX=100]

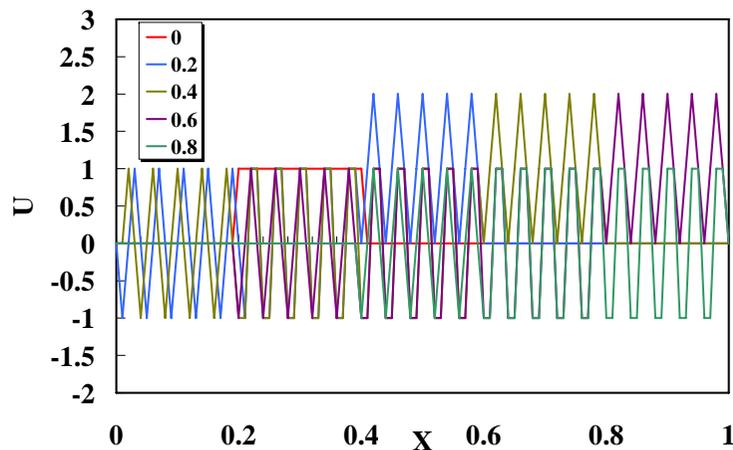


Leapfrog Schemeによる計算例

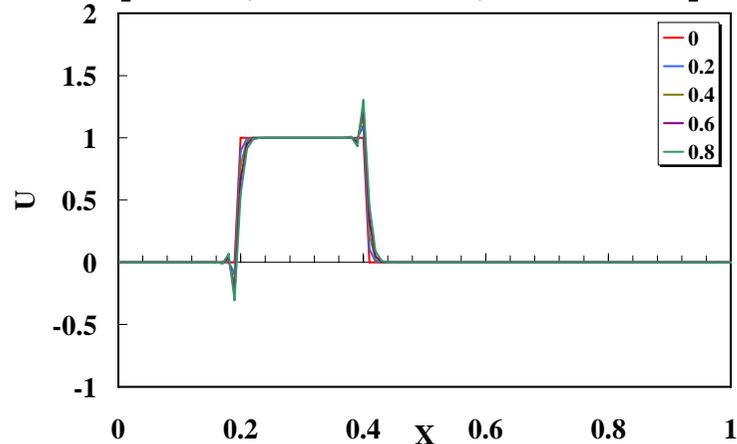
C=0.1 [c=1.0, TMAX=1000, XMAX=100]



