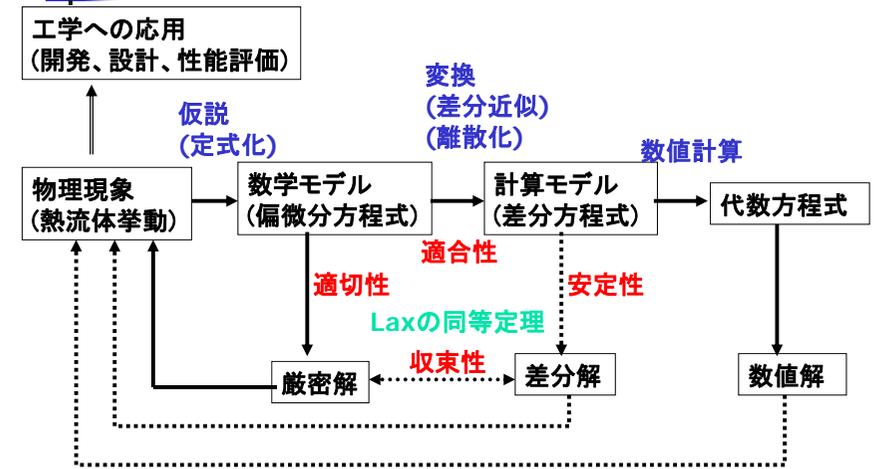


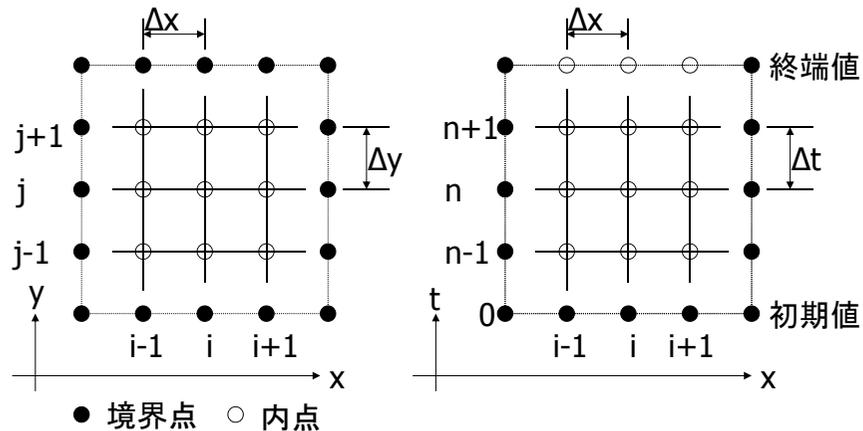
講義予定

- | | | | |
|-----|-------------|----|----------------------|
| 1. | 第1回目 10/2 | 阿部 | 数値シミュレーションの手続き |
| 2. | 第2回目 10/9 | 阿部 | 差分方程式と差分スキーム |
| 3. | 第3回目 10/16 | 田中 | 方程式の代数化, 連立1次方程式の解法 |
| 4. | 第4回目 10/23 | 田中 | 並列計算法 |
| 5. | 第5回目 10/30 | 阿部 | MAC法など差分の計算方法 |
| 6. | 第6回目 11/13 | 田中 | 有限要素法 |
| 7. | 第7回目 11/20 | 田中 | 有限要素法 |
| 8. | 第8回目 12/4 | 田中 | 有限要素法, N-Sプログラムによる実習 |
| 9. | 第9回目 12/11 | 阿部 | 乱流・熱流体・多相流 |
| 10. | 第10回目 12/18 | 田中 | 津波解析など事例紹介 |
| 11. | 第11回目 12/25 | | (試験予定日) |

変換 —変化する方程式の定性的性質—



有限差分方程式とそのスキーム 空間(x,y)と時・空間(x,t)の離散化



差分法における空間の記述

連続的な空間(x,y)を等間隔に

x方向に Δx

y方向に Δy

で分割。

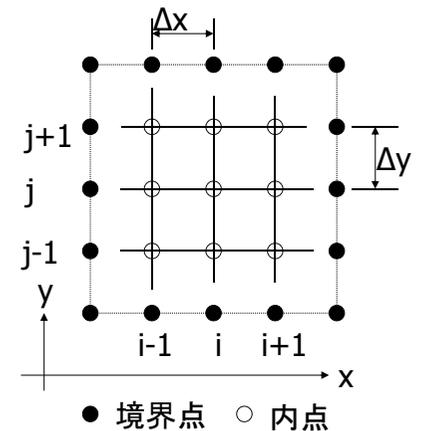
x方向にi番目、

y方向にj番目

における変数を

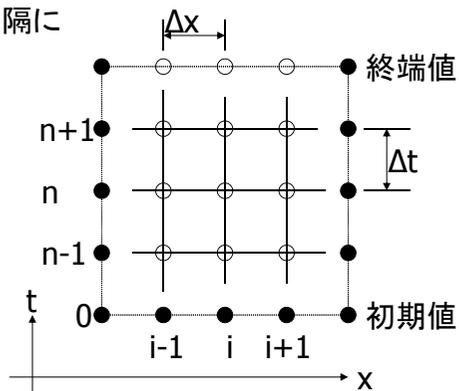
$u(i\Delta x, j\Delta y)$

$u_{i,j}$ と記述する。



差分法における時空間の記述

連続的な時・空間(x,t)を等間隔に
空間を Δx 、
時間を Δt
で分割。
x方向にi番目、
n番目の時間
における変数
 $u(i\Delta x, n\Delta t)$ を
 u_i^n と記述する。



空間の前進差分近似(1/2)

$u_{i+1,j}$ を点 (i,j) において x について Taylor 展開し

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$\partial u / \partial x \Big|_{i,j}$ について解く

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

空間の前進差分近似(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

であることを示している。これを空間の前進差分近似 (forward space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について「1次の正確度を持つ」という。

空間の後退差分近似(1/2)

$u_{i-1,j}$ を点 (i,j) において x について Taylor 展開

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$\partial u / \partial x \Big|_{i,j}$ について解く

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \end{aligned}$$

空間の後退差分近似(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

であることを示している。これを空間の後退差分近似 (backward space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について1次の正確度を持つ。

空間の中心差分近似(1/2)

$u_{i+1,j}$ 、 $u_{i-1,j}$ を点 (i,j) において x について Taylor 展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

上式から下式を差し引く

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + 2 \cdot \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$\partial u / \partial x \Big|_{i,j}$ について解く

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

空間の中心差分近似(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

であることを示している。これを空間の中心差分近似 (centered space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について2次の正確度を持つ。

2階の導関数の差分商(1/2)

$u_{i+1,j}$ 、 $u_{i-1,j}$ を点 (i,j) において x について Taylor 展開

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \Delta x^3 + \dots$$

上式と下式を足し合わせる

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + \dots$$

$\partial^2 u / \partial x^2 \Big|_{i,j}$ について解く

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

2階の導関数の差分商(2/2)

これは、導関数 $\partial u / \partial x$ を表現する差分商 $\Delta u / \Delta x$ の1つが

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

であることを示している。これを空間の中心差分近似 (centered space difference) という。

Taylor展開の打ち切りの状況から、この式は空間について2次の正確度を持つ。

空間の差分商(1/2)

$u_{i,j}$ の時空間の点(i,j)における空間についての差分商

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{前進差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{後退差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{中心差分近似})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

時空間の差分商(2/2)

u_i^n の時空間の点(i,n)における時間についての差分商

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{前進差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{後退差分近似})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{中心差分近似})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

波動方程式(双曲型)の差分スキーム

波動方程式の有限差分スキーム

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

差分方程式(中心差分)

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) = 0$$

u_i^{n+1} について解く。

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + \lambda^2 u_{i+1}^n + 2(1 - \lambda^2) u_i^n + \lambda^2 u_{i-1}^n \quad \lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

→ CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) スキーム

λ : CFL数 (CFL number)

波動方程式の差分スキームのプログラム例

u_i^{n+1} についての差分方程式

$$u_i^{n+1} = -u_i^{n-1} + \lambda^2 u_{i+1}^n + 2(1 - \lambda^2) u_i^n + \lambda^2 u_{i-1}^n \quad \lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

u_i^{n+1} を求めるためのプログラム (BASIC)

1490 *CFL

1500 FOR I=2 TO IM1

1510 U(I)=-U2(I)+L2*U1(I+1)+2*(1-L2)*U1(I)+L2*U1(I-1)

1520 NEXT I:RETURN

対流方程式の(陽)差分スキーム

対流方程式: $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

差分方程式: $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2) = 0$

u_i^{n+1} について解く。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

→ FTCS (Forward-Time Centered Space) スキーム

C: Courant数 (Courant number)

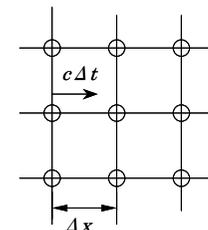
クーラン(Courant)条件

- 速度を c とすると、微小時間 Δt に進む距離は、 $c \cdot \Delta t$ となる。物理的には、この距離が、差分した微小区間 Δx を超えると計算が発散してしまう。そのためには、

$$c \Delta t < \Delta x$$

- でなければならない。すなわち、以下の条件を、Courant 条件といい、計算結果の安定性に影響を与えものである。

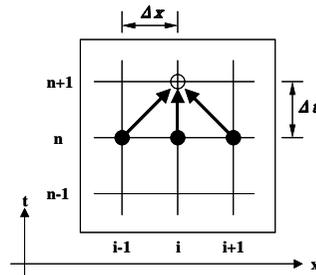
$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} < 1$$



