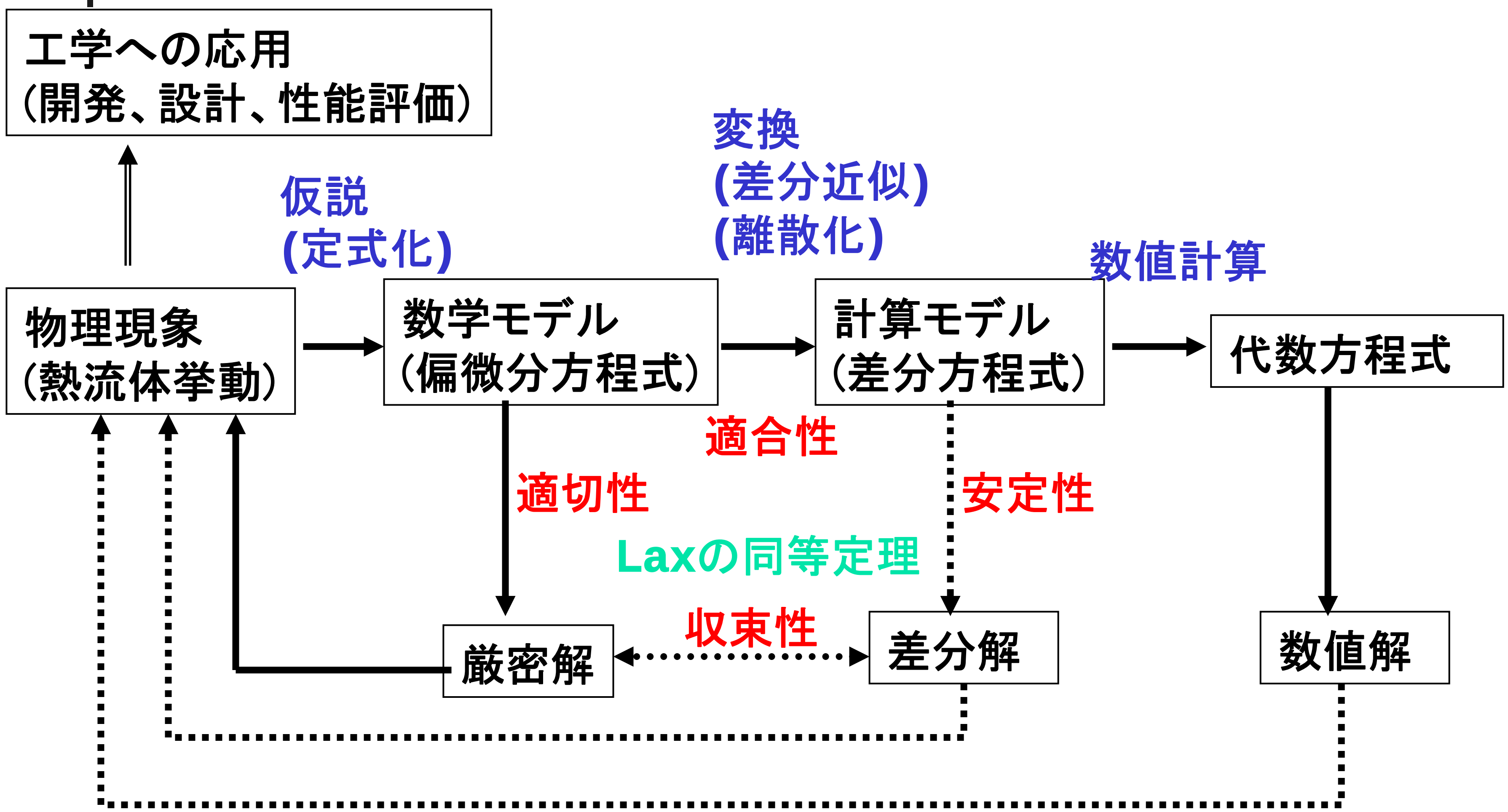
第2章　偏微分方程式と解析解

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第2章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第3章) +変換 (テキスト第4章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第5章)+連立一次方程式の解法(テキスト第6章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第7章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第7章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析　by　金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際　by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) 試験 (レポート評価の場合: 予備日)