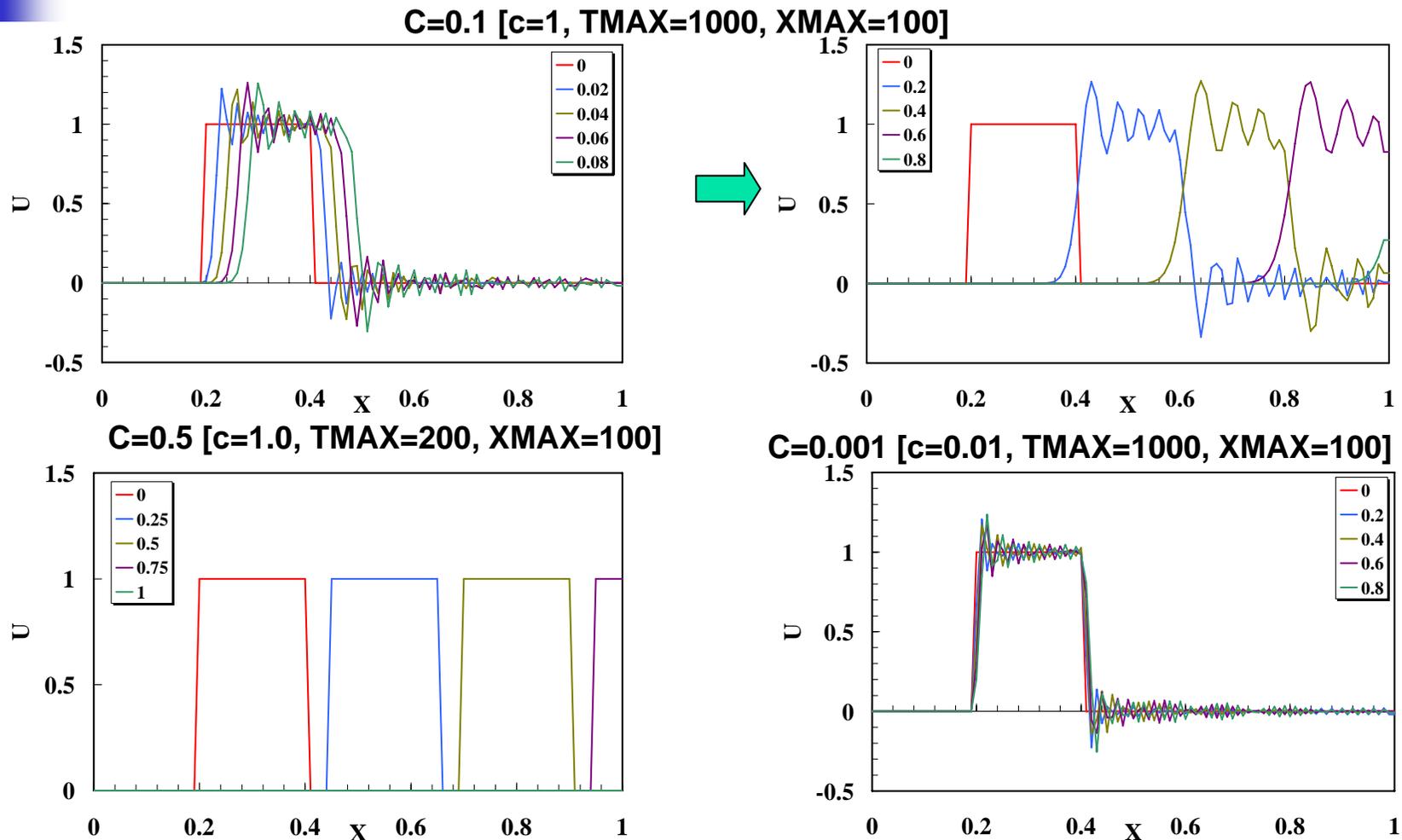
C=1.0 [c=1, TMAX=100, XMAX=100]



C=0.001 [c=0.01, TMAX=1000, XMAX=100]

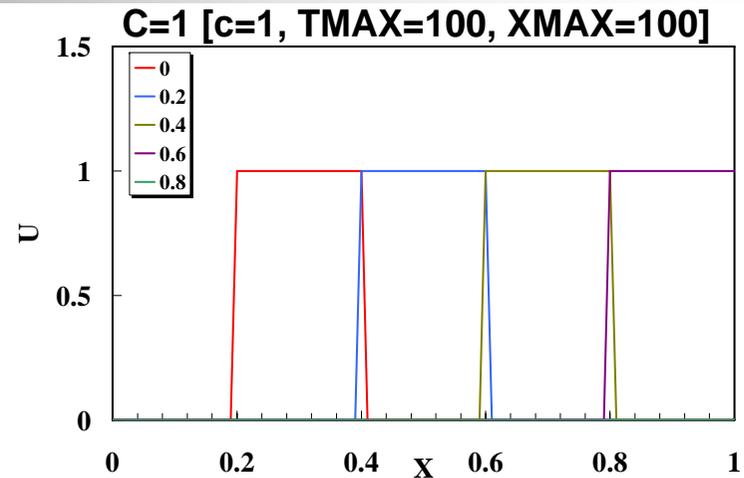
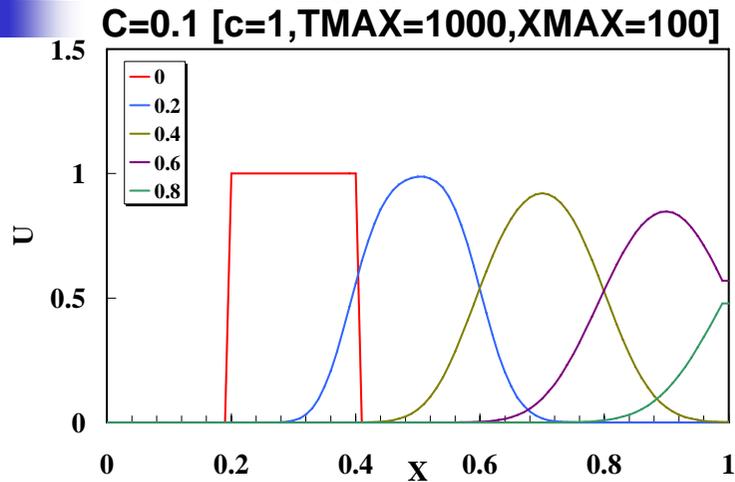