対流方程式の差分スキーム(その1) (FTCSスキーム)

u_i^{n+1} についての差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



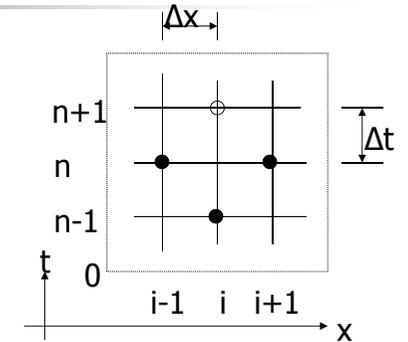
FTCSスキームによるプログラム例

```
1620 *FTCS
1630 FOR I=2 TO IM1
1640 TP1=-.5*CDTDX*(UN(I+1)-UN(I-1))
1660 U(I)=UN(I)+TP1:NEXT I:RETURN
```

対流方程式の差分スキーム(その2) 蛙とび法 (Leap frog scheme)

蛙とび法による差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$



蛙とび法によるプログラム例

```
1670 *LPFRG
1680 FOR I=2 TO IM1
1690 TP1=-CDTDX*(UN(I+1)-UN(I-1))
1710 U(I)=U2(I)+TP1:NEXT I:RETURN
```

対流方程式の差分スキーム(その3) 風上差分 (Upwind scheme)

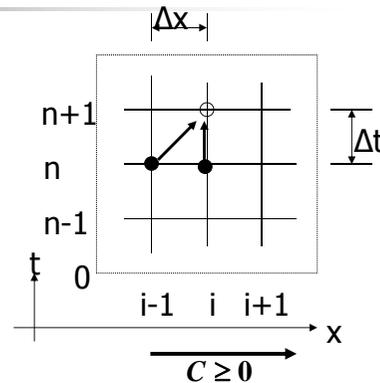
風上差分法による差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad C \geq 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad C \leq 0$$

風上差分法によるプログラム例

```
1570 *UPWND
1580 FOR I=2 TO IM1
1590 TP1=-CDTDX*(UN(I)-UN(I-1))
1610 U(I)=UN(I)+TP1:NEXT I:RETURN
```



対流方程式の陰解法 (Implicit scheme) (1/3)

対流方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

対流方程式を時刻n+1において、時間:後退差分近似、空間:中心差分近似すると、次のような差分方程式が得られる。

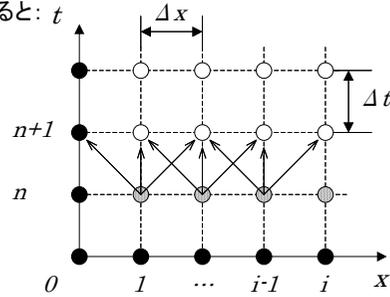
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

u_{i+1}^{n+1} 、 u_i^{n+1} 、 u_{i-1}^{n+1} を変数値として差分スキームを求めると

$$\frac{1}{2} \alpha u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

対流方程式の陰解法(Implicit scheme) (2/3)

- 0 ≤ x ≤ I の区間をi分割した場合を考えると: t



- i=1のとき

$$-\frac{\alpha}{2}u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \frac{\alpha}{2}u_2^{n+1} = u_1^n$$

- i=2のとき

$$-\frac{\alpha}{2}u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + \frac{\alpha}{2}u_3^{n+1} = u_2^n$$

- i=3のとき

$$-\frac{\alpha}{2}u_2^{n+1} + u_3^{n+1} + \frac{\alpha}{2}u_4^{n+1} = u_3^n$$

- i=iのとき

$$-\frac{\alpha}{2}u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{\alpha}{2}u_{i+1}^{n+1} = -\frac{\alpha}{2}u_{i-1}^n + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)u_i^n = u_i^n$$

- 以上の連立方程式を行列で表すと、

対流方程式の陰解法(Implicit scheme) (3/3)

- 差分方程式の行列式:

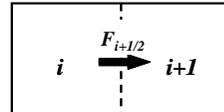
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} & \ddots & & \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \vdots & & & & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i-2}^{n+1} \\ u_{i-1}^{n+1} \\ u_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n + \frac{\alpha}{2}u_0^{n+1} \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{i-1}^n \\ u_i^n - \frac{\alpha}{2}u_i^{n+1} \end{bmatrix}$$

境界条件
 $\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = 0$
 を利用して決定する

- 以上の行列の式を解くことによって、各時刻における変位が求まる。

最新の空間差分スキーム

- QUICK -



1次元対流方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}$$

セルで積分

$$\Rightarrow \phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{V_i} \quad F_{i+1/2}^n = u_{i+1/2}^n \phi_{i+1/2}^n S_{i+1/2}$$

セル境界の物理量 $u_{i-1/2}^{n+1}$ を境界の前後を挟む2つのセルと風上側に1つ離れたセルの値を用いて2次の多項式で内挿

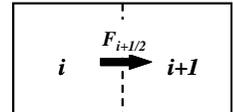
$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{8}(-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}) & u \geq 0 \\ \frac{1}{8}(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i) & u < 0 \end{cases}$$

⇒ 差分式:

$$\phi_i^{n+1} = \begin{cases} \phi_i^n - \Delta t u \frac{3\phi_{i+1} + 3\phi_i - 7\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{8\Delta x} & u \geq 0 \\ \phi_i^n + \Delta t u \frac{3\phi_{i-1} + 3\phi_i - 7\phi_{i+1} + \phi_{i+2}}{8\Delta x} & u < 0 \end{cases}$$

最新の空間差分スキーム

- QUICKEST -



セル境界の物理量 $u_{i-1/2}^{n+1}$ を境界の前後を挟む2つのセルと風上側に2つ離れたセルの値を用いて2次の多項式で内挿

$$\phi_i^{n+1} = \begin{cases} \phi_i^n - \frac{c}{6}(2\phi_{i+1}^n + 3\phi_i^n - 6\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n) + \frac{c^2}{2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \\ \quad - \frac{c^3}{6}(\phi_{i+1}^n - 3\phi_i^n + 3\phi_{i-1}^n - \phi_{i-2}^n) & c \geq 0 \\ \phi_i^n + \frac{c}{6}(2\phi_{i-1}^n + 3\phi_i^n - 6\phi_{i+1}^n + \phi_{i+2}^n) + \frac{c^2}{2}(\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n) \\ \quad + \frac{c^3}{6}(\phi_{i-1}^n - 3\phi_i^n + 3\phi_{i+1}^n - \phi_{i+2}^n) & c < 0 \end{cases}$$

⇒ 差分式:

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{c}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1-c^2}{6}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \\ \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{c}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i) - \frac{1-c^2}{6}(\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i) \end{cases}$$

最新の空間差分スキーム

- TVD (Total Variation Diminishing) (1/2)-

セル境界で物理量を内挿する際、数値振動が発生する場所には1次精度の風上差分を、それ以外では高次精度の差分スキームを用いる。

$$\phi_{i+1/2}^n = \begin{cases} \phi_i^n + \frac{1}{2} \psi_{i-1/2}^+ (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) & u \geq 0 \\ \phi_{i+1}^n - \frac{1}{2} \psi_{i+3/2}^- (\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n) & u < 0 \end{cases}$$

ここで、 ψ はリミッターで近傍の ϕ の分布によって値を変化させる

$$\begin{aligned} \psi_{i-1/2}^+ &= \psi_{i-1/2}^+(r_{i-1/2}^+) \quad \text{ただし} \quad r_{i-1/2}^+ = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n} \\ \psi_{i+3/2}^- &= \psi_{i+3/2}^-(r_{i+3/2}^-) \quad r_{i+3/2}^- = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n} \end{aligned}$$

TVD条件を満たす代表的なリミッターには、以下のminmod関数がある

$$\psi_{i-1/2}^+ = \min \text{mod}(1, r_{i-1/2}^+) \quad \Rightarrow \quad \min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ y & |x| > |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases}$$

最新の空間差分スキーム

- TVD (Total Variation Diminishing) (2/2)-

$$\phi_{i+1/2}^n = \begin{cases} \phi_i^n + \frac{1}{2} \psi_{i-1/2}^+ (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) & u \geq 0 & \psi_{i-1/2}^+ = \psi_{i-1/2}^+(r_{i-1/2}^+) & r_{i-1/2}^+ = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n} \\ \phi_{i+1}^n - \frac{1}{2} \psi_{i+3/2}^- (\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n) & u < 0 & \psi_{i+3/2}^- = \psi_{i+3/2}^-(r_{i+3/2}^-) & r_{i+3/2}^- = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n} \end{cases}$$

$$\psi_{i-1/2}^+ = \min \text{mod}(1, r_{i-1/2}^+) \quad \min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ y & |x| > |y| \text{ and } xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases}$$



$$\min \text{mod}(1, r) = \begin{cases} 1 & 1 \leq r \\ r & 0 \leq r < 1 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

これにより、3種類の差分スキームを状況に応じて使い分けることができる。

- $1 < r$ の場合: 変数の勾配が風下方向の増加 → 2次風上差分を適用
- $0 < r < 1$ の場合: 変数の勾配が風下方向に減少 → 2次中心差分を適用
- $r < 0$ の場合: 変数の勾配が逆転 → 1次風上差分を適用

最新の空間差分スキーム

- CIP (Cubic-interpolated pseudo particle) -

物理量の空間1階微分を変数として持ち、その移流方程式を同時に解く。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

さらに、 ϕ の空間分布を3次の補間式で近似する。

$$\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

この補間式の4つの係数は、位置 i と位置 $i-1$ での変数と空間微分値によって、次式によって決定する

$$\begin{aligned} a_0 &= \phi \\ a_1 &= (\phi, x) \\ a_2 &= \frac{2(\phi, x)_i + (\phi, x)_{i-1}}{\Delta x} - 3 \frac{[\phi - \phi_{i-1}]}{\Delta x^2} \\ a_3 &= \frac{[(\phi, x)_i + (\phi, x)_{i-1}]}{\Delta x^2} - 2 \frac{[\phi - \phi_{i-1}]}{\Delta x^3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= \phi_i^n - \Delta t u \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^{n+1} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^n - \Delta t u 2 \left[\frac{2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^n + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i-1}^n}{\Delta x} - 3 \frac{[\phi_i^n - \phi_{i-1}^n]}{\Delta x^2} \right] \end{aligned}$$

