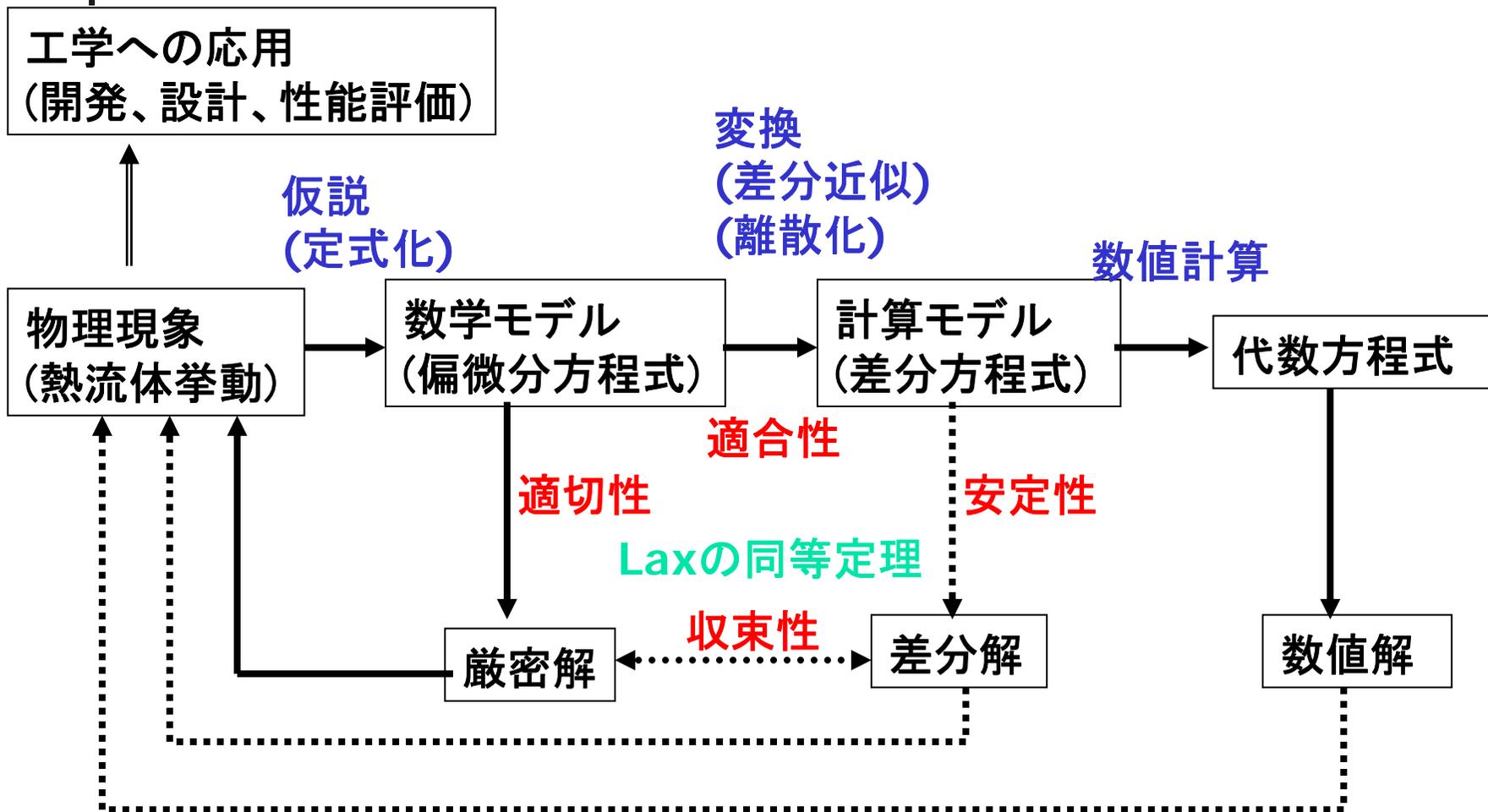


講義予定(案)

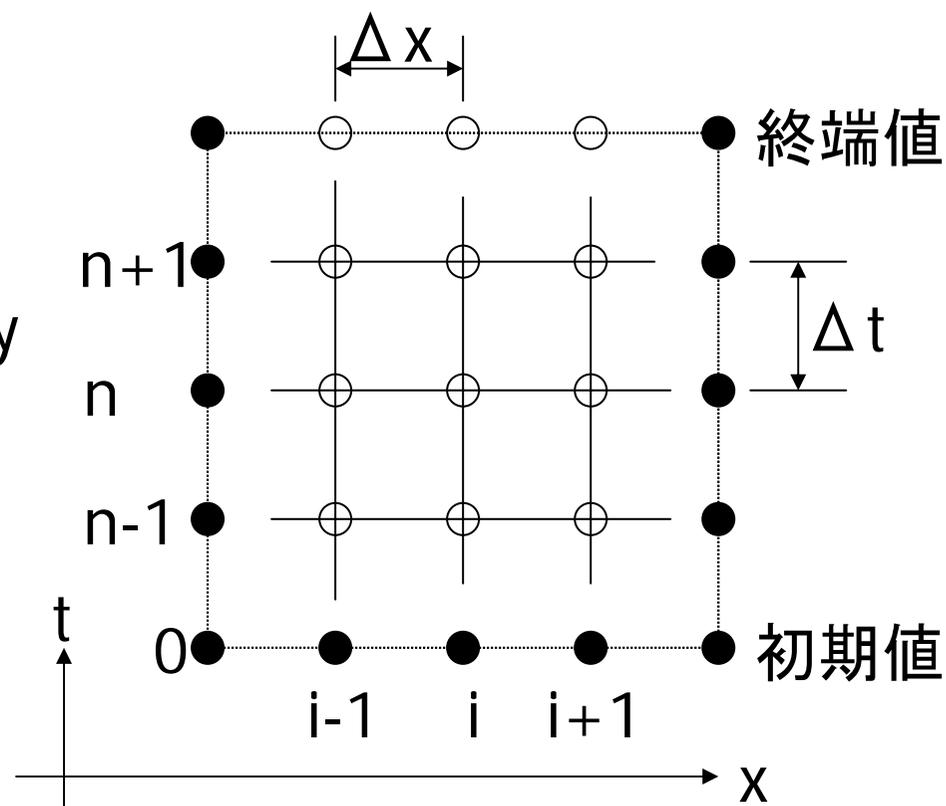
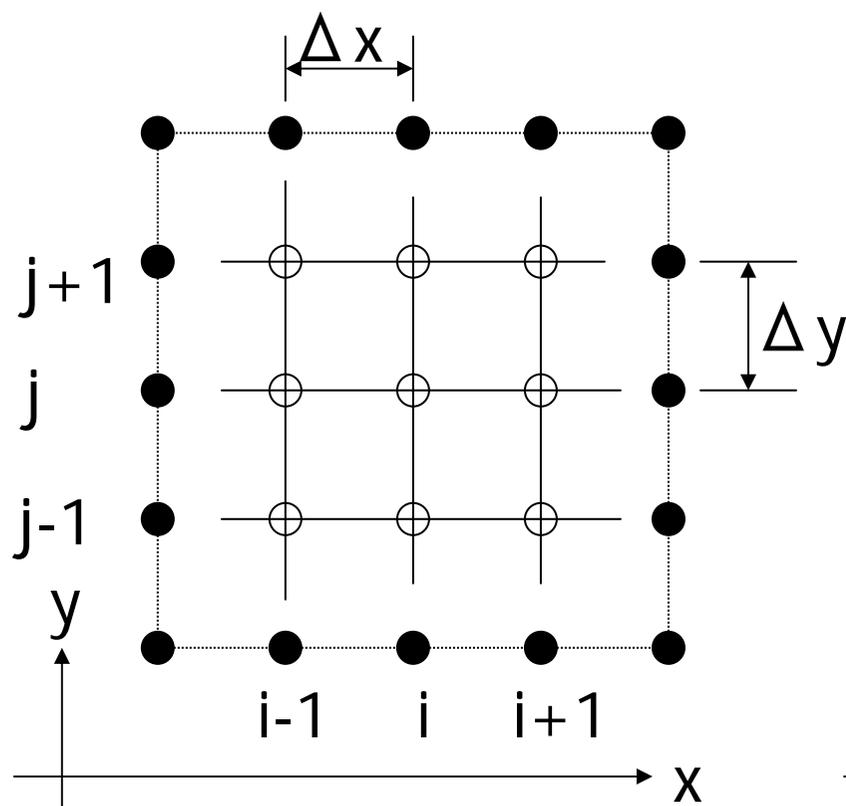
1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第2章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第3章) +変換 (テキスト第4章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第5章)+連立一次方程式の解法(テキスト第6章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第7章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第7章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析 by 金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際 by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) (予備日)