Rhomboid Schemeによる計算例

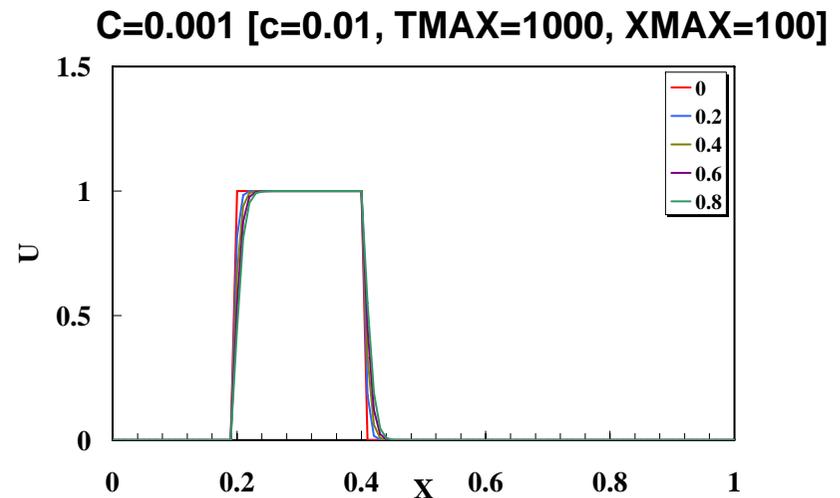
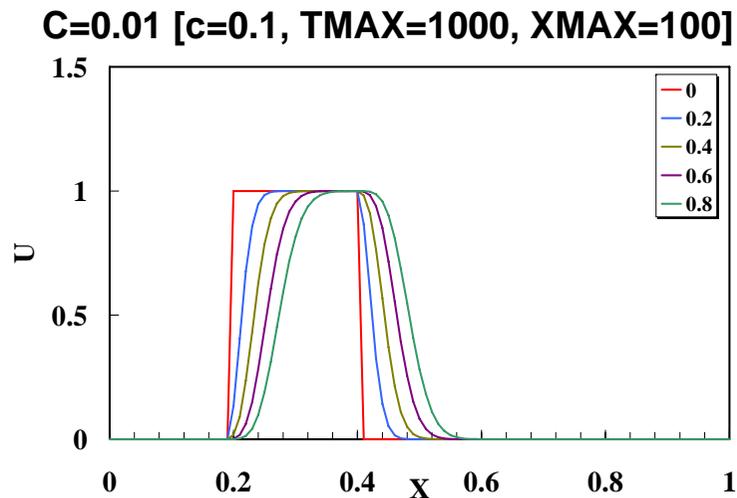


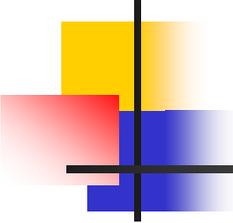
$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^{n-1} + (1-2C)(u_i^n - u_{i-1}^n) \rightarrow C = 0.5 \rightarrow u_i^{n+1} = u_{i-1}^{n-1}$$

Up-wind Schemeによる計算例



$$u_i^{n+1} = (1-C)u_i^n + Cu_{i-1}^n \rightarrow C=1 \rightarrow u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$$





Newtonの粘性則

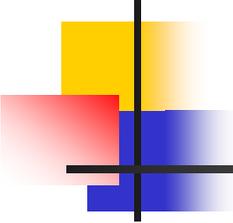
Newtonの粘性則

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy}$$

これは、流体に関する運動方程式に $\nu(\partial^2 u / \partial t^2)$ という形で記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