熱伝導方程式(放物型)の差分スキーム

熱伝導方程式の陽解法(Explicit scheme)

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

差分方程式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + o(\Delta t) + o(\Delta x^2)$$

u_i^{n+1} について解くと、以下のFTCSスキームが得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

FTCSスキーム

d: 拡散数(diffusion number)

熱伝導方程式の陽解法

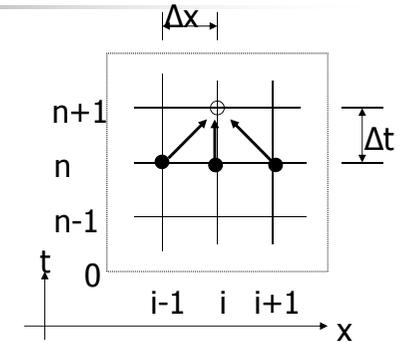
差分方程式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

陽解法によるプログラム例

```
1590 *FTCS
1600 FOR I=2 TO IM1
1610 U(I)=UN(I)+D*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))
1620 NEXT I:RETURN
```



熱伝導方程式の陰解法 (Implicit scheme)

熱伝導方程式: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

時間に後退差分近似、空間に中心差分近似した差分方程式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + o(\Delta t) + o(\Delta x^2)$$

u_{i-1}^{n+1} , u_i^{n+1} , u_{i+1}^{n+1} を変数値として差分スキームを求める。

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

熱伝導方程式の陰解法

差分方程式:

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

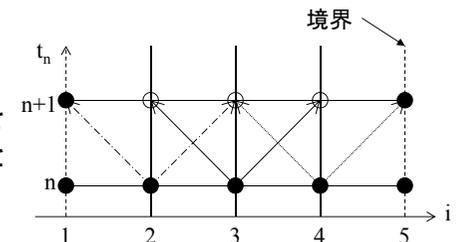
(例) $i=1 \sim 5$ を考える。 $i=1$, $i=5$ を境界条件を満足する境界点とし、 $i=2, 3, 4$ を内点とする。

$$(1+2d)u_2^{n+1} - du_3^{n+1} = u_2^n + du_1^{n+1}$$

$$-du_2^{n+1} + (1+2d)u_3^{n+1} - du_4^{n+1} = u_3^n$$

$$-du_3^{n+1} + (1+2d)u_4^{n+1} = u_4^n + du_5^{n+1}$$

N元連立一次方程式



熱伝導方程式の陰解法

三重対角行列

$$\begin{pmatrix} (1+2d) & -d & 0 \\ -d & (1+2d) & -d \\ 0 & -d & (1+2d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^n + du_1^{n+1} \\ u_3^n \\ u_4^n + du_5^{n+1} \end{pmatrix}$$

陰解法によるプログラム例(行列の設定)

```
2020 *SPMTRX
2030 FOR I=1 TO IBAR
2040 A(I,I)=1+2*BETA:NEXT I
2050 FOR I=1 TO IBAR-1:A(I,I+1)=-BETA:NEXT I
2060 FOR I=1 TO IBAR-1:A(I+1,I)=-BETA:NEXT I:RETURN
```

熱伝導方程式の陰解法

陰解法によるプログラム例(三重対角行列の解法)

```
1580 *Gauss-Jordan eliminator 1720 *back substitution
1590 *GSSJOD 1730 FOR I=1 TO IBAR
1591 ' *forward elimination 1740 U(I)=B(I)*D1(I)
1600 FOR K=1 TO IBAR 1760 NEXT I
1610 D1(K)=1/A(K,K)
1620 FOR I=1 TO IBAR
1630 IF I=K THEN GOTO 1700
1640 M(I,K)=A(I,K)*D1(K)
1650 FOR J=K+1 TO JBAR
1660 A(I,J)=A(I,J)-M(I,K)*A(K,J)
1670 NEXT J
1680 B(I)=B(I)-M(I,K)*B(K)
1690 A(I,K)=0
1700 NEXT I
1710 NEXT K
```

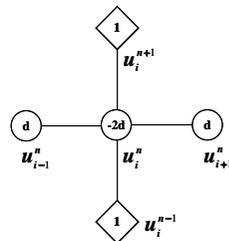
歴史的な経緯 - 初期の差分法 Richardson(1881-1953)の方法

- 差分の考え方は1860年代、既にあった。しかしながら、
- 放物型方程式に対して初めて差分法を適用したのは、Richardson(1881-1953)で、1910年のことである。
- Richardson は1次元熱伝導方程式に対して、時間と空間微分に中心差分を用いることにより、以下の差分式を導いた。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + d(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



- 残念ながら、このスキームは、拡散数dの値によらず不安定となるため、正しい解が得られないスキームであった。
- 近年、このRichardsonスキームは不安定なスキームの代表例として扱われることがあるが、初めて実用的な計算に差分法を適用しようとした試みとして高く評価されるものである。

Richardsonの夢

- リチャードソンは気象学に興味を持ち、微分方程式を離散化して数値的に解くという現在使われている気象予測の原型ともいえる数値予報システムを提案した。
- そのために、大戦中に集めたデータを用いた計算を実際に行ったが、計算をすべて手で行ったためわずか6時間の予報に2ヶ月かかり、しかも数値の処理に問題があったため、予報は失敗に終わった。
- 1922年に著書の中で彼は、64,000人の計算者を巨大なホールに集めて指揮者の元で整然と計算を行えば実際の天候の変化と同じくらいの速さで予報が行えると見積もった。この構想は「リチャードソンの夢」と呼ばれた。
- またリチャードソンは乱気流に関する実験も数多く行っている。乱流に関する無次元数「リチャードソン数」は彼の名前にちなんでいる。

デュフォール・フランケル法(DF法)

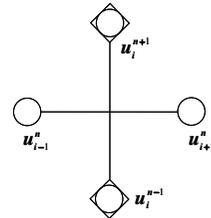
- Richardson法は、拡散数に関わらず不安定な差分スキームであったが、DufortとFrankelは、1953年、空間の2階微分に対する差分表示を時間平均値とする差分スキームを導いた。
- このスキームは、拡散方程式に対するLeapfrog法(あるいはPyramid法)とも呼ばれているが、対流方程式に対するLeapfrog法と異なり、安定なスキームとなっている。(→ 安定解析により証明)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\Downarrow u_i^n = \frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t^2} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{1+2d} [2d(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + (1-2d)u_i^{n-1}]$$



$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

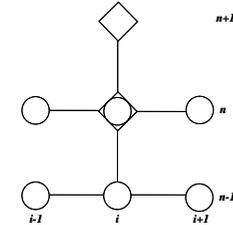
アダムス・バッシュフォース法(AB法)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[\beta \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + (1-\beta) \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{\Delta x^2} \right]$$

$$\Downarrow \beta = \frac{3}{2}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{3}{2} \{ du_{i-1}^n + (1-2d)u_i^n + du_{i+1}^n \} - \frac{1}{2} \{ du_{i-1}^{n-1} + (1-2d)u_i^{n-1} + du_{i+1}^{n-1} \}$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



クランク・ニコルソン法(CN法) ← 陰解法

- CN法は、空間微分に対してnとn-1の2つの時間レベルの算術平均を取っている。
- 得られる漸化式は、各種の行列演算を用いて解かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

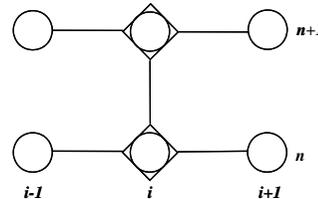
$$\Downarrow f^{n+1} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \{ f^{n+1} + f^n \}$$



$$-du_{i-1}^{n+1} + 2(1+d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = du_{i-1}^n + 2(1-d)u_i^n + du_{i+1}^n$$

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



Poisson方程式(楕円型)の差分スキーム

(1/6) 中心差分スキームの適用

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$$

空間に中心差分近似を用いた差分方程式

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -g_{i,j}$$

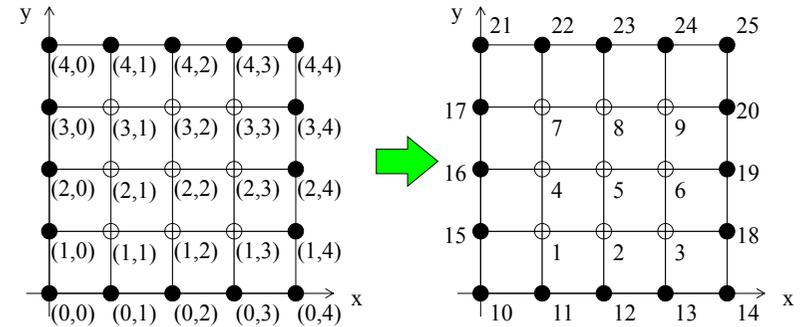
$\Delta x = \Delta y$ とする。

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 g_{i,j}$$

(2/6) Natural ordering

Natural ordering:

$u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{3,3}$ を u_1, u_2, \dots, u_9 と番号を付け直す



(3/6) 行列式

Natural ordering によって差分式は以下のように表すことができる

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & 4 & & & & & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & & & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & & \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_1 + u_{11} + u_{15} \\ \Delta x^2 g_2 + u_{12} \\ \Delta x^2 g_3 + u_{13} + u_{18} \\ \Delta x^2 g_4 + u_{16} \\ \Delta x^2 g_5 \\ \Delta x^2 g_6 + u_{19} \\ \Delta x^2 g_7 + u_{17} + u_{22} \\ \Delta x^2 g_8 + u_{23} \\ \Delta x^2 g_9 + u_{20} + u_{24} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

(4/6) 行列式の要素 ~ 三重対角行列

$$U_1 = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T, \quad U_2 = (u_4 \ u_5 \ u_6)^T, \quad U_3 = (u_7 \ u_8 \ u_9)^T$$

$$B_1 = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T, \quad B_2 = (b_4 \ b_5 \ b_6)^T, \quad B_3 = (b_7 \ b_8 \ b_9)^T$$