変換 —変化する方程式の定性的性質—



有限差分方程式とそのスキーム

空間(x,y)と時・空間(x,t)の離散化



● 境界点 ○ 内点

差分法における空間の記述

連続的な空間 (x,y) を等間隔に

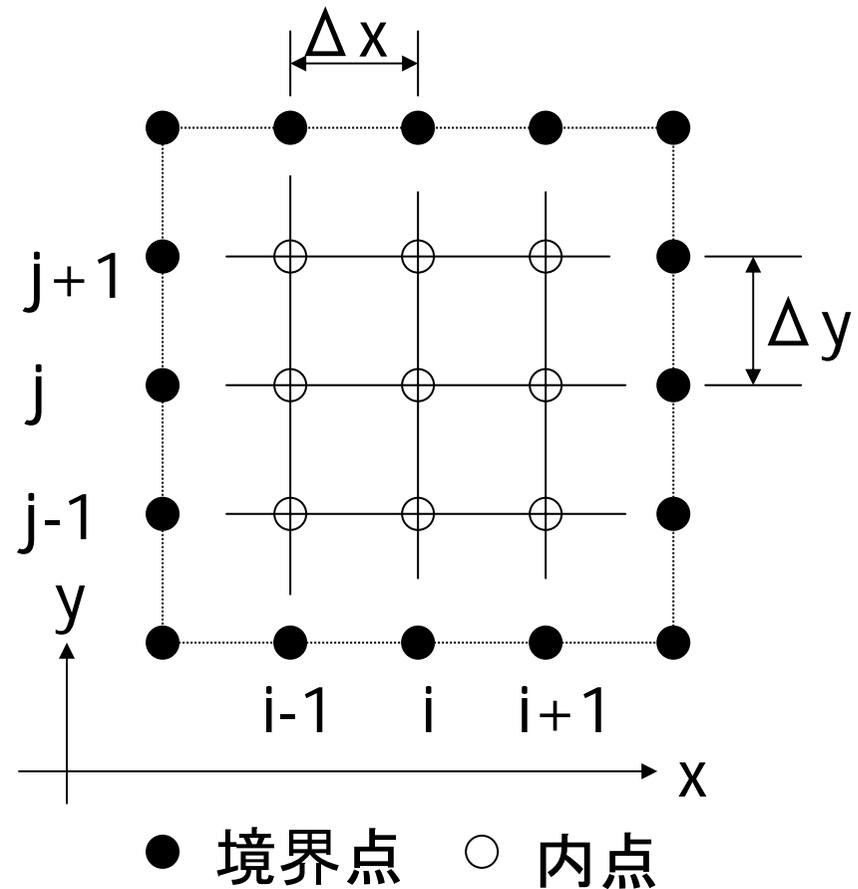
x 方向に Δx

y 方向に Δy

で分割。

x 方向に i 番目、
 y 方向に j 番目
おける変数を
 $u(i\Delta x, j\Delta y)$

$u_{i,j}$ と記述する。



差分法における時空間の記述

連続的な時・空間(x,t)を等間隔に

空間を Δx 、

時間を Δt

で分割。

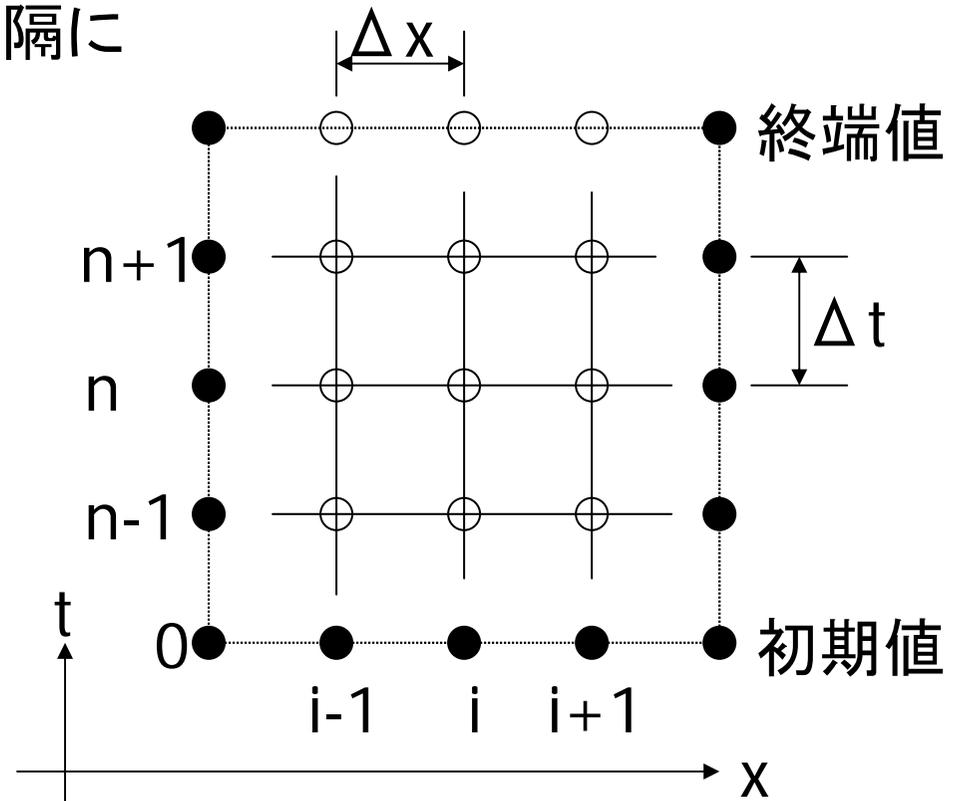
x方向にi番目、

n番目の時間

における変数

$u(i\Delta x, n\Delta t)$ を

u_i^n と記述する。





空間の前進差分近似(1/2)

$u_{i+1,j}$ を点 (i,j) において x についてTaylor展開し

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j}$ について解く

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$



空間の前進差分近似(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

であることを示している。これを空間の前進差分近似 (forward space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について「1次の正確度を持つ」という。



空間の後退差分近似(1/2)

$u_{i-1,j}$ を点 (i,j) において x についてTaylor展開

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$\partial u / \partial x \Big|_{i,j}$ について解く

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$



空間の後退差分近似(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

であることを示している。これを空間の後退差分近似 (backward space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について1次の正確度を持つ。



空間の中心差分近似(1/2)

$u_{i+1,j}$ 、 $u_{i-1,j}$ を点 (i,j) において x についてTaylor展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

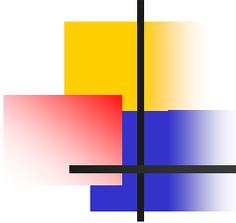
$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

上式から下式を差し引く

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2 \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + 2 \cdot \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j}$ について解く

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



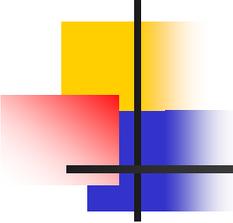
空間の中心差分近似(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

であることを示している。これを空間の中心差分近似 (centered space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について2次の正確度を持つ。



2階の導関数の差分商(1/2)

$u_{i+1,j}$ 、 $u_{i-1,j}$ を点 (i,j) において x についてTaylor展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

上式と下式を足し合わせる

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \dots$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j}$ について解く

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$



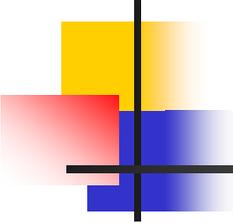
2階の導関数の差分商(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

であることを示している。これを空間の中心差分近似 (centered space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について2次の正確度を持つ。



空間の差分商 (1/2)

$u_{i,j}$ の時空間の点 (i,j) における空間についての差分商

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{前進差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{後退差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{中心差分近似})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$



時空間の差分商 (2/2)

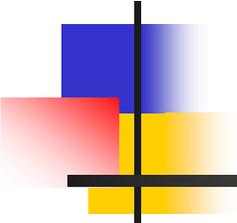
u_i^n の時空間の点(i,n)における時間についての差分商

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{前進差分近似})$$

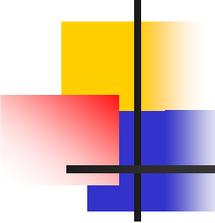
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{後退差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{中心差分近似})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$



波動方程式(双曲型)の差分スキーム



波動方程式の有限差分スキーム

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

差分方程式(中心差分)

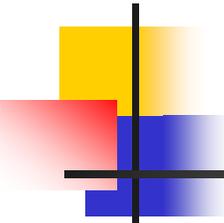
$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) = 0$$

u_i^{n+1} について解く。

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + \lambda^2 u_{i+1}^n + 2(1 - \lambda^2) u_i^n + \lambda^2 u_{i-1}^n \quad \lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

→ CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) スキーム

λ : CFL 数 (CFL number)



波動方程式の差分スキームのプログラム例

u_i^{n+1} についての差分方程式

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + \lambda^2 u_{i+1}^n + 2(1 - \lambda^2) u_i^n + \lambda^2 u_{i-1}^n \quad \lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