また、 u を濃度とみたときには $\alpha(\partial^2 u / \partial t^2)$ なる項は濃度の拡散をなしている。



人工粘性

対流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

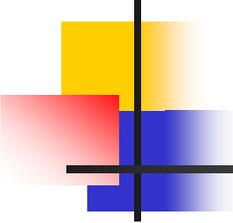
この式に対する風上差分スキームは

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

点(i,n)まわりのTaylor展開を考えると

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2$$



人工粘性

これらの式をスキームに代入し、整理すると

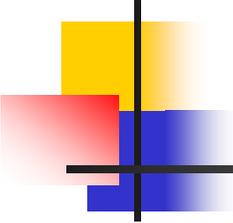
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{c\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta t}{c\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

となる。次の関係

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

から、上述の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha_e = \frac{c\Delta x}{2} (1 - C), \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



人工粘性

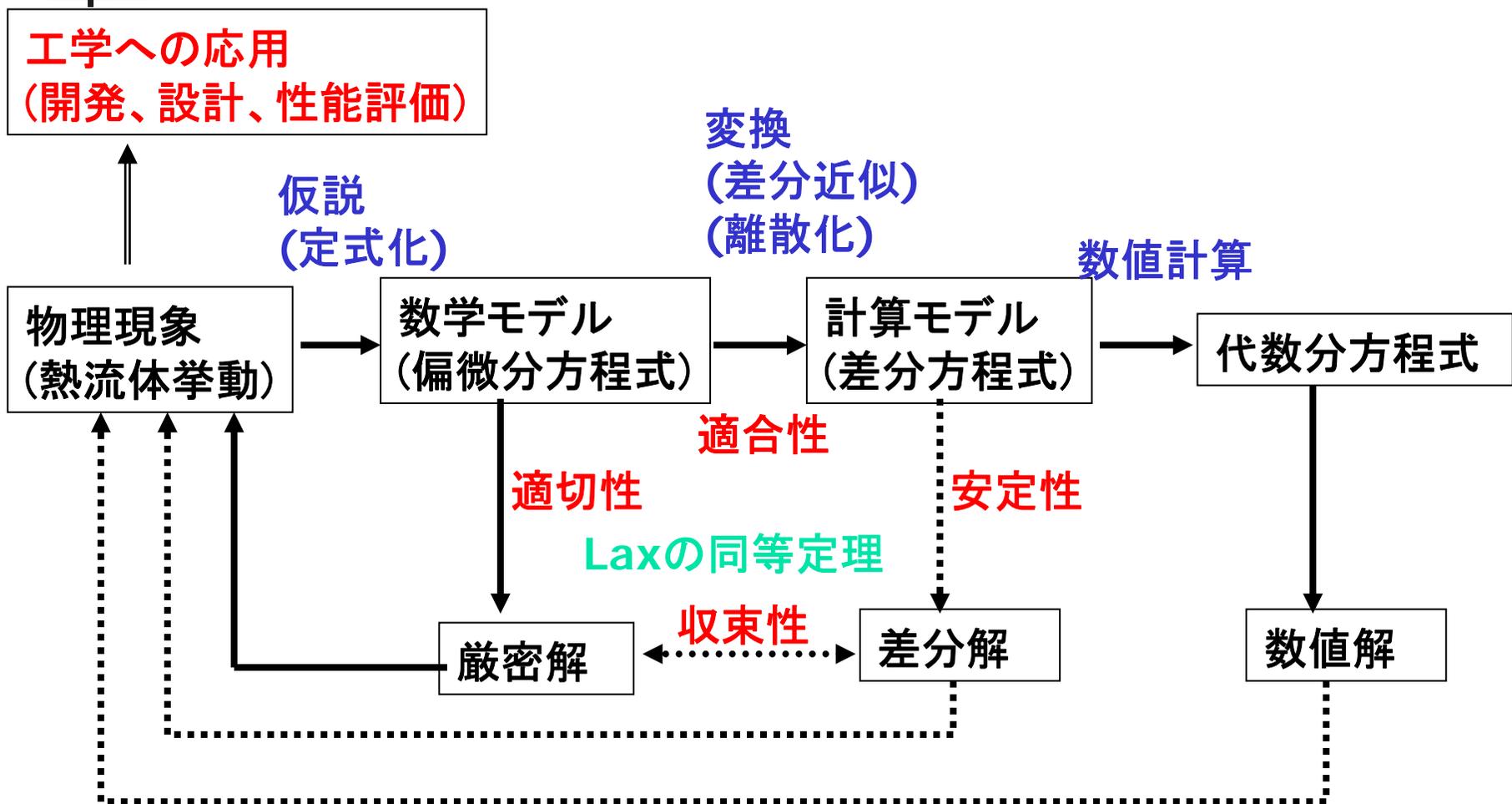
風上差分スキームによって離散化した対流方程式は、実際には、以下の式を解いていることに相当している。