以上の置き換えによって、行列式は、以下の形に書き換わる

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \\ & A_{32} & A_{33} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

ここで

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} & & \\ -1 & & \\ & -1 & \end{pmatrix} \quad (i,j=1,2,3 : i \neq j)$$

(5/6) ブロック三重対角行列の解法

係数行列の設定:

A行列の設定:

```

1710 *specification of A
1720 *MTRX
1740 FOR I=1 TO IBAR: AII(I,I)=4:NEXT I
1750 FOR I=2 TO IBAR: AII(I,I-1)=-1:NEXT I
1760 FOR I=1 TO IBAR-1: AII(I,I+1)=-1:NEXT I
1770 FOR I=1 TO IBAR: AIJ(I,I)=-1:NEXT I
1780 FOR J0=1 TO JBAR
1790 FOR I=1 TO IBAR: FOR J=1 TO JBAR
1800 IP=I+JBAR*(J0-1): JP=J+JBAR*(J0-1)
1810 A(IP,JP)=AII(I,J): NEXT J: NEXT I
1820 NEXT J0
1830 FOR J0=1 TO JBAR-1
1840 FOR I=1 TO IBAR: FOR J=1 TO JBAR
1850 IP=I+JBAR*J0: JP=J+JBAR*(J0-1)
1860 A(IP,JP)=AIJ(I,J): NEXT J: NEXT I
1870 NEXT J0
1880 FOR J0=1 TO JBAR-1
1890 FOR I=1 TO IBAR: FOR J=1 TO JBAR
1900 IP=I+JBAR*(J0-1): JP=J+JBAR*J0
1910 A(IP,JP)=AIJ(I,J): NEXT J: NEXT I
1920 NEXT J0: RETURN
    
```

b行列の設定:

```

1940 *specification of b
1950 *RHS
1960 FOR I=1 TO IJBAR: B(I)=G0*DXY:NEXT I: RETURN
1970 FOR I=IBAR TO IJBAR STEP IBAR: B(I)=U0: NEXT I: RETURN
    
```

(6/6) ブロック三重対角行列の解法

ガウスの消去法による行列の解法

```

1440 *Gaussian eliminator for A*u=b
1450 *GAUSS
1470 FOR K=1 TO IJBAR
1480 D1(K)=1/A(K,K)
1490 FOR I=K+1 TO IJBAR
1500 M(I,K)=A(I,K)*D1(K)
1510 FOR J=K+1 TO IJBAR
1520 A(I,J)=A(I,J)-M(I,K)*A(K,J)
1530 NEXT J
1540 B(I)=B(I)-M(I,K)*B(K)
1550 A(I,K)=0
1560 NEXT I
1580 NEXT K
1590 D1(IJBAR)=1/A(IJBAR,IJBAR)
1600 *backward substitution
1610 U(IJBAR)=B(IJBAR)*D1(IJBAR)
1620 FOR I= 2 TO IJBAR
1630 IR1=IJBAR-I+1
1640 SUM=0: FOR J=IR1+1 TO IJBAR
1650 SUM=SUM+A(IR1,J)*U(J): NEXT J
1660 U(IR1)=(B(IR1)-SUM)/A(IR1,IR1)
1690 NEXT I
    
```

5点差分スキーム

(Five-term recurrence scheme)

$\Delta x = \Delta y$ とした場合のPoisson方程式の差分近似式

$$-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 g_{i,j}$$

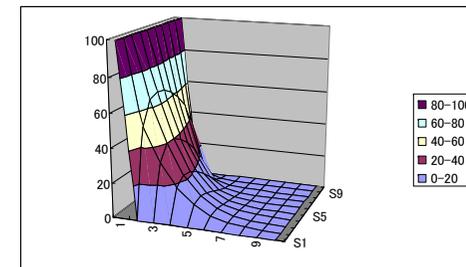
$u_{i,j}$ について整理すると、

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + \Delta x^2 g_{i,j})$$

変数、 $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$ が既知の場合、 $u_{i,j}$ の値が求まることを示している。

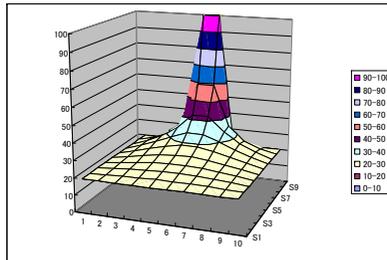
表計算ソフトによる熱伝導解析(1/2)

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0	51.07237	64.4262	66.64282	65.19423	61.99906	57.19167	49.72089	37.43022	0
0	31.6532	39.86327	39.9896	36.95083	32.13504	25.61034	17.04673	4.261682	0
0	18.33154	22.32332	21.16744	17.95006	13.67962	8.787319	3.538683	0.884671	0
0	9.599884	11.13954	9.804685	7.44554	4.818129	2.370757	0.884245	0.221061	0
0	4.507474	4.936661	3.986152	2.683597	1.479724	0.668902	0.241968	0.060492	0
0	1.896977	1.953679	1.448326	0.878807	0.45038	0.195639	0.069671	0.017418	0
0	0.716155	0.697562	0.483257	0.27722	0.136799	0.058171	0.020536	0.005134	0
0	0.227735	0.213375	0.142508	0.079438	0.038443	0.016165	0.00568	0.00142	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



表計算ソフトによる熱伝導解析(2/2)

20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
20	20.36674	20.69783	20.954	21.09569	21.09575	20.95416	20.69803	20.36669	20	20
20	20.76934	21.47087	22.02284	22.33339	22.33335	22.02314	21.47124	20.76962	20	20
20	21.24008	22.39394	23.33364	23.88207	23.88221	23.33402	22.39441	21.24042	20	20
20	21.79738	23.53172	25.03634	25.97965	25.9798	25.03674	23.53221	21.79775	20	20
20	22.41812	24.89976	27.30095	29.02103	29.02117	27.30133	24.90022	22.41846	20	20
20	22.97566	26.34872	30.24724	33.78289	33.78301	30.24755	26.3491	22.97595	20	20
20	23.13608	27.27259	33.55684	42.08071	42.08079	33.55705	27.27286	23.13628	20	20
20	22.29624	26.04895	34.62707	58.90258	58.90262	34.62718	26.04909	22.29634	20	20
20	20	20	20	100	100	20	20	20	20	20
				加熱部						



差分法の特徴

(1/5)微係数を差分商に置き換える

対流方程式の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

差分方程式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

微係数を差分商に置き換える操作は数学的表現として、元の方程式の形が大きく崩れないで、差分方程式に引き継がれる。

(2/5)物理の過程を忠実に再現

対流方程式の差分方程式:

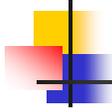
$$u_i^{n+1} = u_i^n - c(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad c = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

初期値問題において、時間の進展を一つ一つの Δt の増分として現象を追跡している。

Laplace方程式の差分式 ($g_{i,j}=0$ とし、 u :物質の濃度)

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

周囲の4点の平均として、注目している点の濃度が決定される。という物理学における拡散の過程までもが理解される。



(3/5) 数学的な意味付けが容易

偏微分方程式の従属変数をTaylor展開して差分方程式に変換したとみなすと、
打切り誤差、境界条件の誤差の評価が容易となり、高次項まで考慮した差分法の数学的な意味付けも容易に得られる。



(4/5) 汎関数の存在を必要としない

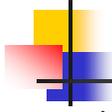
スカラー関数 $u(x,y)$ に対するDirichlet積分は、対象領域を D として

$$I = \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

で定義される。この汎関数を最小とする問題のEuler-Lagrangeの方程式は、次のLaplace方程式である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

差分法では、対象としている偏微分方程式についての汎関数が存在するか否かを気にかける必要がない。



(5/5) 検証が容易

差分スキームによる計算アルゴリズムは、物理的直感が働きやすく、定式化と変換の次にくる計算過程の設計や検証が容易である。例えば、

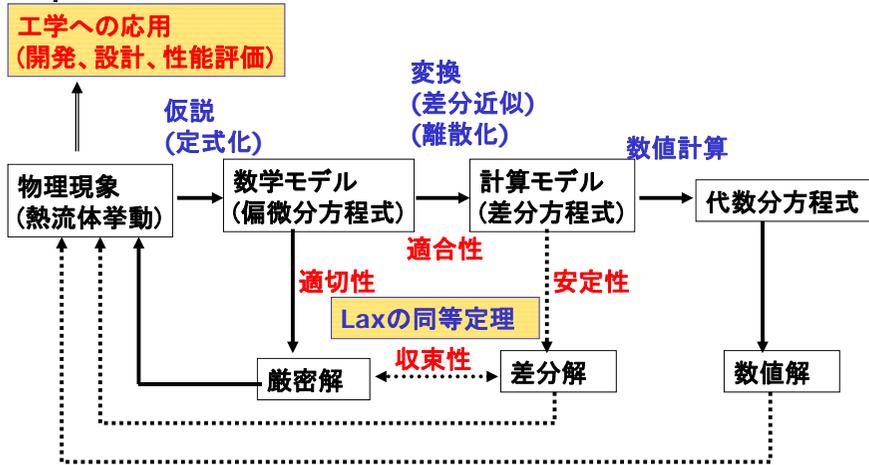
$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

において $C=1$ としたとき、次の厳密な差分解

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$$

が得られる。この場合には Δt が1つ増加すると、点 $(i-1, n)$ の変数 u が x の正方向に Δx だけ移動して点 $(i, n+1)$ に進行するという有向性の意味が明確になる。

変換 —変化する方程式の定性的性質—



差分法方程式の適合性の評価

対流・拡散方程式について、

1. FTCSスキーム: 1次の打ち切り誤差
(打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t)$)
2. Leap Frog スキーム: 2次の打ち切り誤差
(打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t^2)$)
3. 風上差分: 1次の打ち切り誤差
(打ち切り誤差 $O(\Delta x)$, $O(\Delta t)$)

FTCSスキーム (1.5次の打ち切り誤差)