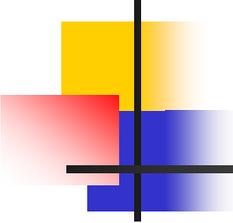
u_i^{n+1} を求めるためのプログラム (BASIC)

```
1490 *CFL
```

```
1500 FOR I=2 TO IM1
```

```
1510 U(I)=-U2(I)+L2*U1(I+1)+2*(1-L2)*U1(I)+L2*U1(I-1)
```

```
1520 NEXT I:RETURN
```



対流方程式の(陽)差分スキーム

対流方程式:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

差分方程式:
$$u_i^{n+1} - u_i^n + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2) = 0$$

u_i^{n+1} について解く。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

→ FTCS (Forward-Time Centered Space) スキーム

C: Courant数 (Courant number)

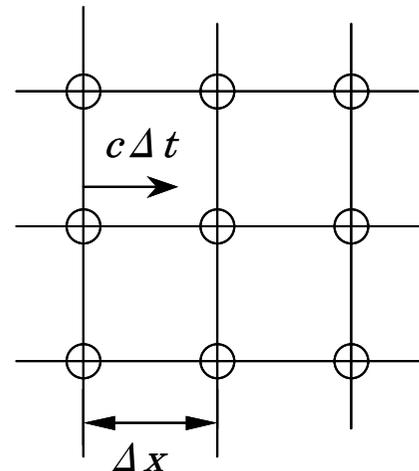
クーラン(Courant)条件

- 速度を c とすると、微小時間 Δt に進む距離は、 $c \cdot \Delta t$ となる。物理的には、この距離が、差分した微小区間 Δx を超えると計算が発散してしまう。そのためには、

$$c \Delta t < \Delta x$$

- でなければならない。すなわち、以下の条件を、Courant条件といい、計算結果の安定性に影響を与えものである。

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} < 1$$



対流方程式の差分スキーム(その1) (FTCSスキーム)

u_i^{n+1} についての差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

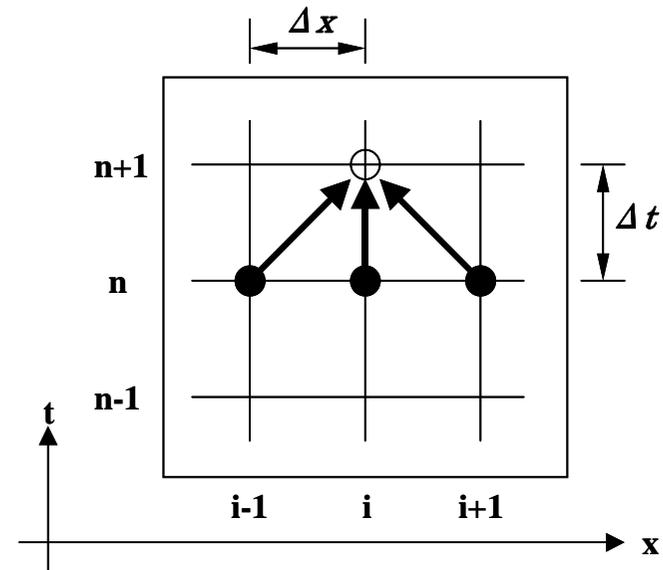
FTCSスキームによるプログラム例

```
1620 *FTCS
```

```
1630 FOR I=2 TO IM1
```

```
1640 TP1=-.5*CDTDX*(UN(I+1)-UN(I-1))
```

```
1660 U(I)=UN(I)+TP1:NEXT I:RETURN
```



対流方程式の差分スキーム(その2)

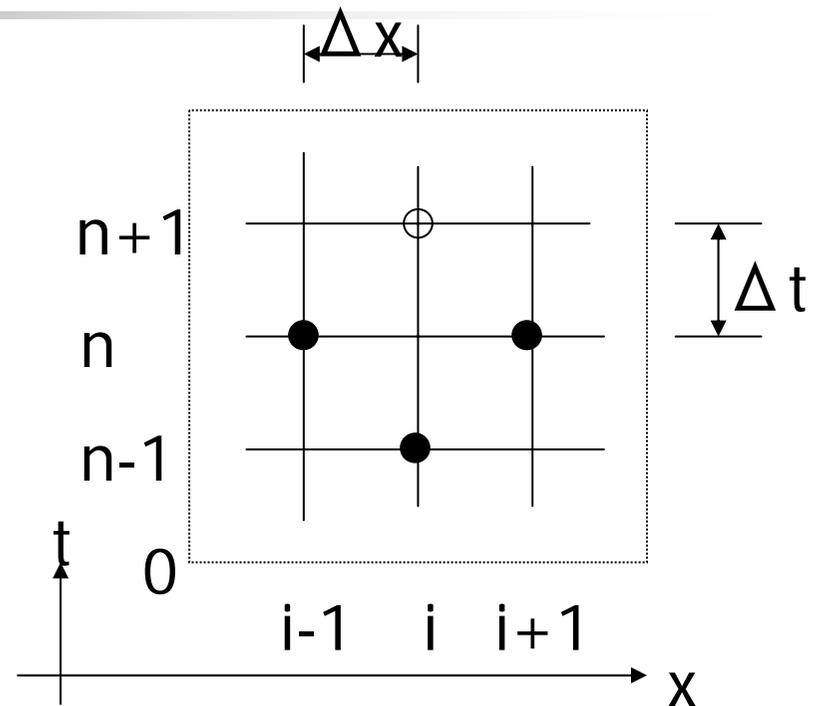
蛙とび法 (Leap frog scheme)

蛙とび法による差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

蛙とび法によるプログラム例

```
1670 *LPFRG
1680 FOR I=2 TO IM1
1690 TP1=-CDTDX*(UN(I+1)-UN(I-1))
1710 U(I)=U2(I)+TP1:NEXT I:RETURN
```



対流方程式の差分スキーム(その3)

風上差分 (Upwind scheme)

風上差分法による差分方程式

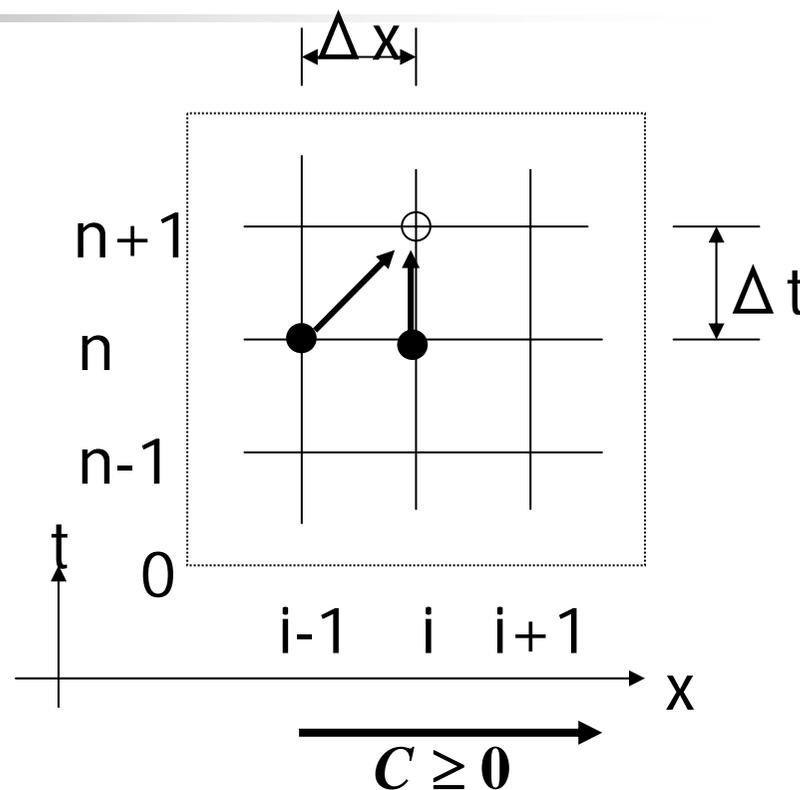
$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad C \geq 0$$

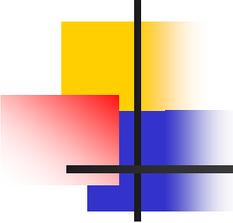
$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad C \leq 0$$

風上差分法によるプログラム例

```

1570 *UPWIND
1580 FOR I=2 TO IM1
1590 TP1=-CDTDX*(UN(I)-UN(I-1))
1610 U(I)=UN(I)+TP1:NEXT I:RETURN
    
```





対流方程式の陰解法(Implicit scheme) (1/3)

- 対流方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 対流方程式を時刻 $n+1$ において、時間:後退差分近似、空間:中心差分近似すると、次のような差分方程式が得られる。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