変換 ー変化する方程式の定性的性質ー



偏微分方程式とその解析解
ー数値解のための物差しとしてー

- 工学機器の設計のためには、あらかじめ
- 偏微分方程式を数値的に解き数値解を得ることが極めて有効な手段となる。

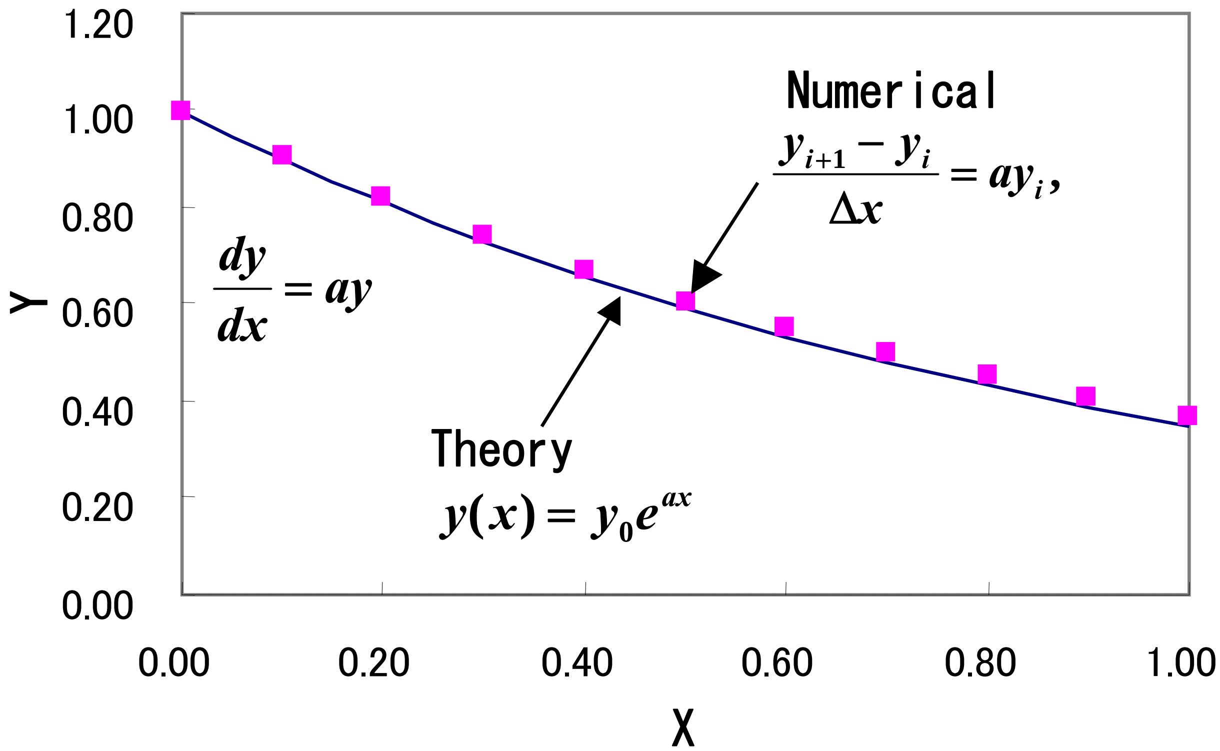
↓

- 仮に数値解が得られたとして

↓

- 数値解の精度を吟味することが必須。
- その際の尺度となるのが、厳密解。

数値解析結果と理論値との比較



偏微分方程式の分類

線形二階の偏微分方程式: $u(x,t)$ または $u(x,y)$

↓

一階の連立方程式

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

固有方程式: $\det(A\lambda+B)=0$

- すべての固有値が実数のとき方程式は: 双曲型
- すべての固有値が0のとき方程式は: 放物型
- すべての固有値が複素数のとき方程式は: 楕円型

拡散方程式あるいは熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\alpha > 0)$$

変数uを次式のようにおく

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

固有方程式

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

すべての固有値は0 ⟶ 放物型

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

（c：波動の伝播速度）

変数uを次式のようにおく

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

固有方程式

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -c \\ -c & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

固有値 $\lambda = \pm c$ ⟶ 双曲型

Laplace方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

変数uを次式のようにおく

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

固有方程式

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

固有値 $\lambda = \pm i$ $\longrightarrow$ 楕円型

境界条件と初期条件

- 工学の問題では、
- 偏微分方程式の性質そのものよりも、
- 現実に与えられた境界条件ならびに初期条件の下で、
- 現象を記述する偏微分方程式の解がどのような挙動をとるのか、が求められる。

境界条件

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \gamma$$

α，β によって継の3種類に分けられる

$$u = \frac{\gamma}{\beta} \quad (\alpha = 0, \quad \beta \neq 0)$$ Dirichlet条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \quad \beta = 0)$$ Neumann条件

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \gamma$$ Robin条件

初期条件

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\gamma$$

α，β によって継の3種類に分けられる

$$u=\frac{\gamma}{\beta} \qquad (\alpha=0,\quad \beta\neq 0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (\alpha\neq 0,\quad \beta=0)$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\gamma \qquad (\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0,\quad \gamma\neq 0)$$

Cauchy条件

解析解のための準備

- 偏微分方程式の各型毎に、
- 工学の問題として、直感の働きやすいものを選択し、
- 初期条件や境界条件を与えて、
- あらかじめ解析解を求めておくことにする。