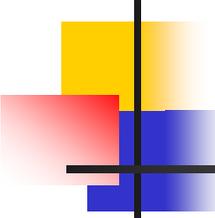
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

この式と対流方程式を比べると右辺に新たな項が誘起されている。この項は人工的な付加項である粘性としての効果を持つことがわかる。これを人工粘性 (artificial viscosity) または数値拡散と (numerical diffusion) と呼ぶ

Program: ADVEX

変換 —変化する方程式の定性的性質—





位相誤差(1/4)

対流方程式の風上差分スキームは

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

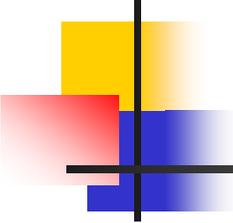
u のFourier成分 u_i^n を k を波数として

$$u_i^n = G^n e^{jkx} = G^n e^{jki\Delta x} = G^n e^{ji\theta}, \quad \theta = k\Delta x$$

とする。ここに G は増幅係数、 $k=2\pi/\lambda$ (λ : 波長) である。同様に、

$$u_{i-1}^n = G^n e^{j(i-1)\theta}$$

とする。



位相誤差(2/4)

両式を差分スキームに代入して整理するとGは

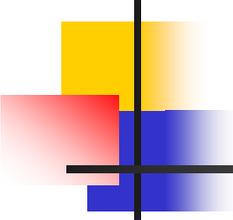
$$G = (1 - C) + C \cos \theta - iC \sin \theta$$

$$|G| = 1 - 2C(C - 1)(1 - \cos \theta)$$

となる。また位相シフト $\angle G$ は、

$$\begin{aligned} \angle G &= \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} \right] \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{-C \sin \theta}{(1 - C) + C \sin \theta} \right] \end{aligned}$$

である。ここに、 $\text{Re}(\cdot)$ と $\text{Im}(\cdot)$ はそれぞれ実数部と虚数部を示す。



位相誤差(3/4)

いま、風上スキームの数値安定性を大きくとり、しかも空間変化を可能なだけ正確に記述しようとする。つまり、

$$C \ll 1, \quad \theta = k\Delta x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \ll 1$$

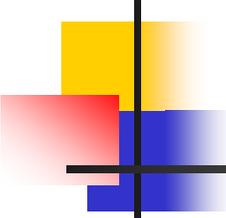
とすれば、位相シフト $\angle G$ は、

$$\angle G = -C \sin \theta = -C \sin(k\Delta x)$$

と評価される。増幅係数と位相シフトを用いて u の Fourier 成分を書くと、

$$u_i^n = |G|^n e^{-jC \sin(k\Delta x)n} e^{ikx}$$

となる。



位相誤差(4/4)

ここで、 $iC \sin(k\Delta x)n$ を変形すると、

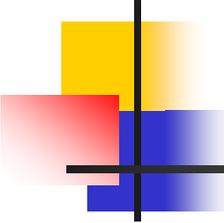
$$\begin{aligned} iC \sin(k\Delta x)n &= ik \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\sin(k\Delta x)}{k} n \\ &= ik \left[\frac{C \sin(k\Delta x)}{\Delta x} \right] n\Delta t \end{aligned}$$

となる。したがってFourier成分 u_i^n は

$$u_i^n = |G|^n e^{ik(x-C_k t)}, \quad C_k = C \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}, \quad t = n\Delta t$$

となる。この式は波数 k が大きくなると(波長 λ が短くなると)、成分の伝播速度 C_k は小さくなることを示している。

➡ 分散性(Disperse property)



対流項の差分近似(1/3)

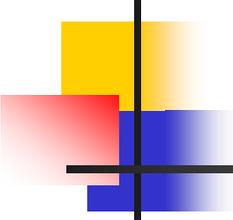
対流・拡散方程式の差分スキーム(モデル10)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Burgers方程式の差分スキーム(モデル11)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Burgers方程式の $u(\partial u / \partial x)$ の近似はいくつかの方法が考えられる。