対流・拡散方程式について、FTCSスキームを用いて差分近似する

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

差分スキーム:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2} + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Leap Frog スキーム (2次の打ち切り誤差)

対流・拡散方程式について、2次の打ち切り誤差となる差分近似

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

(打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t^2)$)

差分スキーム:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + 2d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

風上差分（1次の打ち切り誤差）

対流・拡散方程式について、1次の打ち切り誤差となる差分近似

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

（打ち切り誤差 $O(\Delta x)$, $O(\Delta t)$ ）

差分スキーム：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

差分法方程式の適合性の評価

対流・拡散方程式について、

1. FTCS: 1.5次の打ち切り誤差 \Rightarrow 不安定
2. Leap Frog: 2次の打ち切り誤差 \Rightarrow 不安定
3. 風上差分: 1次の打ち切り誤差 \Rightarrow 安定

Program: ADVDF1

動的不安定性と静的不安定性

拡散・対流方程式に対するFTCS近似

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

この方程式の解に「ゆらぎ」が含まれているとする。時刻nの解をゆらぎのない差分解 \bar{u}_i^n とゆらぎ ε_i に分ける。

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \varepsilon_i$$

この式をFTCS近似式に代入し、時刻nでゆらぎのない差分解が存在すると仮定すると、 Δt 進めたときの増分 Δu_i は

$$\Delta u_i = -\Delta t \frac{c}{2\Delta x} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}) + \Delta t \alpha \frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{\Delta x^2}$$

動的不安定性

右辺第2項のみを考える。点i近傍の初期摂動を

$$\varepsilon_{i-1} > 0, \quad \varepsilon_i < 0, \quad \varepsilon_{i+1} > 0, \quad \varepsilon_{i+2} < 0$$

とする。この初期摂動を Δu_i の式に代入すると

$$\Delta u_i = \Delta t \alpha \frac{\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i}{\Delta x^2} > 0$$

が得られる。つまり点iの摂動は $\varepsilon_i < 0$ であったが $\Delta u_i > 0$ となって、時間を Δt 進めることによって摂動 ε_i を増分 Δu_i が補償する傾向になる。同様に点i+1における増分 Δu_{i+1} を考えると、

$$\Delta u_{i+1} = \Delta t \alpha \frac{\varepsilon_{i+2} + \varepsilon_i - 2\varepsilon_{i+1}}{\Delta x^2} < 0$$

となり、摂動 ε_{i+1} を増分 Δu_{i+1} が補償する傾向になる。

静的不安定性

右辺第1項のみを考える。点*i*近傍の初期摂動を

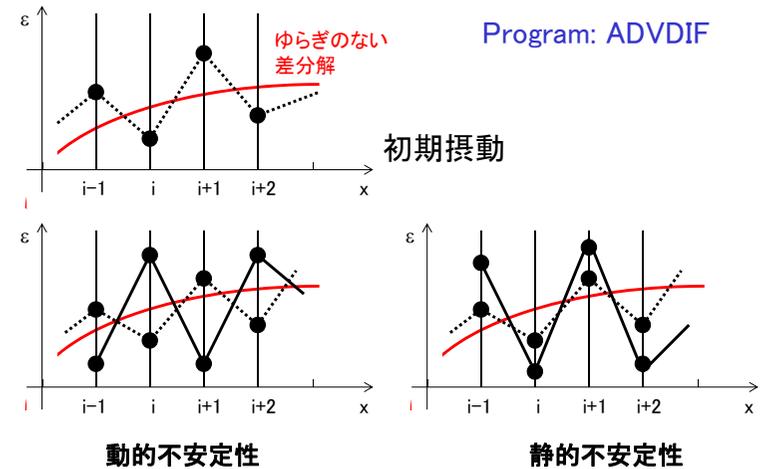
$$\varepsilon_{i-1} > 0, \varepsilon_i < 0, \varepsilon_{i+1} > 0, \varepsilon_{i+2} < 0$$

とする。同様に、この初期摂動を Δu_i の式に代入すると

$$\Delta u_i = -\Delta t \frac{u}{2\Delta x} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}) < 0 \quad (\text{ただし、}\varepsilon_{i+1} \geq \varepsilon_{i-1})$$

となる。つまり点*i*の摂動は $\varepsilon_i < 0$ であるのに、対流による補償 $\Delta u_i < 0$ となってしまう、摂動は単調に成長する。

動的不安定性と静的不安定性



熱伝導方程式の厳密解 — モデル問題5 —

熱伝導方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

初期条件と境界条件:

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

(解)

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

Von Neumannの安定性解析(1/4)

熱伝導方程式に対するFTCSスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$d = \alpha \Delta t / \Delta x^2$$

この方程式の解のFourier級数のそれぞれの部分を次式のよ
うにする。

$$u_i^n = V^n e^{jki\Delta x}$$

とする。 V^n は波数が*k*である成分の時刻*n*における振幅関数で
ある。 j は虚数単位である。

Von Neumannの安定性解析(2/4)

$\theta = k\Delta x$ として上式を書き改めて、

$$u_i^n = V^n e^{ij\theta}$$

同様に u_i^{n+1} , u_{i+1}^n , u_{i-1}^n もそれぞれ、

$$u_i^{n+1} = V^{n+1} e^{ij\theta}, \quad u_{i\pm 1}^n = V^n e^{(i\pm 1)j\theta}$$

これらをFTCSスキームに代入する。

$$V^{n+1} = V^n [1 + d(e^{j\theta} + e^{-j\theta} - 2)]$$

Gをパラメータとすると、この式は $V^{n+1} = GV^n$ の形をしている。Gを書き改めると

$$G = 1 - 2d(1 - \cos\theta) \quad : \text{増幅行列}$$

Von Neumannの安定性解析(3/4)

熱伝導方程式のFTCSスキームが有界ならば

$$|G| \leq 1$$

が全ての θ について成立しなければならない(安定規準)。

$$-1 \leq 1 - 2d(1 - \cos\theta) \leq 1$$

よって、左側の不等式の $1 - \cos\theta \leq 2$ に注意すると、

$$d \leq \frac{1}{2} \quad \text{あるいは} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

これが熱伝導方程式のFTCSスキームに対する安定性確保の条件である。ここでdを拡散数(diffusion number)という。

拡散数の条件: [Program: HEAT](#)

Von Neumannの安定性解析(4/4)

拡散数の条件についての計算例: [Program: HEAT](#)

(計算例1) 安定な条件の場合

$$\Delta x = \frac{1}{19}$$

$$\Delta t = 0.00125$$

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.4 < \frac{1}{2}$$

(計算例2) 不安定な条件の場合

$$\Delta x = \frac{1}{22}$$

$$\Delta t = 0.002$$

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.8 > \frac{1}{2}$$

安定な差分スキーム: 完全陰解法

熱伝導方程式を時間に後退、空間に中心差分近似したスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$

von Neumannの安定解析を行う。

$$u_i^n = V^n e^{ij\theta}, \quad u_{i\pm 1}^{n+1} = V^{n+1} e^{(i\pm 1)j\theta}$$

これらをスキームに代入して増幅行列Gを求めると、

$$G = 1/[1 + 2d(1 - \cos\theta)]^2$$

$d > 0$, $1 - \cos\theta \geq 0$ であることから $|G| \leq 1$ である。すなわち

この差分スキームは、どのようなdに対しても、安定である。

完全陰解法によるモデル計算例(問題5)

先の解析よりも変域の分割を多くする。
すなわち、 $i=1$ と $i=i_m$ を境界点、 $i=2,3,\dots,i_m-1$ を内点とする。
基礎式に対応する連立一次方程式は、境界条件を含めて

$$Au = b$$

$$u = (u_2^{n+1} \quad u_3^{n+1} \quad \dots \quad u_{i_m-1}^{n+1})^T$$

$$b = (u_2^n + du_1^n \quad u_3^n \quad u_4^n \quad \dots \quad u_{i_m-2}^n \quad u_{i_m-1}^n + du_{i_m}^n)^T$$

$$a_{i,i} = 1 + 2d$$

$$a_{i+1,j} = a_{i,j+1} = -d$$

Program: HEAT

完全陰解法によるモデル計算例(問題5)

完全陰解法による計算例: Program: HEAT
(計算例1) 陽解法では安定 → 陰解法でも安定

$$\Delta x = \frac{1}{19}$$

$$\Delta t = 0.00125$$

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.4 < \frac{1}{2}$$

(計算例2) 陽解法では不安定 → 陰解法では安定

$$\Delta x = \frac{1}{22}$$

$$\Delta t = 0.002$$

$$d = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \approx 0.8 > \frac{1}{2}$$

Courant条件(1/2)

対流方程式の風上差分スキームは

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad C = c\Delta t / \Delta x$$

である。このスキームの安定性について吟味する。まず、数値解のFourier成分を j を虚数単位として、

$$u_i^n = V^n e^{ij\theta}, \quad \theta = k\Delta x$$

とする。この式と

$$u_i^{n+1} = V^{n+1} e^{ij\theta}, \quad u_{i\pm 1}^n = V^n e^{(i\pm 1)j\theta}$$

を上述したスキームに代入して増幅行列 G を求める。

Courant条件(2/2)

増幅行列 G は、

$$|G|^2 = 2C(C-1)(1-\cos\theta) + 1$$

となる。von Neumannの安定性規準は任意の θ に対して

$$|G| \leq 1$$

となることである。この式において、 $C > 0$ 、 $1 - \cos\theta > 0$ であるから、この条件を満足するためには、

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

である。この条件をCourant条件という。

対流方程式の数値解の挙動一 モデル問題3

対流方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初期条件と境界条件:

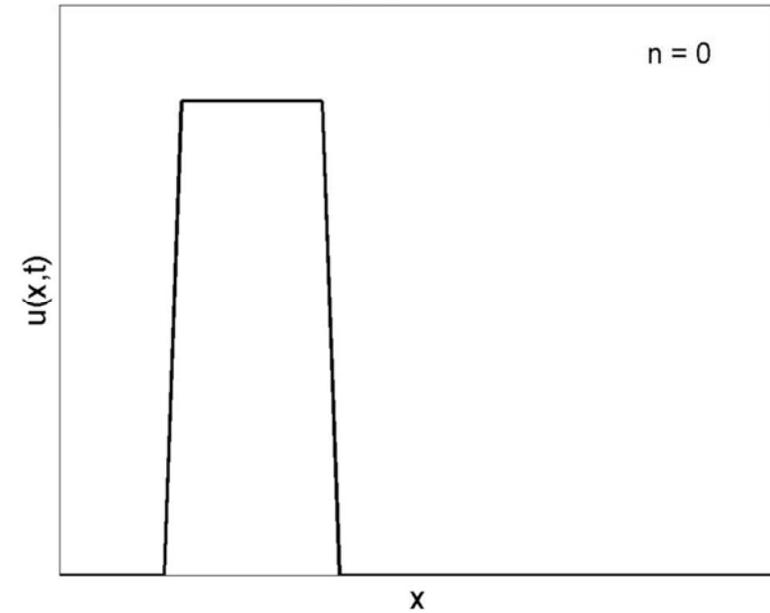
$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/5) \\ 1 & (1/5 \leq x \leq 2/5) \\ 0 & (2/5 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0 \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

(解)

$$u(x,t) = F(x-ct) \quad \longrightarrow \quad \text{Program: ADVEX}$$

$$u(x,t) = F(x-ct)$$



対流方程式の数値解析結果例(1/2)

クーラン数の条件についての計算例: Program: ADVEC

(計算例1) 安定な条件の場合

$$c = 1$$

$$\Delta x = 0.025$$

$$\Delta t = 0.02$$

$$C = 1 \times \frac{0.02}{0.025} = 0.8 < 1$$

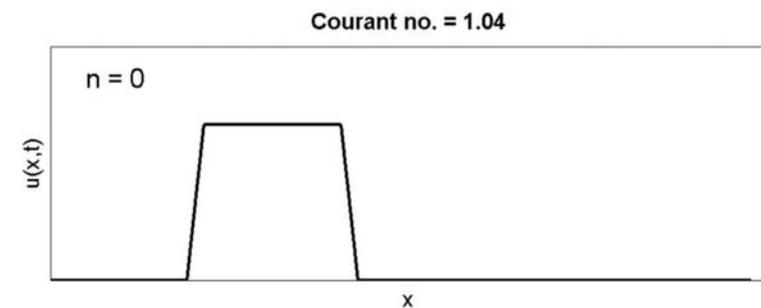
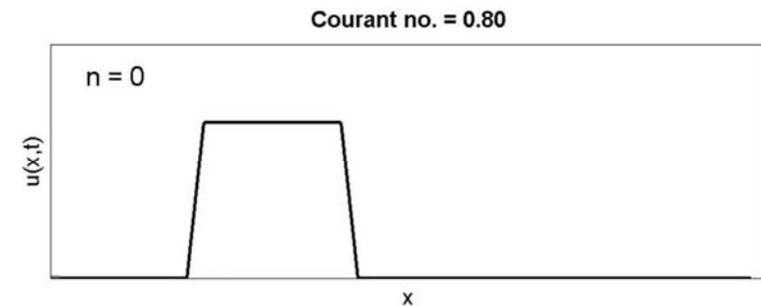
(計算例2) 不安定な条件の場合

$$c = 1$$

$$\Delta x = 0.025$$

$$\Delta t = 0.026$$

$$C = 1 \times \frac{0.026}{0.025} = 1.04 > 1$$



対流方程式の数値解析結果例(2/2)

クーラン数の条件についての計算例: Program: ADVEC

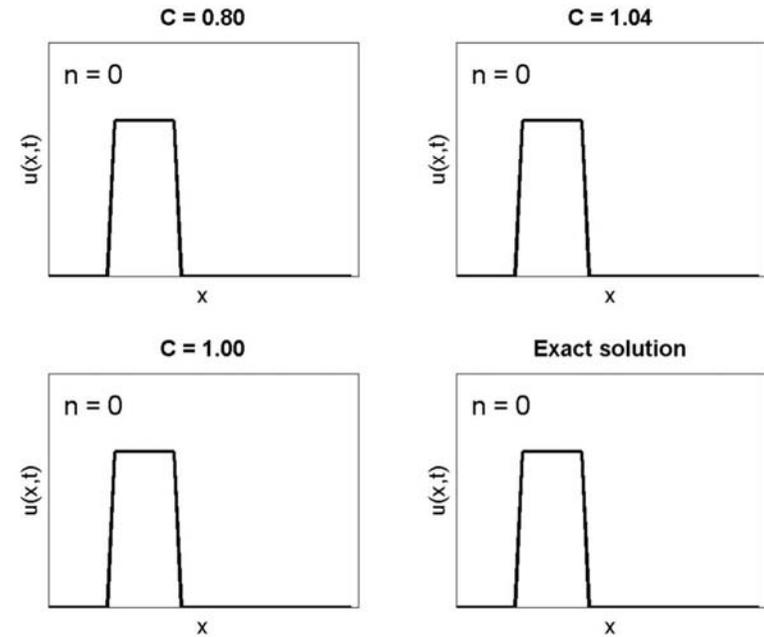
(計算例3) 厳密解と一致する場合

$$c = 1$$

$$\Delta x = 0.025$$

$$\Delta t = 0.025$$

$$C = 1 \times \frac{0.025}{0.025} = 1$$



FTCSスキームの移動性

対流方程式のFTCSスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

摂動 ε が点 i に $\varepsilon_i = \delta$ として存在し他の全ての点では $\varepsilon = 0$ と仮定する。まず、点 $i+1$ における摂動は、

$$u_{i+1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (0 - \delta) = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \delta$$

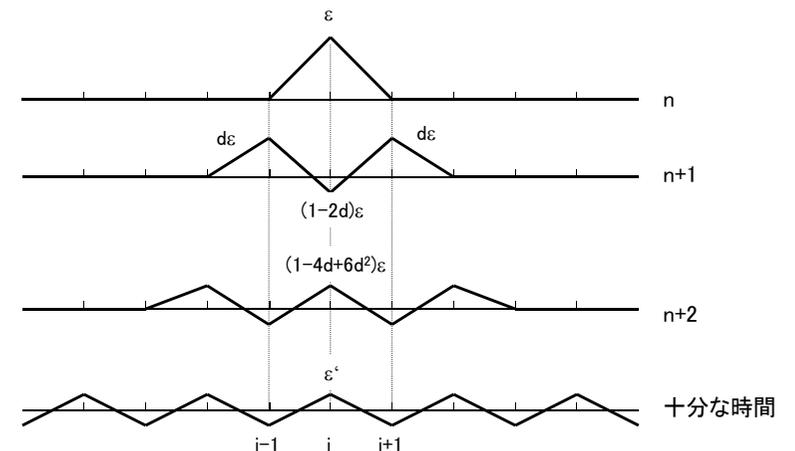
Δt の間に、対流によって摂動が下流へ運ばれている。

摂動の発生点 i では、 $u_i^{n+1} = \delta - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (0 - 0) = \delta$

上流点 $i-1$ では、 $u_{i-1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (\delta - 0) = -\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \delta$

摂動は上流へも運ばれている。

FTCSスキームにおける摂動の移動



風上差分スキームの移動性(1/2)

拡散方程式の風上差分スキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

この式に注目し点*i*での摂動 ε を $\varepsilon_i = \delta$ とし、他の全ての点で0と仮定する。振動発生点*i*の下流*i+1*では

$$u_{i+1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (0 - \delta) = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \delta$$

となり、対流によって摂動が運ばれている。

風上差分スキームの移動性(2/2)

摂動の発生点*i*では同じく、

$$u_i^{n+1} = \delta - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \delta$$

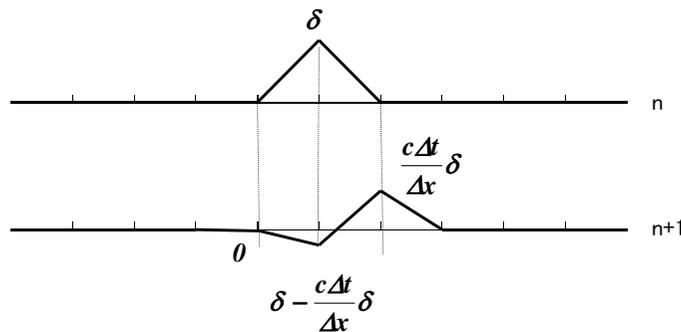
となる。摂動が発生した上流点*i-1*では、

$$u_{i-1}^{n+1} = 0 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (0 - 0) = 0$$

となる。摂動の発生点では、摂動が減少し、その分だけ下流の点に運ばれている。さらに上流点における摂動を調べると、対流による寄与は何もない。すなわち、このスキームは移動性を備えている。

Program: TRANSP

風上差分スキームにおける摂動の移動



差分法方程式の移動性の評価

対流方程式について、

- | | |
|---------------------|-------|
| 1. FTCS: 移動性なし | ⇒ 不安定 |
| 2. Leap Frog: 移動性なし | ⇒ 不安定 |
| 3. 風上差分: 移動性あり | ⇒ 安定 |

Program: ADVDF1

FTCS (Forward-Time Centered Space) スキーム

- 差分式:

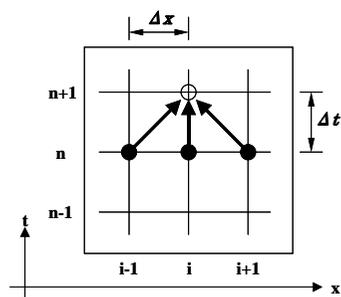
時間: 前進差分、空間: 中心差分で差分化

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- 差分解

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



蛙とび (Leapfrog) スキーム

- 差分式

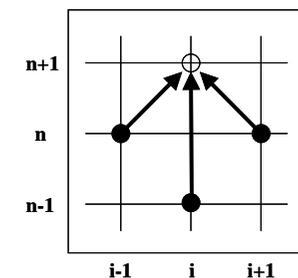
時間: 中心差分、空間: 中心差分

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

- 差分解

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$



ひし形 (Rhomboid) スキーム

- 差分式

$$\frac{1}{2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^n) - \frac{1}{2}(u_i^n - u_{i-1}^{n-1}) = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