↓

通常、解析解の多くは、関数列で展開される

関数展開の原理

関数F(x)　が既知関数　$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$
線形結合によって記述されるとする。

$$F(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

係数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$　が適切に算出されれば、
任意関数F(x)　は、既知関数 $\{\varphi_m(x)\}$
によって記述できたことになる。

関数展開のために望ましい性質

1. 直交条件(orthogonal):

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad (m \neq n)$$

2. 正規化条件(normalize):

$\varphi_m(x) = \varphi_n(x)$ のときノルム(norm)が定義できる

$$\|\varphi_m\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_m^2(x)dx}$$

↓

正規直交関数

正規直交関数による展開係数の決定

正規直交関数　$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx = \delta_{mk}$

ここで

$$\delta_{mk} \equiv \begin{cases} 1 & (m = k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases}$$

クロネッカのデルタ関数

↓

$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx$$

↓

$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx = c_m \longrightarrow \{c_m\}$$

長方形のsin波による展開

区間[0 1]における関数

$$u(x) = 1 \quad (0 \le x \le 1)$$

を正弦波で展開すると、

$$u(x) = 1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(2m-1)\pi x \quad (0 \le x \le 1)$$

ここで、展開係数c_m は、

$$c_m = \frac{4}{(2m-1)\pi}$$

$$\downarrow$$

長方形を展開するのに十分な展開項数は？

Program: ORTHG

偏微分方程式の厳密解(1/3)

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件

$$u(x,0) = 1$$

境界条件

$$u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(1,t) = 0$$

偏微分方程式の厳密解(2/3)

u(x,t)を $\left\{ \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2} \right\}$ で展開　(m=1,2,3,…..)

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

原方程式に代入

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{2m-1}{2}\pi x \frac{dc_m}{dt} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \sin \frac{2m-1}{2}\pi x$$

直交条件より

$$\frac{dc_m}{dt} = \left(\frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 c_m$$

よって、

$$c_m = c_{m0} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t}$$

偏微分方程式の厳密解(3/3)

初期条件より

$$1=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}\frac{2m-1}{2}\pi x$$

よって解析解は

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}\exp\left[-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^{2}t\right]\sin\frac{2m-1}{2}\pi x$$

展開係数は

$$c_{m0}=\frac{4}{(2m-1)\pi}$$

双曲型方程式とその厳密解 － モデル問題1 －

波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件：

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1/2) \\ 2(1-x) & (1/2 \le x \le 1) \end{cases} \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

（解）

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 8}{\pi^2 (2m+1)} \sin[(2m+1)\pi x] \cos[(2m+1)\pi c t]$$

弦の振動を記述するのに十分な展開項数は？

Program: WAVEXVB

弦の振動の物理(1/2)

弦の微小部分ΔSに作用する力

$$F = -T\sin\theta\big|_x + T\sin\theta\big|_{x+\Delta x}$$

釣合いの位置より弦の位置が小さいとしたら

$$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

従って、

$$F = -T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} = T\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x \Delta x + \cdots\right)$$

$$\approx T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x \Delta x$$

弦の振動の物理(2/2)

弦の単位長さ当りの質量をρとすると、

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$c=\sqrt{T/\rho}$$:弦の変位が伝播する速度

この方程式に減衰効果を加えると、電信方程式となる。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

損失のある電線を伝わる電波はこの方程式に従う。

初期条件による波動方程式の解の違い
ー　モデル問題2　ー

波動方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件:

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

（解）

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t$$

弦の振動を記述するのに十分な展開項数は？

Program: WAVEXVB

対流方程式についての厳密解

波動方程式

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}^2} - \boldsymbol{c}^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{1})$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{c}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} - \boldsymbol{c}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

$$\downarrow$$

対流方程式 (advection equation): 双曲型

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{c}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$$

対流方程式の厳密解の挙動
ー　モデル問題3　ー

対流方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初期条件と境界条件：

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1/5) \\ 1 & (1/5 \le x \le 2/5) \\ 0 & (2/5 \le x \le 1) \end{cases}$$

$$u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0 \qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

（解）

$$u(x,t) = F(x - ct)$$

$\longrightarrow$ Program: ADVEX

対流の物理

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = $$ （境界xにおけるインクの流入量）

-（境界x+δxにおけるインクの流出量）

$$= cu\big|_x - cu\big|_{x+\Delta x}$$

$$= cu\big|_x - \left(cu\big|_x + \Delta x c \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{1}{2}\Delta x^2 c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \right)$$

よって、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

濃度拡散の効果を考慮すると、対流・拡散方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

放物型方程式とその厳密解
ー　モデル問題4　ー

熱伝導方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0\le x\le 1)$$

初期条件と境界条件:

$$u(x,0)=1 \qquad u(0,t)=0$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=0$$