- u_{i+1}^{n+1} 、 u_i^{n+1} 、 u_{i-1}^{n+1} を変数値として差分スキームを求めると、

$$\frac{1}{2} \alpha u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

対流方程式の陰解法(Implicit scheme) (2/3)

- $0 \leq x \leq 1$ の区間を i 分割した場合を考えると: t

- $i=1$ のとき

$$-\frac{\alpha}{2} u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_2^{n+1} = u_1^n$$

- $i=2$ のとき

$$-\frac{\alpha}{2} u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_3^{n+1} = u_2^n$$

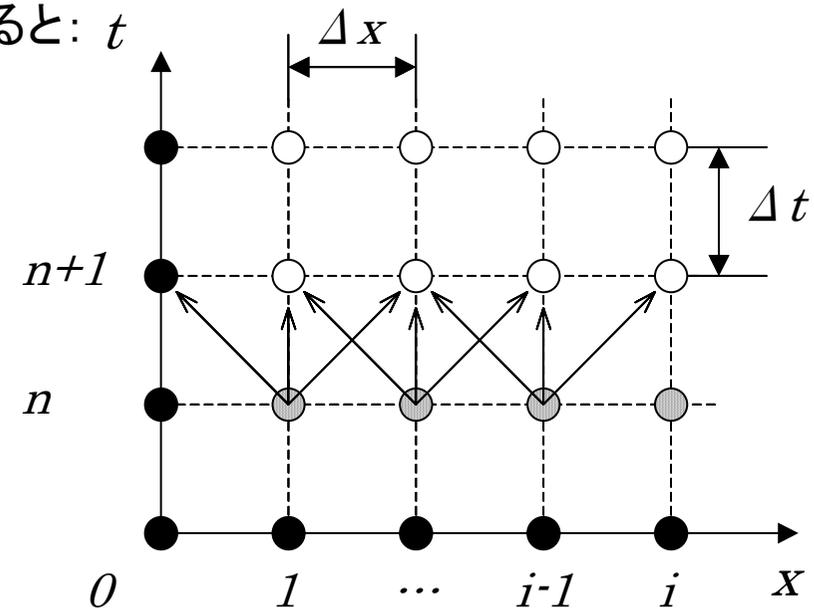
- $i=3$ のとき

$$-\frac{\alpha}{2} u_2^{n+1} + u_3^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_4^{n+1} = u_3^n$$

- $i=i$ のとき

$$-\frac{\alpha}{2} u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_{i+1}^{n+1} = -\frac{\alpha}{2} u_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) u_i^{n+1} = u_i^n$$

- 以上の連立方程式を行列で表すと、



対流方程式の陰解法(Implicit scheme) (3/3)

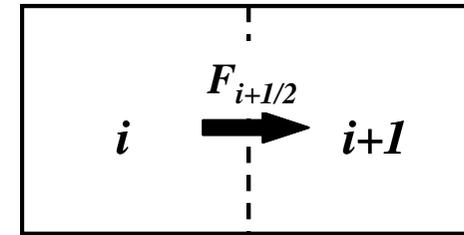
- 差分方程式の行列式:

$$\begin{bmatrix}
 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} & \ddots & & \\
 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{2} & 0 \\
 \vdots & & \ddots & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} \\
 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1^{n+1} \\
 u_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_{i-2}^{n+1} \\
 u_{i-1}^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 u_1^n + \frac{\alpha}{2} u_0^{n+1} \\
 u_2^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 u_{i-1}^n \\
 u_i^n - \frac{\alpha}{2} u_i^{n+1}
 \end{bmatrix}$$

境界条件
 $\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = 0$
 を利用して決定する

- 以上の行列の式を解くことによって、各時刻における変位が求まる。

最新の空間差分スキーム - QUICK -



1次元対流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial (u\phi)}{\partial x}$$

セル*i*で積分

$$\Rightarrow \phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{V_i} \quad F_{i+1/2}^n = u_{i+1/2}^n \phi_{i+1/2}^n S_{i+1/2}$$

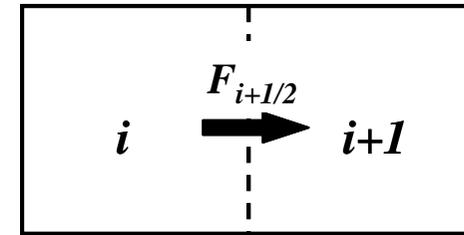
セル境界の物理量 $u_{i-1/2}^{n+1}$ を境界の前後を挟む2つのセルと風上側に1つ離れたセルの値を用いて2次の多項式で内挿

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{8}(-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}) & u \geq 0 \\ \frac{1}{8}(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i) & u < 0 \end{cases}$$

⇒ 差分式:

$$\phi_i^{n+1} = \begin{cases} \phi_i^n - \Delta t u \frac{3\phi_{i+1} + 3\phi_i - 7\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{8\Delta x} & u \geq 0 \\ \phi_i^n + \Delta t u \frac{3\phi_{i-1} + 3\phi_i - 7\phi_{i+1} + \phi_{i+2}}{8\Delta x} & u < 0 \end{cases}$$

最新の空間差分スキーム - QUICKEST -



セル境界の物理量 $u_{i-1/2}^{n+1}$ を境界の前後を挟む2つのセルと風上側に**2**つ離れたセルの値を用いて2次の多項式で内挿

$$\phi_i^{n+1} = \begin{cases} \phi_i^n - \frac{c}{6}(2\phi_{i+1}^n + 3\phi_i^n - 6\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n) + \frac{c^2}{2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \\ \quad - \frac{c^3}{6}(\phi_{i+1}^n - 3\phi_i^n + 3\phi_{i-1}^n - \phi_{i-2}^n) & c \geq 0 \\ \phi_i^n + \frac{c}{6}(2\phi_{i-1}^n + 3\phi_i^n - 6\phi_{i+1}^n + \phi_{i+2}^n) + \frac{c^2}{2}(\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n) \\ \quad + \frac{c^3}{6}(\phi_{i-1}^n - 3\phi_i^n + 3\phi_{i+1}^n - \phi_{i+2}^n) & c < 0 \end{cases}$$



差分式:

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{c}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1-c^2}{6}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \\ \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{c}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1-c^2}{6}(\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i) \end{cases}$$

最新の空間差分スキーム

- TVD (Total Variation Diminishing) (1/2)-

セル境界で物理量を内挿する際、数値振動が発生する場所には1次精度の風上差分を、それ以外では高次精度の差分スキームを用いる。

$$\phi_{i+1/2}^n = \begin{cases} \phi_i^n + \frac{1}{2} \psi_{i-1/2}^+ (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) & u \geq 0 \\ \phi_{i+1}^n - \frac{1}{2} \psi_{i+3/2}^- (\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n) & u < 0 \end{cases}$$

ここで、 ψ はリミッターで近傍の ϕ の分布によって値を変化させる

$$\begin{aligned} \psi_{i-1/2}^+ &= \psi_{i-1/2}^+(r_{i-1/2}^+) \quad \text{ただし} \quad r_{i-1/2}^+ = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n} \\ \psi_{i+3/2}^- &= \psi_{i+3/2}^-(r_{i+3/2}^-) \quad r_{i+3/2}^- = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n} \end{aligned}$$

TVD条件を満たす代表的なリミッターには、以下のminmod関数がある

$$\psi_{i-1/2}^+ = \min \text{mod}(1, r_{i-1/2}^+) \quad \Rightarrow \quad \min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ y & |x| > |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases}$$

最新の空間差分スキーム

- TVD (Total Variation Diminishing) (2/2)-

$$\phi_{i+1/2}^n = \begin{cases} \phi_i^n + \frac{1}{2} \psi_{i-1/2}^+ (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) & u \geq 0 \\ \phi_{i+1}^n - \frac{1}{2} \psi_{i+3/2}^- (\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n) & u < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \psi_{i-1/2}^+ = \psi_{i-1/2}^+(r_{i-1/2}^+) \\ \psi_{i+3/2}^- = \psi_{i+3/2}^-(r_{i+3/2}^-) \end{matrix} \quad \begin{matrix} r_{i-1/2}^+ = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n} \\ r_{i+3/2}^- = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n} \end{matrix}$$

$$\psi_{i-1/2}^+ = \min \text{mod}(1, r_{i-1/2}^+) \quad \min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ y & |x| > |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases}$$



$$\min \text{mod}(1, r) = \begin{cases} 1 & 1 \leq r \\ r & 0 \leq r < 1 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

これにより、3種類の差分スキームを状況に応じて使い分けることができる。

- $1 < r$ の場合: 変数の勾配が風下方向の増加 → 2次風上差分を適用
- $0 < r < 1$ の場合: 変数の勾配が風下方向に減少 → 2次中心差分を適用
- $r < 0$ の場合: 変数の勾配が逆転 → 1次風上差分を適用

最新の空間差分スキーム

– CIP (Cubic-interpolated pseudo particle) –

物理量の空間1階微分を変数として持ち、その移流方程式を同時に解く。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