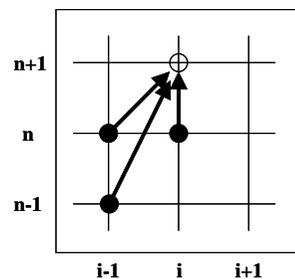
$$(u_i^{n+1} - u_{i-1}^n) - (u_i^n - u_{i-1}^{n-1}) = -2c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + u_i^n - u_{i-1}^{n-1} - 2c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + u_i^n - u_{i-1}^{n-1} - 2Cu_i^n + 2Cu_{i-1}^n$$

- 差分解

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + (1 - 2C)u_i^n + Cu_{i-1}^n$$



風上 (Up-wind) スキーム

- 差分式

時間: 前進差分、空間: 風上差分 (この場合: 後退差分)

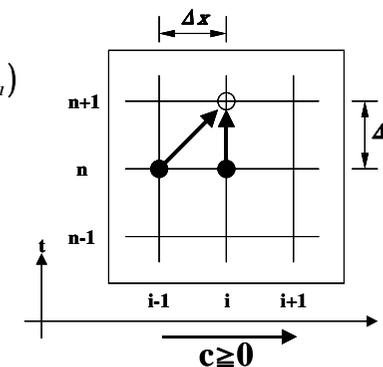
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

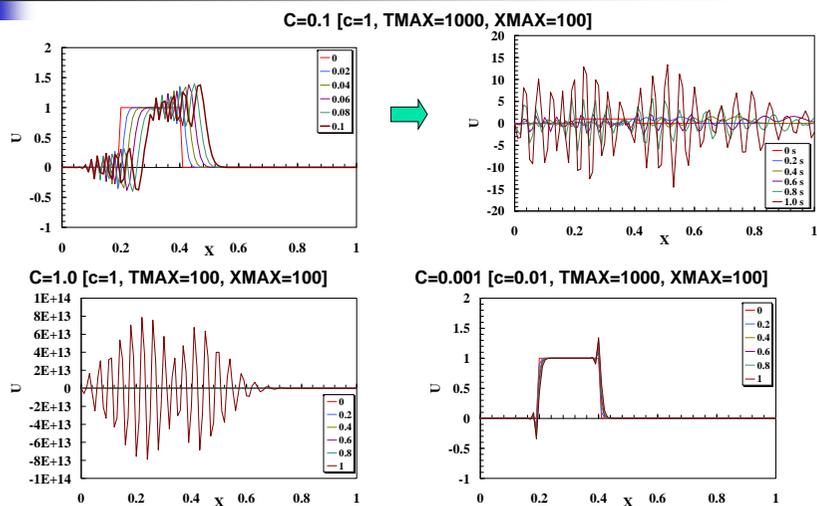
$$u_i^{n+1} = u_i^n - Cu_i^n + Cu_{i-1}^n$$

- 差分解

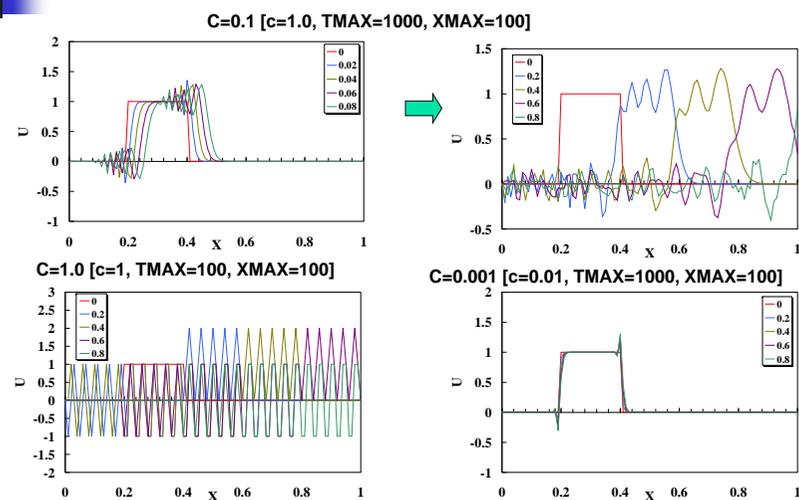
$$u_i^{n+1} = (1 - C)u_i^n + Cu_{i-1}^n$$



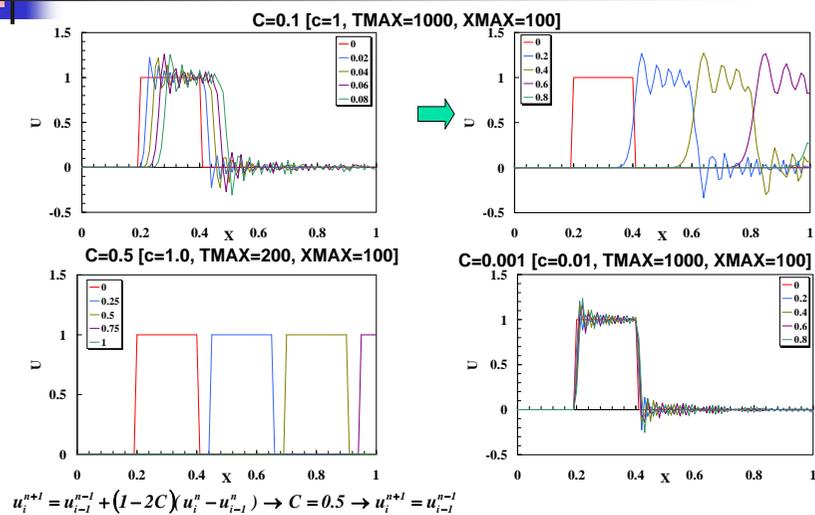
FTCS Schemeによる計算例



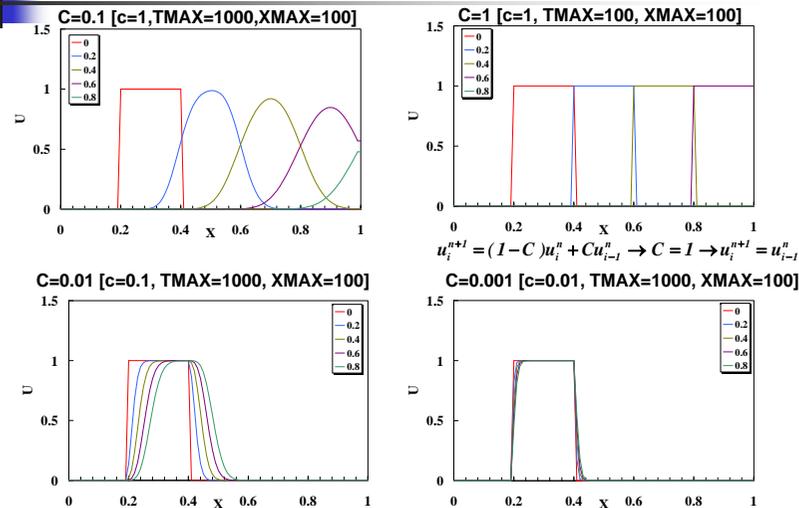
Leapfrog Schemeによる計算例



Rhomboid Schemeによる計算例



Up-wind Schemeによる計算例



Newtonの粘性則

Newtonの粘性則

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy}$$

これは、流体に関する運動方程式に $\nu(\partial^2 u / \partial t^2)$ という形で記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

また、 u を濃度とみたときには $\alpha(\partial^2 u / \partial t^2)$ なる項は濃度の拡散をなしている。

人工粘性

対流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

この式に対する風上差分スキームは

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

点(i,n)まわりのTaylor展開を考えると

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2$$

人工粘性

これらの式をスキームに代入し、整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{c \Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta t}{c \Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

となる。次の関係

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

から、上述の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha_e = \frac{c \Delta x}{2} (1-C), \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

人工粘性

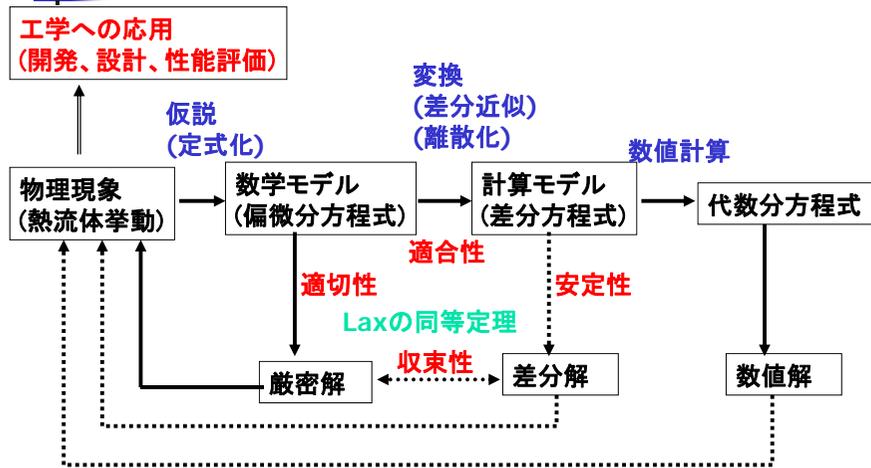
風上差分スキームによって離散化した対流方程式は、実際には、以下の式を解いていることに相当している。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

この式と対流方程式を比べると右辺に新たな項が誘起されている。この項は人工的な付加項である粘性としての効果を持つことがわかる。これを人工粘性 (artificial viscosity) または数値拡散と (numerical diffusion) と呼ぶ

Program: ADVEX

変換 —変化する方程式の定性的性質—



位相誤差(1/4)