（解）

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp\left[-\frac{\pi^2(2m-1)^2}{4}t\right]\sin\frac{2m-1}{2}\pi x$$

展開係数

$$c_m=\frac{4}{(2m-1)\pi}$$

Program: HEATX

熱伝導の物理

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} \Delta x\text{の中での} \\ \text{熱発生} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{境界}x\text{における} \\ \text{熱の流入} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{境界}x + \Delta x\text{にお} \\ \text{ける熱の流出} \end{pmatrix}$$

$$q_x = -\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \qquad q_{x+\Delta x} = -\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

$\alpha = 1$とする。

$$q_{x+\Delta x} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x \Delta x - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_x \Delta x^2 + \cdots$$

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta x g + \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

拡散方程式

Fick則

$$j_x = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

拡散方程式(diffusion equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

$$\downarrow$$

熱伝導方程式と拡散方程式は同じ放物型方程式となる

熱伝導方程式の厳密解
― モデル問題5 ―

熱伝導方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件:

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

（解）

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

↓

Program: HEATX

楕円型方程式の厳密解
－ モデル問題6 －

Poisson方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-g_0 \quad (0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1)$$

境界条件：

$$u(0,y)=0 \quad (0\le y\le 1)$$
$$u(1,y)=0 \quad (0\le y\le 1)$$
$$u(x,0)=0 \quad (0\le x\le 1)$$
$$u(x,1)=0 \quad (0\le x\le 1)$$

（Dirichlet条件）

（解）

$$u(x,t)=\frac{4g_0}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2m+1)\pi}\right)\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)\sin[(2m+1)\pi x]\cos[(2m+1)\pi y]$$

↓

Program: POLAX

Poisson方程式が代表する物理

2次元非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_0$$

定常状態とすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g_0$$

$$\downarrow$$

一様加熱される平板上の温度分布、その変化

楕円型方程式の厳密解
ー　モデル問題7　ー

Laplace方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1)$$

境界条件：

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 \quad (0 \le y \le 1) \\ u(1,y) &= 0 \quad (0 \le y \le 1) \\ u(x,0) &= 0 \quad (0 \le x \le 1) \\ u(x,1) &= 1 \quad (0 \le x \le 1) \end{aligned}$$

（Dirichlet条件）

（解）

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[1-(-1)^m\right]}{m \sinh(m\pi)} \sinh(m\pi y) \sin(m\pi x)$$

↓

Program: POLAX

変係数の1次元Laplace方程式の厳密解

定数σ（σ>0）として変係数の1次元Laplace方程式：

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\sigma u)\frac{du}{dx}\right]=0 \quad (0 \le x \le 1)$$

境界条件：

$$u(0)=0, \quad u(1)=1,$$

（解）

$$u(x)=-\frac{1}{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{2+\sigma}{\sigma}x}$$

↓

Program: LAP1X

Laplace方程式の物理

比例定数αが温度uの関数であるとする:

$$\alpha(u) = 1 + \sigma u \quad (\sigma > 0)$$

より

$$q = -(1 + \sigma u)\frac{\partial u}{\partial x} \quad (\alpha > 0)$$

変係数の1次元Laplace方程式が得られる。

$$\frac{d}{dx}\left[(1 + \sigma u)\frac{du}{dx}\right] = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

高温であるほど熱伝導係数が大きくなる

↓

高温領域ほど温度勾配が緩やか
低温領域ほど温度勾配が急峻となる

一次元Laplace方程式の解 ― モデル問題9 ―

一次元Laplace方程式:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

境界条件:

$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 1$$

（解）

$$u(x) = x \quad (0 \le x \le 1)$$

対流方程式の数値解の挙動 ～スキームの選択　―　モデル問題3　―

- 以下の対流方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 以下の境界条件と初期条件の下で、

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1/5) \\ 1 & (1/5 \le x \le 2/5) \\ 0 & (2/5 \le x \le 1) \end{cases}$$

$$u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

- 以下の各スキームを用いて数値的に解析しなさい。
  - FTCS
  - 蛙とび法
  - 風上差分

Program: ADVEC

提出課題(4)

- 前ページに指定する微分方程式を、与えられた境界条件の下で、指定する差分スキームを用いて数値的に解析しなさい。
- 提出期日： 10月21日（木）
- 提出物は、

  ・内容の説明したレポート

  ・プログラムリスト

  ・解析結果（数値出力、作図結果）

 以上の全てを、A4レポート用紙ならびに電子媒体(CD)の両方により提出すること。

第2章　偏微分方程式と解析解

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第１章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第２章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第３章) +変換 (テキスト第４章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第５章)+連立一次方程式の解法(テキスト第６章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第７章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第７章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析　by　金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際　by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) 試験 (レポート評価の場合: 予備日)