対流項の差分近似(2/3)

Burgers方程式のいくつかの差分スキームを評価してみる。

- FTCSスキーム

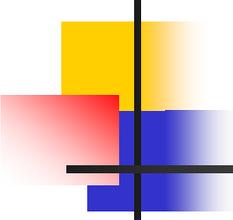
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{u_i^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

- 蛙飛びスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

- u の鋭いピークに対する緩和スキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{u_{i+1}^n + u_i^n + u_{i-1}^n}{3\Delta x} \Delta t (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$



対流項の差分近似(3/3)

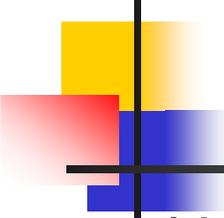
Burgers方程式では、対流項には u_j^n ($j=2,3,\dots$) のなかから適当な u_0 を代表として選び、Courant条件に準じて

$$C = f \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} < 1$$

などと Δt を設定する。しかし、安全のために安全係数 f ($0 < f < 1$) を乗ずる。あるいは、

$$C = \max_i \left| \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x} \right| \cdot f < 1$$

などとCourant数が解そのものに依存している状況を厳重に監視するなどの制御策を考える。



双曲型方程式の陰スキーム(1/3)

対流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

対流方程式を時刻 $n+1$ において、時間を後退差分近似、空間を
中心差分近似すると、

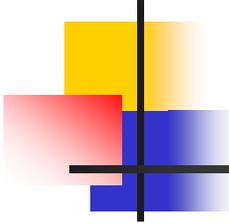
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

差分スキームを求めると

$$\frac{1}{2}Cu_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{1}{2}Cu_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

ただし、

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



双曲型方程式の陰スキーム(2/3)

内点を $i=2, 3, \dots, I_m-1$ として、

$$i=1: \quad -\frac{C}{2}u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \frac{C}{2}u_2^{n+1} = u_1^n$$

$$i=2: \quad -\frac{C}{2}u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + \frac{C}{2}u_3^{n+1} = u_2^n$$

$$i=3: \quad -\frac{C}{2}u_2^{n+1} + u_3^{n+1} + \frac{C}{2}u_4^{n+1} = u_3^n$$

$$i=i: \quad -\frac{C}{2}u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{C}{2}u_{i+1}^{n+1} = -\frac{C}{2}u_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{C}{2}\right)u_i^{n+1} = u_i^n$$

という連立一次方程式が得られる。

双曲型方程式の陰スキーム(3/3)

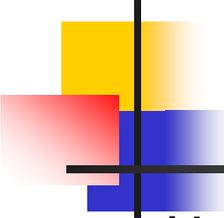
$$\begin{bmatrix}
 1 & \frac{C}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 -\frac{C}{2} & 1 & \frac{C}{2} & \ddots & & \vdots \\
 0 & -\frac{C}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{C}{2} & 0 \\
 \vdots & & \ddots & -\frac{C}{2} & 1 & \frac{C}{2} \\
 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{C}{2} & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1^{n+1} \\
 u_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_{i-2}^{n+1} \\
 u_{i-1}^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 u_1^n + \frac{C}{2} u_0^{n+1} \\
 u_2^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_{i-1}^n \\
 u_i^n - \frac{C}{2} u_i^{n+1}
 \end{bmatrix}$$

となる。これを行列表示すると、

$$A u^{n+1} = u^n$$

以上の行列の式を解いていくと、時刻 $t = n + 1$ における変位

$u_1^{n+1} \cdots u_i^{n+1}$ が求まる。



放物型方程式の陰スキーム

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

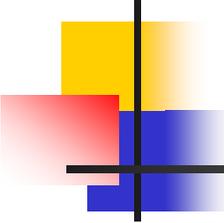
に対する陰スキームは、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}), \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

これに倣ってBurgers方程式の差分方程式を導出すると

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1 + 2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

以下同様



陽スキームと陰スキーム(1/3)

Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

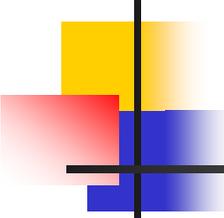
に対して、対流項を風上差分として、陰スキームとすると、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - cu_i^{n+1}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}),$$

$$c = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

である。整理すると、

$$-(cu_i^{n+1} + d)u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$



陽スキームと陰スキーム(2/3)