さらに、 ϕ の空間分布を3次の補間式で近似する。

$$\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

この補間式の4つの係数は、位置*i*と位置*i-1*での変数と空間微分値によって、次式によって決定する

$$a_0 = \phi_i$$

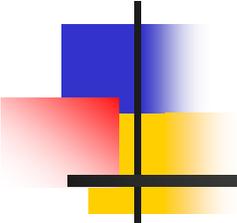
$$a_1 = (\phi, x)_i$$

$$a_2 = \frac{[2(\phi, x)_i + (\phi, x)_{i-1}] - 3[\phi_i - \phi_{i-1}]}{\Delta x^2}$$

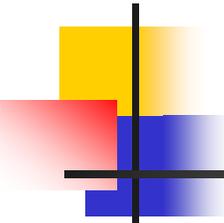
$$a_3 = \frac{[(\phi, x)_i + (\phi, x)_{i-1}] - 2[\phi_i - \phi_{i-1}]}{\Delta x^3}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t u \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^n$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^n - \Delta t u 2 \left\{ \frac{[2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^n + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i-1}^n] - 3[\phi_i^n - \phi_{i-1}^n]}{\Delta x} - 3 \frac{[\phi_i^n - \phi_{i-1}^n]}{\Delta x^2} \right\}$$



熱伝導方程式(放物型)の差分スキーム



熱伝導方程式の陽解法(Explicit scheme)

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

差分方程式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

u_i^{n+1} について解くと、以下のFTCSスキームが得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

FTCSスキーム

d: 拡散数 (diffusion number)

熱伝導方程式の陽解法

差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

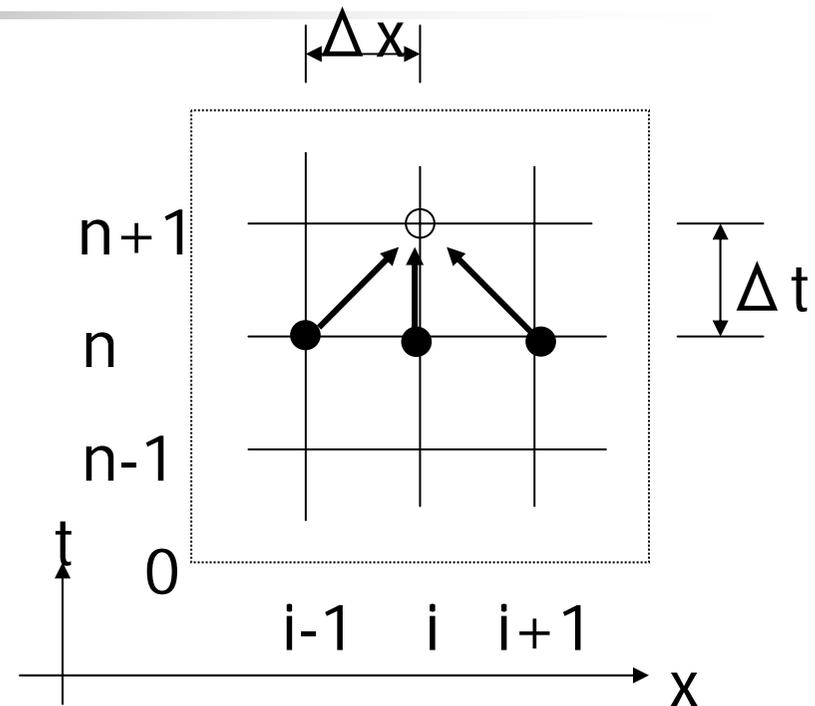
陽解法によるプログラム例

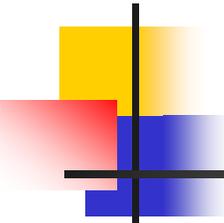
```
1590 *FTCS
```

```
1600 FOR I=2 TO IM1
```

```
1610 U(I)=UN(I)+D*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))
```

```
1620 NEXT I:RETURN
```





熱伝導方程式の陰解法 (Implicit scheme)

熱伝導方程式：
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

時間に後退差分近似、空間に中心差分近似した差分方程式：

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

u_{i-1}^{n+1} , u_i^{n+1} , u_{i+1}^{n+1} を変数値として差分スキームを求める。

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1 + 2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

熱伝導方程式の陰解法

差分方程式:

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

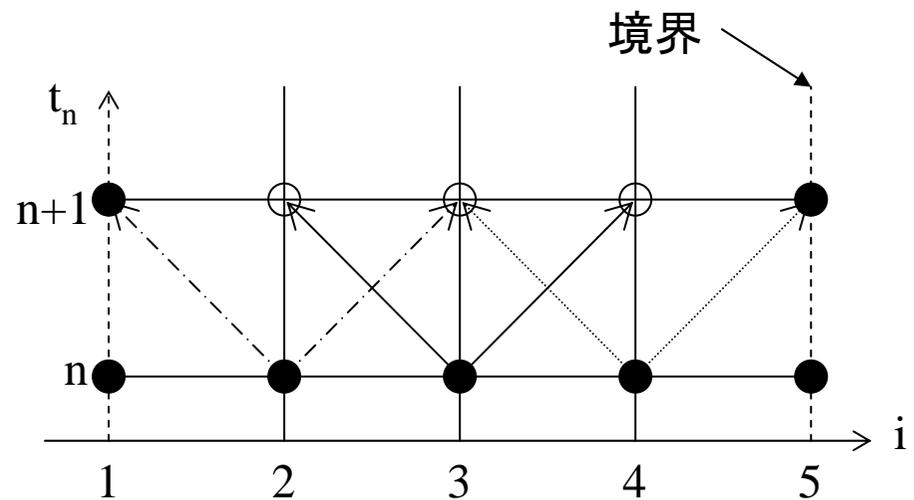
(例) $i=1\sim 5$ を考える。 $i=1, i=5$ を境界条件を満足する境界点とし、 $i=2, 3, 4$ を内点とする。

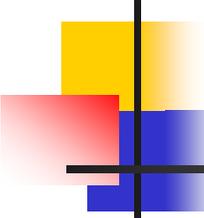
$$(1+2d)u_2^{n+1} - du_3^{n+1} = u_2^n + du_1^{n+1}$$

$$-du_2^{n+1} + (1+2d)u_3^{n+1} - du_4^{n+1} = u_3^n$$

$$-du_3^{n+1} + (1+2d)u_4^{n+1} = u_4^n + du_5^{n+1}$$

N元連立一次方程式





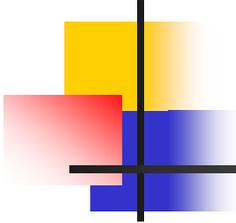
熱伝導方程式の陰解法

三重対角行列

$$\begin{pmatrix} (1+2d) & -d & 0 \\ -d & (1+2d) & -d \\ 0 & -d & (1+2d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^n + du_1^{n+1} \\ u_3^n \\ u_4^n + du_5^{n+1} \end{pmatrix}$$

陰解法によるプログラム例(行列の設定)

```
2020 *SPMTRX
2030 FOR I=1 TO IBAR
2040 A(I,I)=1+2*BETA:NEXT I
2050 FOR I=1 TO IBAR-1:A(I,I+1)=-BETA:NEXT I
2060 FOR I=1 TO IBAR-1:A(I+1,I)=-BETA:NEXT I:RETURN
```



熱伝導方程式の陰解法

陰解法によるプログラム例(三重対角行列の解法)

```
1580 '*Gauss-Jordan eliminator      1720 '*back substitution
1590 *GSSJOD                        1730 FOR I=1 TO IBAR
1591 ' *forward elimination         1740 U(I)=B(I)*D1(I)
1600 FOR K=1 TO IBAR                1760 NEXT I
1610 D1(K)=1/A(K,K)
1620 FOR I=1 TO IBAR
1630 IF I=K THEN GOTO 1700
1640 M(I,K)=A(I,K)*D1(K)
1650 FOR J=K+1 TO JBAR
1660 A(I,J)=A(I,J)-M(I,K)*A(K,J)
1670 NEXT J
1680 B(I)=B(I)-M(I,K)*B(K)
1690 A(I,K)=0
1700 NEXT I
1710 NEXT K
```

歴史的な経緯 – 初期の差分法

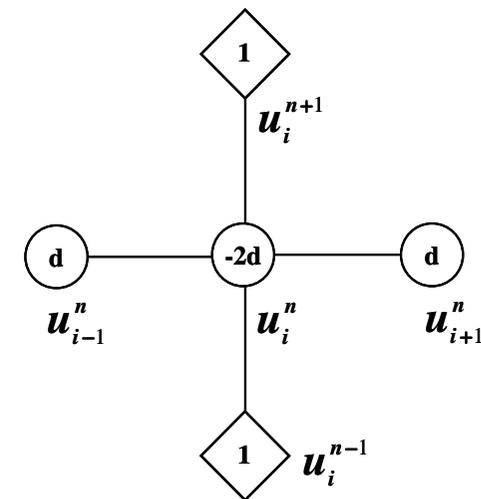
Richardson(1881–1953) の方法

- 差分の考え方は1860年代、既にあった。しかしながら、
- 放物型方程式に対して初めて差分法を適用したのは、Richardson(1881–1953)で、1910年のことである。
- Richardson は1次元熱伝導方程式に対して、時間と空間微分に中心差分を用いることにより、以下の差分式を導いた。