対流方程式の風上差分スキームは

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

u のFourier成分 u_i^n を k を波数として

$$u_i^n = G^n e^{jkx} = G^n e^{jki\Delta x} = G^n e^{j\theta}, \quad \theta = k\Delta x$$

とする。ここに G は増幅係数、 $k=2\pi/\lambda$ (λ : 波長)である。同様に、

$$u_{i-1}^n = G^n e^{j(i-1)\theta}$$

とする。

位相誤差(2/4)

両式を差分スキームに代入して整理すると G は

$$G = (1-C) + C \cos \theta - iC \sin \theta$$

$$|G| = 1 - 2C(C-1)(1 - \cos \theta)$$

となる。また位相シフト $\angle G$ は、

$$\begin{aligned} \angle G &= \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} \right] \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{-C \sin \theta}{(1-C) + C \cos \theta} \right] \end{aligned}$$

である。ここに、 $\text{Re}(\cdot)$ と $\text{Im}(\cdot)$ はそれぞれ実数部と虚数部を示す。

位相誤差(3/4)

いま、風上スキームの数値安定性を大きくとり、しかも空間変化を可能なだけ正確に記述しようとする。つまり、

$$C \ll 1, \quad \theta = k\Delta x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \ll 1$$

とすれば、位相シフト $\angle G$ は、

$$\angle G = -C \sin \theta = -C \sin(k\Delta x)$$

と評価される。増幅係数と位相シフトを用いて u のFourier成分を書くと、

$$u_i^n = |G|^n e^{-jC \sin(k\Delta x)n} e^{ikx}$$

となる。

位相誤差(4/4)

ここで、 $iC\sin(k\Delta x)n$ を変形すると、

$$\begin{aligned} iC \sin(k\Delta x)n &= ik \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\sin(k\Delta x)}{k} n \\ &= ik \left[\frac{C \sin(k\Delta x)}{\Delta x} \right] n\Delta t \end{aligned}$$

となる。したがってFourier成分 u_i^n は

$$u_i^n = |G|^n e^{ik(x-C_k t)}, \quad C_k = C \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}, \quad t = n\Delta t$$

となる。この式は波数 k が大きくなると(波長 λ が短くなると)、成分の伝播速度 C_k は小さくなることを示している。

⇒ 分散性(Disperse property)

対流項の差分近似(1/3)

対流・拡散方程式の差分スキーム(モデル10)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Burgers方程式の差分スキーム(モデル11)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Burgers方程式の $u(\partial u / \partial x)$ の近似はいくつかの方法が考えられる。

対流項の差分近似(2/3)

Burgers方程式のいくつかの差分スキームを評価してみる。

・FTCSスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{u_i^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

・蛙飛びスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

・ u の鋭いピークに対する緩和スキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{u_{i+1}^n + u_i^n + u_{i-1}^n}{3\Delta x} \Delta t (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

対流項の差分近似(3/3)

Burgers方程式では、対流項には u_j^n ($j=2,3,\dots$) のなかから適当な u_0 を代表として選び、Courant条件に準じて

$$C = f \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} < 1$$

などと Δt を設定する。しかし、安全のために安全係数 f ($0 < f < 1$) を乗ずる。あるいは、

$$C = \max_i \left| \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x} \right| \cdot f < 1$$

などとCourant数が解そのものに依存している状況を厳重に監視するなどの制御策を考える。

双曲型方程式の陰スキーム(1/3)

対流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

対流方程式を時刻 $n+1$ において、時間を後退差分近似、空間を
中心差分近似すると、

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

差分スキームを求めると

$$\frac{1}{2}Cu_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{1}{2}Cu_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

ただし、

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

双曲型方程式の陰スキーム(2/3)

内点を $i=2, 3, \dots, I_m-1$ として、

$$i=1: \quad -\frac{C}{2}u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \frac{C}{2}u_2^{n+1} = u_1^n$$

$$i=2: \quad -\frac{C}{2}u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + \frac{C}{2}u_3^{n+1} = u_2^n$$

$$i=3: \quad -\frac{C}{2}u_2^{n+1} + u_3^{n+1} + \frac{C}{2}u_4^{n+1} = u_3^n$$

$$i=i: \quad -\frac{C}{2}u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{C}{2}u_{i+1}^{n+1} = -\frac{C}{2}u_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{C}{2}\right)u_i^{n+1} = u_i^n$$

という連立一次方程式が得られる。

双曲型方程式の陰スキーム(3/3)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{C}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{C}{2} & 1 & \frac{C}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{C}{2} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{C}{2} & 0 \\ \vdots & & & -\frac{C}{2} & 1 & \frac{C}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{C}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i-2}^{n+1} \\ u_{i-1}^{n+1} \\ u_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n + \frac{C}{2}u_0^{n+1} \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{i-1}^n \\ u_i^n - \frac{C}{2}u_i^{n+1} \end{bmatrix}$$

となる。これを行列表示すると、

$$Au^{n+1} = u^n$$

以上の行列の式を解いていくと、時刻 $t=n+1$ における変位

$u_1^{n+1} \dots u_i^{n+1}$ が求まる。

放物型方程式の陰スキーム

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に対する陰スキームは、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}), \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

これに倣ってBurgers方程式の差分方程式を導出すると

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

以下同様

陽スキームと陰スキーム(1/3)

Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に対して、対流項を風上差分として、陰スキームとすると、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - cu_i^{n+1}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$

$$c = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

である。整理すると、

$$-(cu_i^{n+1} + d)u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

陽スキームと陰スキーム(2/3)

内点を $i=2, 3, \dots, I_m-1$ として、

$$u^{n+1} = \begin{pmatrix} u_2^{n+1} & u_3^{n+1} & \dots & u_{I_m-1}^{n+1} \end{pmatrix}^T,$$

$$u^n = \begin{pmatrix} u_2^n & u_3^n & \dots & u_{I_m-1}^n \end{pmatrix}^T$$

として、この式をまとめると $A(u^{n+1})u^{n+1} = u^n$ となり、非線形代数方程式を Δt ごとに解かなければいけない。行列 $A(u^{n+1})$ は非対称行列である。

Burgers方程式の対流項を中心差分近似すると、

$$-(cu_i^{n+1} + d)u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2d)u_i^{n+1} - (cu_{i+1}^{n+1} + d)u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad c = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

陽スキームと陰スキーム(3/3)

Δt を小さく設定するとして対流項を次式のように線形化する。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

とすると、陰スキームの代替案は

$$-(cu_i^n + d)u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2d)u_i^{n+1} - (cu_{i+1}^n + d)u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad c = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

となる。これをまとめて書くと、

$$Au^{n+1} = u^n$$

とした連立一次方程式となる。

課題(1)

- 各自が行ったことのある数値解析(流体解析に限定しない)について、その対象となった物理、基礎方程式、境界条件、数値解析手法、解析結果、(もしあれば)実験との比較、等に関して、簡潔に纏めなさい。
- もし、数値解析の経験がない場合には、数値解析に関して考えるところを述べなさい。

課題(2)

- 以下のテンソル表現で記載されているNavier-Stokes方程式の各項の成分を書き下しなさい。

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \bar{g}$$

- ただし、 $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}\bar{v}) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}$$

$$\nabla \cdot \pi = -\mu \nabla \cdot [\nabla \bar{v} + (\nabla \bar{v})^T]$$

- 提出期限は、次回(10/9)までとする。

課題(3)

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\alpha > 0)$$

- に、次の関数を代入すると、

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int u dx\right)$$

- 以下の式が導かれることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

対流方程式の数値解の挙動

～スキームの選択 — モデル問題3 —

- 以下の対流方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 以下の境界条件と初期条件の下で、

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1/5) \\ 1 & (1/5 \leq x \leq 2/5) \\ 0 & (2/5 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad \begin{aligned} u(0,t) &= g_0 \quad g_0 = 0 \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

- 以下の各スキームを用いて数値的に解析しなさい。

- ・ FTCS
- ・ 蛙とび法
- ・ 風上差分

Program: ADVEC

課題(4)

- 前ページに指定する微分方程式を、与えられた境界条件の下で、指定する差分スキームを用いて数値的に解析しなさい。

- 提出期日: **10月30日(金)**

- 提出物は、

- ・ 内容の説明したレポート
- ・ プログラムリスト
- ・ 解析結果(数値出力、作図結果)

以上の全てを、A4レポート用紙ならびに電子媒体(CD)の両方により提出すること。

提出課題(5)

以下のPoisson方程式を、中心差分近似を用いた差分方程式とした上で、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g$$

5×5に分割された空間に対して、周囲境界を既知のものとするとき得られる9元連立一次方程式を、Natural orderingによって書き下しなさい。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

提出課題(6)

対流方程式に対する以下のスキームの安定性を、Neumannの安定解析により判定せよ。

・ FTCSスキーム:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

・ 蛙とび法 (Leap frog scheme)

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

・ 風上差分 (Upwind scheme)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad C \geq 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad C \leq 0$$

・ 陰解法 (Implicit scheme)

$$\frac{1}{2} \alpha u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

提出課題(7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

熱伝導方程式に対する以下のスキームの安定性を、Neumannの安定解析により判定せよ。

・ FTCSスキーム:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad d = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

・ Richardson法

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + d(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

・ 蛙とび法 (Leap frog scheme, DF法)

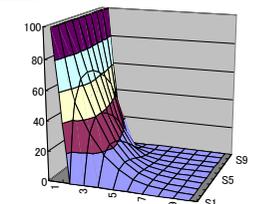
$$u_i^{n+1} = \frac{1}{1+2d} [2d(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + (1-2d)u_i^{n-1}]$$

・ 陰解法 (Implicit scheme)

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

提出課題(8)

以下に示すラプラス方程式を、右図の境界条件のもとで、差分法によって数値解析するとともに、以下の解析解と比較しなさい。



ラプラス方程式: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

差分式: $-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

解析解: $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^m}{m \sinh(m\pi)} \sinh(m\pi y) \cos(m\pi x)$