内点を $i=2, 3, \dots, I_m-1$ として、

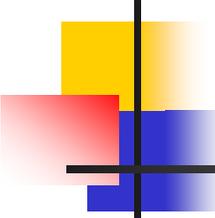
$$u^{n+1} = \left(u_2^{n+1} \quad u_3^{n+1} \quad \dots \quad u_{I_m-1}^{n+1} \right)^T,$$

$$u^n = \left(u_2^n \quad u_3^n \quad \dots \quad u_{I_m-1}^n \right)^T$$

として、この式をまとめると $A(u^{n+1})u^{n+1} = u^n$ となり、非線形代数方程式を Δt ごとに解かなければいけない。行列 $A(u^{n+1})$ は非対称行列である。

Burgers方程式の対流項を中心差分近似すると、

$$-(cu_i^{n+1} + d)u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2d)u_i^{n+1} - (cu_i^{n+1} + d)u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad c = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$



陽スキームと陰スキーム(3/3)

Δt を小さく設定するとして対流項を次式のように線形化する。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

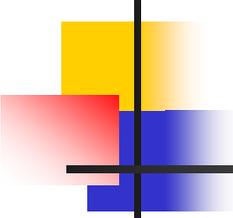
とすると、陰スキームの代替案は

$$-(cu_i^n + d)u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2d)u_i^{n+1} - (cu_i^n + d)u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad c = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

となる。これをまとめて書くと、

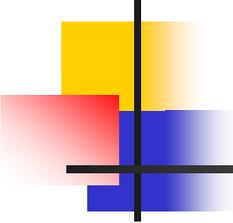
$$Au^{n+1} = u^n$$

とした連立一次方程式となる。



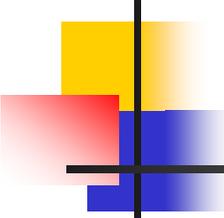
課題提出予定(案)

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/ 9) 課題(1)提出
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 課題(2)提出
5. (10/ 7) 課題(3)提出
6. (10/21) 課題(4)提出
7. (10/28) 課題(5)提出
8. (11/ 4) 課題(6)提出
9. (11/11) 課題(7)提出
10. (11/18) (課題by金子暁子先生)の提出
11. (11/25) (数値解析by渡辺正先生)の提出



提出課題(1)

- 各自が行ったことのある数値解析(流体解析に限定しない)について、その対象となった物理、基礎方程式、境界条件、数値解析手法、解析結果、(もしあれば)実験との比較、等に関して、簡潔にレポートに纏めなさい。
- もし、数値解析の経験がない場合には、数値解析に関して考えるところをレポートに纏めなさい。
- 提出期限は、次回(9/9)までとする。



提出課題(2)

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\alpha > 0)$$

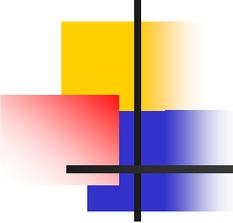
- に、次の関数を代入すると、

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int u dx\right)$$

- 以下の式が導かれることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 提出期限は、次々回(9/30)までとする。



提出課題(3)

- 以下のテンソル表現で記載されているNavier-Stokes方程式の各項の成分を書き下しなさい。

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \vec{g}$$

- ただし、 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \pi = -\mu \nabla \cdot [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$$

- 提出期限は、次々々回(10/7)までとする。

対流方程式の数値解の挙動

～スキームの選択 — モデル問題3 —

- 以下の対流方程式を

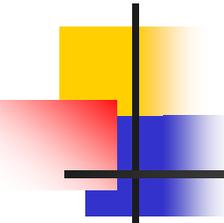
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 以下の境界条件と初期条件の下で、

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/5) \\ 1 & (1/5 \leq x \leq 2/5) \\ 0 & (2/5 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad \begin{aligned} u(0,t) &= g_0 \quad g_0 = 0 \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

- 以下の各スキームを用いて数値的に解析しなさい。
 - ・ FTCS
 - ・ 蛙とび法
 - ・ 風上差分

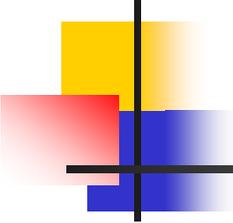
Program: ADVEC



提出課題(4)