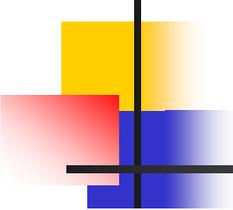
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + d(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



- 残念ながら、このスキームは、拡散数 d の値によらず不安定となるため、正しい解が得られないスキームであった。
- 近年、このRichardsonスキームは不安定なスキームの代表例として扱われることがあるが、初めて実用的な計算に差分法を適用しようとした試みとして高く評価されるものである。



Richardsonの夢

- リチャードソンは気象学に興味を持ち、微分方程式を離散化して数値的に解くという現在使われている気象予測の原型ともいえる数値予報システムを提案した。
- そのために、大戦中に集めたデータを用いた計算を実際に行ったが、計算をすべて手で行ったためわずか6時間の予報に2ヶ月かかり、しかも数値の処理に問題があったため、予報は失敗に終わった。
- 1922年に著書の中で彼は、64,000人の計算者を巨大なホールに集めて指揮者の元で整然と計算を行えば実際の天候の変化と同じくらいの速さで予報が行えると見積もった。この構想は「**リチャードソンの夢**」と呼ばれた。
- またリチャードソンは乱気流に関する実験も数多く行っている。乱流に関する無次元数「リチャードソン数」は彼の名前にちなんでいる。

デュフォール・フランケル法(DF法)

- Richardson法は、拡散数に関わらず不安定な差分スキームであったが、DufortとFrankelは、1953年、空間の2階微分に対する差分表示を時間平均値とする差分スキームを導いた。
- このスキームは、拡散方程式に対するLeapfrog法(あるいはPyramid法)とも呼ばれているが、対流方程式に対するLeapfrog法と異なり、安定なスキームとなっている。(→ 安定解析により証明)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

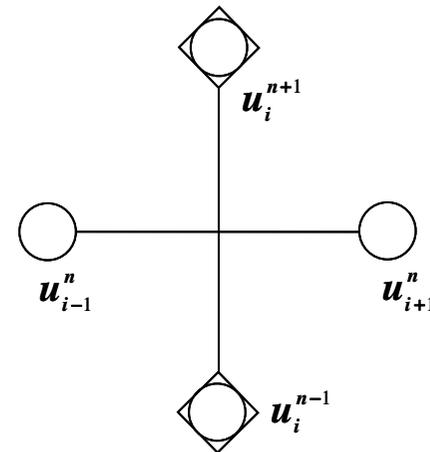
↓

$$u_i^n = \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t^2} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{1+2d} \left[2d(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + (1-2d)u_i^{n-1} \right]$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



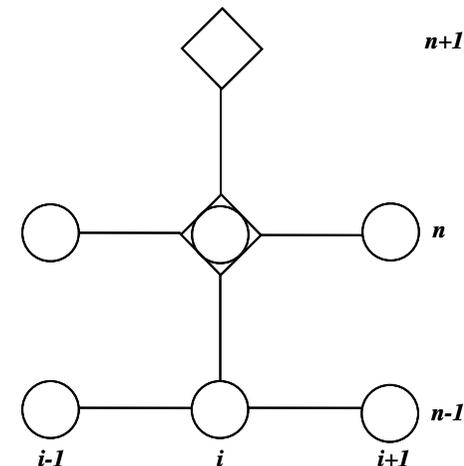
アダムス・バッシュフォース法(AB法)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[\beta \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + (1 - \beta) \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{\Delta x^2} \right]$$

↓ $\beta = \frac{3}{2}$

$$u_i^{n+1} = \frac{3}{2} \left\{ du_{i-1}^n + (1 - 2d)u_i^n + du_{i+1}^n \right\} - \frac{1}{2} \left\{ du_{i-1}^{n-1} + (1 - 2d)u_i^{n-1} + du_{i+1}^{n-1} \right\}$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



クランク・ニコルソン法(CN法) ← 陰解法

- CN法は、空間微分に対してnとn-1の2つの時間レベルの算術平均を取っている。
- 得られる漸化式は、各種の行列演算を用いて解かれる。

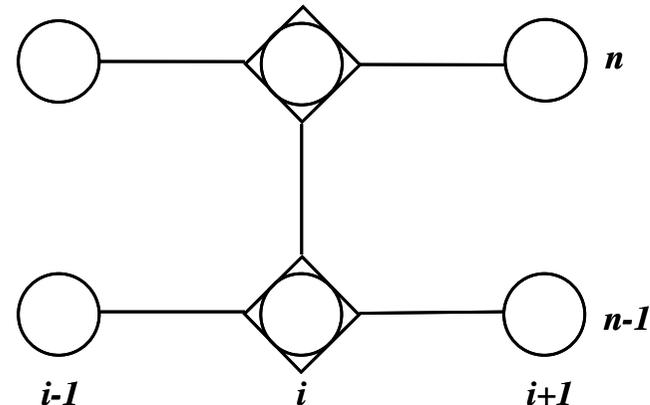
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

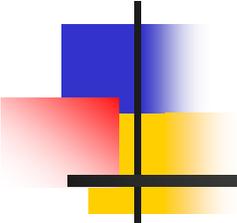
$$\Downarrow \quad f^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \{f^n + f^{n-1}\}$$

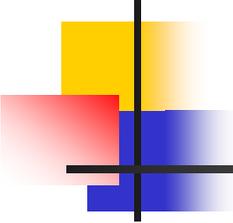


$$-du_{i-1}^n + 2(1+d)u_i^n - du_{i+1}^n = du_{i-1}^{n-1} + 2(1-d)u_i^{n-1} + du_{i+1}^{n-1} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$





Poisson方程式(楕円型)の差分スキーム



(1/6) 中心差分スキームの適用

Poisson方程式

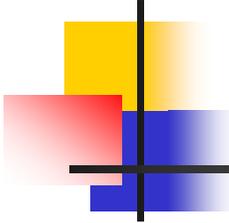
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$$

空間に中心差分近似を用いた差分方程式

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -g_{i,j}$$

$\Delta x = \Delta y$ とする。

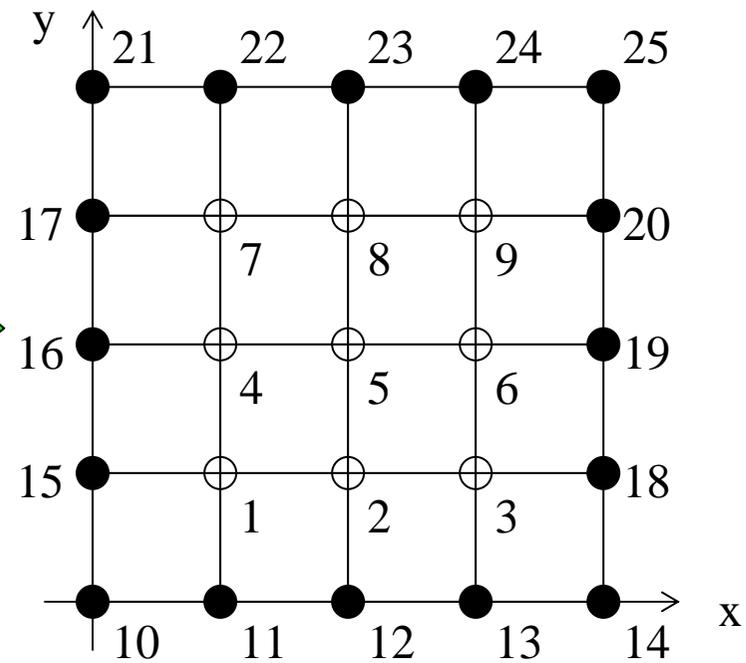
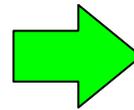
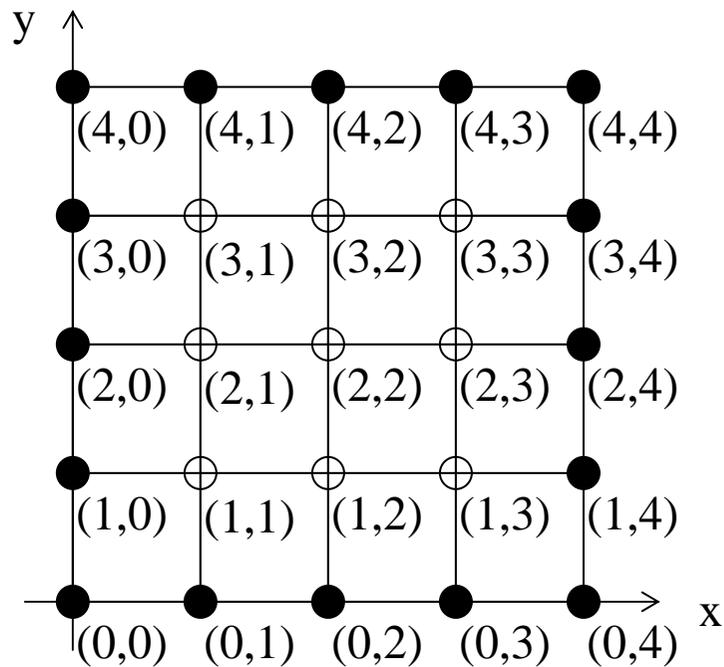
$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 g_{i,j}$$

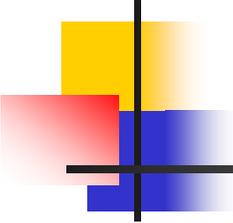


(2/6) Natural ordering

Natural ordering:

$u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{3,3}$ を u_1, u_2, \dots, u_9 と番号を付け直す

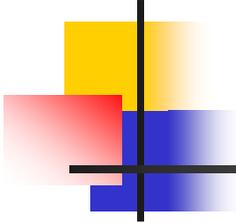




(3/6) 行列式

Natural ordering によって差分式は以下のように表すことができる

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_1 + u_{11} + u_{15} \\ \Delta x^2 g_2 + u_{12} \\ \Delta x^2 g_3 + u_{13} + u_{18} \\ \Delta x^2 g_4 + u_{16} \\ \Delta x^2 g_5 \\ \Delta x^2 g_6 + u_{19} \\ \Delta x^2 g_7 + u_{17} + u_{22} \\ \Delta x^2 g_8 + u_{23} \\ \Delta x^2 g_9 + u_{20} + u_{24} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$



(4/6) 行列式の要素 ～ 三重対角行列

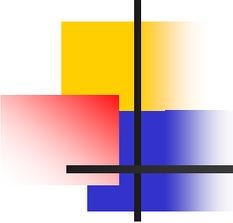
$$U_1 = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T, \quad U_2 = (u_4 \ u_5 \ u_6)^T, \quad U_3 = (u_7 \ u_8 \ u_9)^T$$
$$B_1 = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \quad B_2 = (b_4 \ b_5 \ b_6)^T, \quad B_3 = (b_7 \ b_8 \ b_9)^T$$

以上の置き換えによって、行列式は、以下の形に書き換わる

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

ここで

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3 : i \neq j)$$



(5/6) ブロック三重対角行列の解法

係数行列の設定:

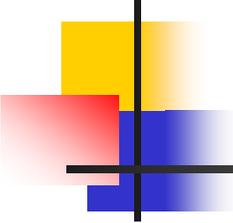
A行列の設定:

```
1710 '*specification of A
1720 *MTRX
1740 FOR I=1 TO IBAR:AII(I,I)=4:NEXT I
1750 FOR I=2 TO IBAR:AII(I,I-1)=-1:NEXT I
1760 FOR I=1 TO IBAR-1:AII(I,I+1)=-1:NEXT I
1770 FOR I=1 TO IBAR:AIJ(I,I)=-1:NEXT I
1780 FOR J0=1 TO JBAR
1790 FOR I=1 TO IBAR:FOR J=1 TO JBAR
1800 IP=I+JBAR*(J0-1):JP=J+JBAR*(J0-1)
1810 A(IP,JP)=AII(I,J):NEXT J:NEXT I
1820 NEXT J0
```

```
1830 FOR J0=1 TO JBAR-1
1840 FOR I=1 TO IBAR:FOR J=1 TO JBAR
1850 IP=I+JBAR*J0:JP=J+JBAR*(J0-1)
1860 A(IP,JP)=AIJ(I,J):NEXT J:NEXT I
1870 NEXT J0
1880 FOR J0=1 TO JBAR-1
1890 FOR I=1 TO IBAR:FOR J=1 TO JBAR
1900 IP=I+JBAR*(J0-1):JP=J+JBAR*J0
1910 A(IP,JP)=AIJ(I,J):NEXT J:NEXT I
1920 NEXT J0:RETURN
```

b行列の設定:

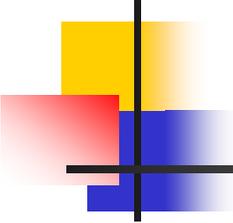
```
1940 '*specification of b
1950 *RHS
1960 FOR I=1 TO IJBAR:B(I)=G0*DXYDY:NEXT I:RETURN
1970 'FOR I=IBAR TO IJBAR STEP IBAR:B(I)=U0:NEXT I:RETURN
```



(6/6) ブロック三重対角行列の解法

ガウスの消去法による行列の解法

```
1440 '*Gaussian eliminator for A*u=b
1450 *GAUSS
1470 FOR K=1 TO IJBAR
1480 D1(K)=1/A(K,K)
1490 FOR I=K+1 TO IJBAR
1500 M(I,K)=A(I,K)*D1(K)
1510 FOR J=K+1 TO IJBAR
1520 A(I,J)=A(I,J)-M(I,K)*A(K,J)
1530 NEXT J
1540 B(I)=B(I)-M(I,K)*B(K)
1550 A(I,K)=0
1560 NEXT I
1580 NEXT K
1590 D1(IJBAR)=1/A(IJBAR,IJBAR)
1600 '*backward substitution
1610 U(IJBAR)=B(IJBAR)*D1(IJBAR)
1620 FOR I= 2 TO IJBAR
1630 IR1=IJBAR-I+1
1640 SUM=0:FOR J=IR1+1 TO IJBAR
1650 SUM=SUM+A(IR1,J)*U(J):NEXT J
1660 U(IR1)=(B(IR1)-SUM)/A(IR1,IR1)
1690 NEXT I
```



5点差分スキーム

(Five-term recurrence scheme)

$\Delta x = \Delta y$ とした場合のPoisson方程式の差分近似式

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 g_{i,j}$$

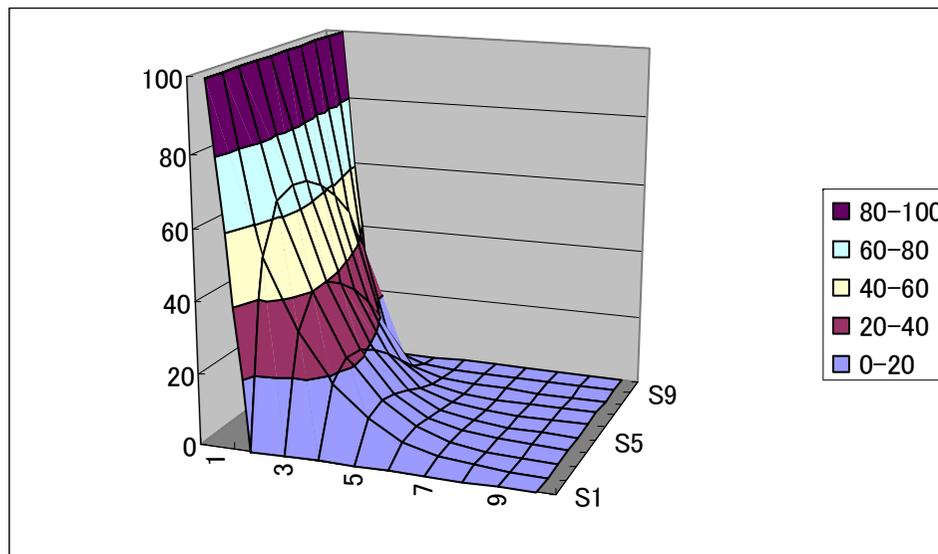
$u_{i,j}$ について整理すると、

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + \Delta x^2 g_{i,j} \right)$$

変数、 $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$ が既知の場合、 $u_{i,j}$ の値が求まることを示している。

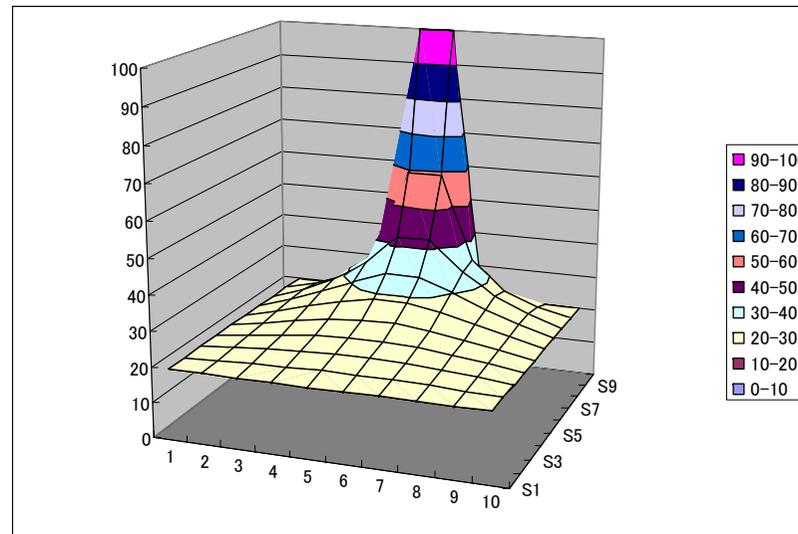
表計算ソフトによる熱伝導解析(1/2)