- 前ページに指定する微分方程式を、与えられた境界条件の下で、指定する差分スキームを用いて数值的に解析しなさい。
- 提出期日： **10月21日(木)**
- 提出物は、
 - ・内容の説明したレポート
 - ・プログラムリスト
 - ・解析結果(数値出力、作図結果)

以上の全てを、A4レポート用紙ならびに電子媒体(CD)の両方により提出すること。



提出課題(5)

以下のPoisson方程式を、中心差分近似を用いた差分方程式とした上で、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$$

5×5に分割された空間に対して、周囲境界を既知のものとするとき得られる9元連立一次方程式を、Natural orderingによって書き下しなさい。

提出期日: **10月28日(木)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

提出課題(6)

- 対流方程式に対する以下のスキームの安定性を、Neumannの安定解析により判定せよ。提出期日：11月4日(木)

- FTCSスキーム:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

- 蛙とび法 (Leap frog scheme)

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

- 風上差分 (Upwind scheme)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad C \geq 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad C \leq 0$$

- 陰解法 (Implicit scheme)

$$\frac{1}{2} \alpha u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

提出課題(7)

- 熱伝導方程式に対する以下のスキームの安定性を、Neumannの安定解析により判定せよ。提出期日: **11月11日(木)**

- FTCSスキーム:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad d = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

- Richardson法

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + d(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

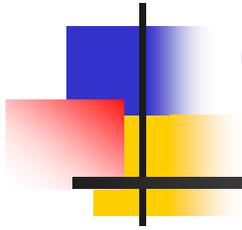
- 蛙とび法 (Leap frog scheme, DF法)

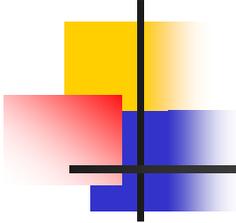
$$u_i^{n+1} = \frac{1}{1+2d} \left[2d(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + (1-2d)u_i^{n-1} \right]$$

- 陰解法 (Implicit scheme)

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

数値流体解析の基礎方程式 のベクトル・テンソル表示





Navier-Stokes方程式

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \vec{g}$$

ここで

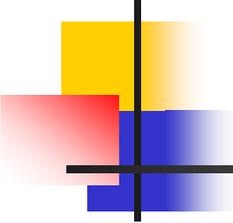
$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

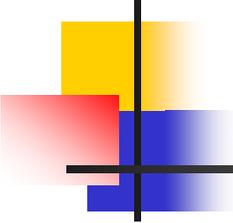
$$\nabla \cdot \pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$



せん断応力テンソルの成分

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v}) \\ \tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v}) \\ \tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v}) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$



速度勾配のテンソル表現

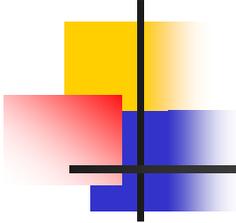
$$\nabla \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

速度勾配のテンソル表現

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_x)}{\partial z} \\ \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_z)}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_x)}{\partial z} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] v_x \\ \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_y)}{\partial z} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] v_y \\ \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z v_z)}{\partial z} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] v_z \end{pmatrix}^T \\
 &= \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}
 \end{aligned}$$

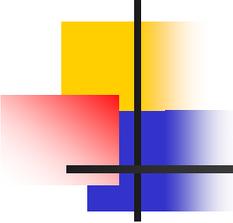


せん断応力のテンソル表現

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (v_x \quad v_y \quad v_z) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

だから

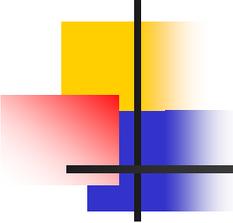
$$\nabla \cdot \pi = -\mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}^T$$



速度の2階微分テンソル

$$\nabla \cdot (\nabla \bar{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}^T$$

$$\nabla \cdot (\nabla \bar{v})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}^T$$



せん断応力のテンソル表現

$$\nabla \cdot [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T] = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}^T$$

よって

$$\nabla \cdot \pi = -\mu \nabla \cdot [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \vec{g}$$