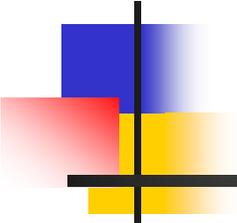
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0	51.07237	64.4262	66.64282	65.19423	61.99906	57.19167	49.72089	37.43022	0	0
0	31.6532	39.86327	39.9896	36.95083	32.13504	25.61034	17.04673	4.261682	0	0
0	18.33154	22.32332	21.16744	17.95006	13.67962	8.787319	3.538683	0.884671	0	0
0	9.599884	11.13954	9.804685	7.44554	4.818129	2.370757	0.884245	0.221061	0	0
0	4.507474	4.936661	3.986152	2.683597	1.479724	0.668902	0.241968	0.060492	0	0
0	1.896977	1.953679	1.448326	0.878807	0.45038	0.195639	0.069671	0.017418	0	0
0	0.716155	0.697562	0.483257	0.27722	0.136799	0.058171	0.020536	0.005134	0	0
0	0.227735	0.213375	0.142508	0.079438	0.038443	0.016165	0.00568	0.00142	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



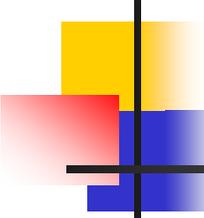
表計算ソフトによる熱伝導解析(2/2)

20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20.36674	20.69783	20.954	21.09569	21.09575	20.95416	20.69803	20.3669	20
20	20.76934	21.47087	22.02284	22.33339	22.3335	22.02314	21.47124	20.76962	20
20	21.24008	22.39394	23.33364	23.88207	23.88221	23.33402	22.39441	21.24042	20
20	21.79738	23.53172	25.03634	25.97965	25.9798	25.03674	23.53221	21.79775	20
20	22.41812	24.89976	27.30095	29.02103	29.02117	27.30133	24.90022	22.41846	20
20	22.97566	26.34872	30.24724	33.78289	33.78301	30.24755	26.3491	22.97595	20
20	23.13608	27.27259	33.55684	42.08071	42.08079	33.55705	27.27286	23.13628	20
20	22.29624	26.04895	34.62707	58.90258	58.90262	34.62718	26.04909	22.29634	20
20	20	20	20	100	100	20	20	20	20
				加熱部					





差分法の特徴



(1/5)微係数を差分商に置き換える

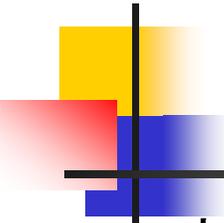
対流方程式の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

差分方程式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

微係数を差分商に置き換える操作は数学的表現として、元の方程式の形が大きく崩れないで、差分方程式に引き継がれる。



(2/5) 物理の過程を忠実に再現

対流方程式の差分方程式:

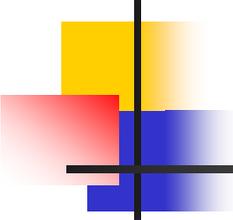
$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

初期値問題において、時間の進展を一つ一つの Δt の増分として現象を追跡している。

Laplace方程式の差分式 ($g_{i,j}=0$ とし、 u : 物質の濃度)

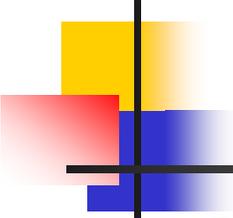
$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

周囲の4点の平均として、注目している点の濃度が決定される。という物理学における拡散の過程までもが理解される。



(3/5) 数学的な意味付けが容易

偏微分方程式の従属変数をTaylor展開して差分方程式に変換したとみなすと、
打切り誤差、境界条件の誤差の評価が容易となり、高次項まで考慮した差分法の数学的な意味付けも容易に得られる。



(4/5) 汎関数の存在を必要としない

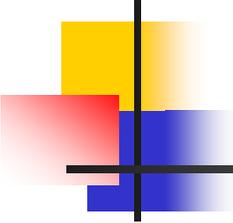
スカラー関数 $u(x,y)$ に対するDirichlet積分は、対象領域を D として

$$I = \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

で定義される。この汎関数を最小とする問題のEuler-Lagrangeの方程式は、次のLaplace方程式である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

差分法では、対象としている偏微分方程式についての汎関数が存在するか否かを気にかける必要がない。



(5/5) 検証が容易

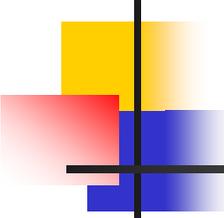
差分スキームによる計算アルゴリズムは、物理的直感が働きやすく、定式化と変換の次にくる計算過程の設計や検証が容易である。例えば、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

において $C=1$ としたとき、次の厳密な差分解

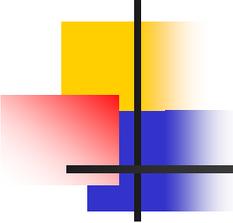
$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$$

が得られる。この場合には Δt が1つ増加すると、点 $(i-1, n)$ の変数 u が x の正方向に Δx だけ移動して点 $(i, n+1)$ に進行するという有向性の意味が明確になる。



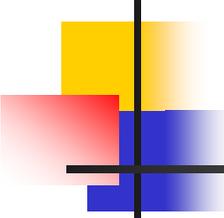
課題提出予定(案)

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/ 9) 課題(1)提出
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 課題(2)提出
5. (10/ 7) 課題(3)提出
6. (10/21) 課題(4)提出
7. (10/28) 課題(5)提出
8. (11/ 4) 課題(6)提出
9. (11/11) 課題(7)提出
10. (11/18) (課題by金子暁子先生)の提出
11. (11/25) (数値解析by渡辺正先生)の提出



提出課題(1)

- 各自が行ったことのある数値解析(流体解析に限定しない)について、その対象となった物理、基礎方程式、境界条件、数値解析手法、解析結果、(もしあれば)実験との比較、等に関して、簡潔にレポートに纏めなさい。
- もし、数値解析の経験がない場合には、数値解析に関して考えるところをレポートに纏めなさい。
- 提出期限は、次回(9/9)までとする。



提出課題(2)

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\alpha > 0)$$

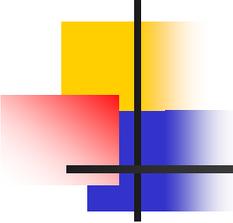
- に、次の関数を代入すると、

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int u dx\right)$$

- 以下の式が導かれることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 提出期限は、次々回(9/30)までとする。



提出課題(3)

- 以下のテンソル表現で記載されているNavier-Stokes方程式の各項の成分を書き下しなさい。

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \vec{g}$$

- ただし、 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \pi = -\mu \nabla \cdot [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$$

- 提出期限は、次々々回(10/7)までとする。

対流方程式の数値解の挙動

～スキームの選択 — モデル問題3 —

- 以下の対流方程式を

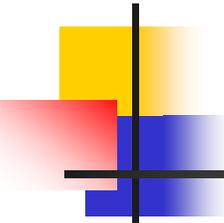
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 以下の境界条件と初期条件の下で、

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/5) \\ 1 & (1/5 \leq x \leq 2/5) \\ 0 & (2/5 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad \begin{aligned} u(0,t) &= g_0 \quad g_0 = 0 \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

- 以下の各スキームを用いて数値的に解析しなさい。
 - ・ FTCS
 - ・ 蛙とび法
 - ・ 風上差分

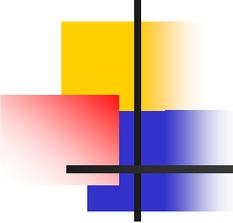
Program: ADVEC



提出課題(4)

- 前ページに指定する微分方程式を、与えられた境界条件の下で、指定する差分スキームを用いて数値的に解析しなさい。
- 提出期日： **10月21日(木)**
- 提出物は、
 - ・内容の説明したレポート
 - ・プログラムリスト
 - ・解析結果(数値出力、作図結果)

以上の全てを、A4レポート用紙ならびに電子媒体(CD)の両方により提出すること。



提出課題(5)

以下のPoisson方程式を、中心差分近似を用いた差分方程式とした上で、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$$

5×5に分割された空間に対して、周囲境界を既知のものとするとき得られる9元連立一次方程式を、Natural orderingによって書き下しなさい。

提出期日: **10月28日(木)**