数値流体力学

筑波大学システム情報工学科
構造エネルギー工学専攻
阿部　豊

講義概要

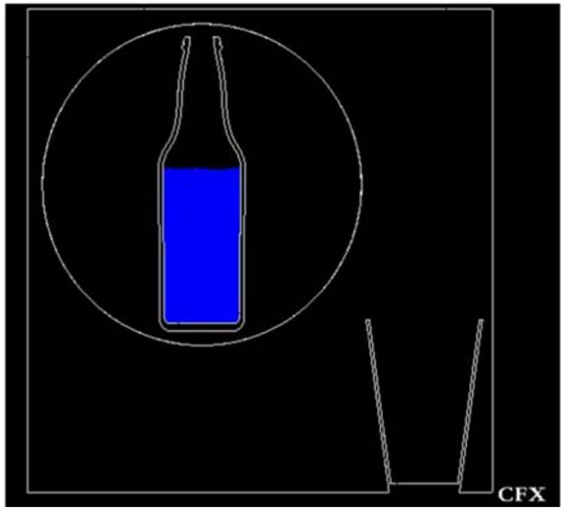
- 学期：　秋AB学期
- 曜日・時限：　金曜日・3・4時限(12:15-15:00)
- 教室：　3B402号室
- 単位数：　2単位
- 講義担当者：　阿部豊、田中誠三
- 参考書：「応用数値解析」、高橋亮一著、朝倉書店

講義予定

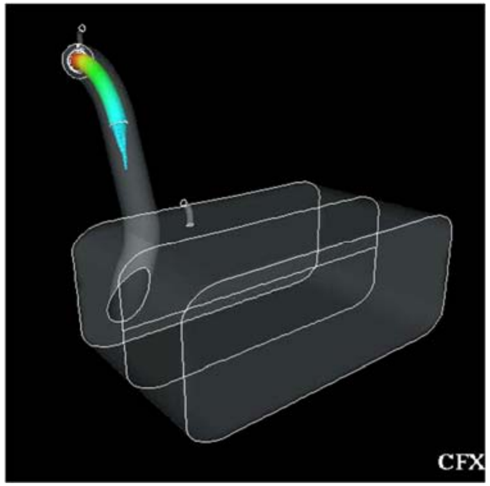
1.	第1回目 10/2	阿部	数値シミュレーションの手続き
2.	第2回目 10/9	阿部	差分方程式と差分スキーム
3.	第3回目 10/16	田中	方程式の代数化，連立1次方程式の解法
4.	第4回目 10/23	田中	並列計算法
5.	第5回目 10/30	阿部	MAC法など差分の計算方法
6.	第6回目 11/13	田中	有限要素法
7.	第7回目 11/20	田中	有限要素法
8.	第8回目 12/4	田中	有限要素法，N-Sプログラムによる実習
9.	第9回目 12/11	阿部	乱流・熱流体・多相流
10.	第10回目 12/18	田中	津波解析など事例紹介
11.	第11回目 12/25		(試験予定日)

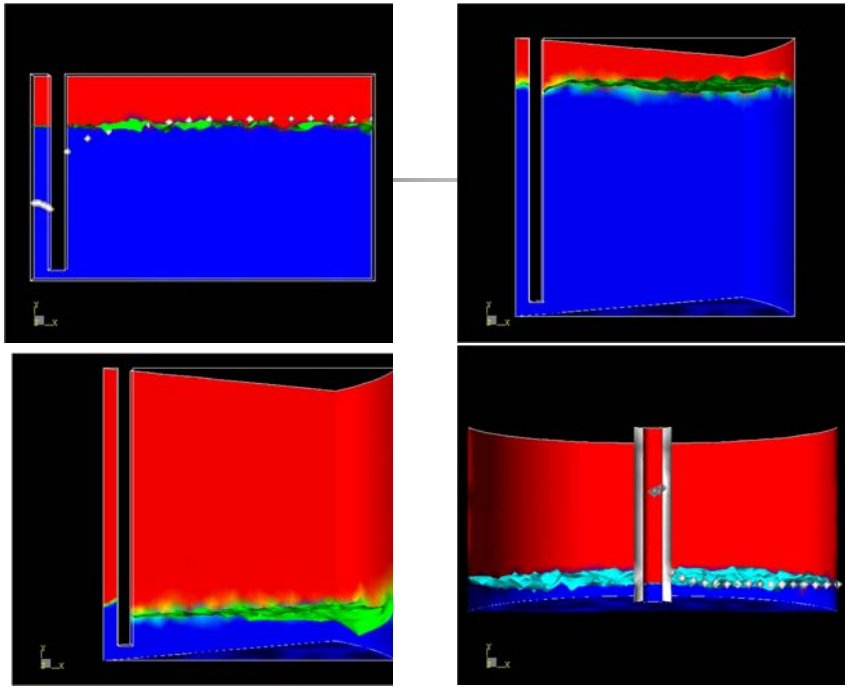
数値流体力学(CFD)の実例

Cheers



Final filling





課題(1)

- 各自が行ったことのある数値解析(流体解析に限定しない)について、その対象となった物理、基礎方程式、境界条件、数値解析手法、解析結果、(もしあれば)実験との比較、等に関して、簡潔に纏めなさい。
- もし、数値解析の経験がない場合には、数値解析に関して考えるところを述べなさい。

微分方程式の差分解法

微分方程式の差分解法例 ー 孤立波の衝突問題 ー

Boussinesq方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

初期条件:

$$u = 0.072\,\mathrm{sech}^2[1.073(x-10)] + 0.048\,\mathrm{sech}^2[0.876(x-20)]$$

境界条件:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (x = \pm\infty)$$

差分(代数)方程式への変換

基礎方程式:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= 2u_j^n - u_j^{n-1} + c\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \\ &+ c^2\left[\left(u_{j+1}^n\right)^2 - 2\left(u_j^n\right)^2 + \left(u_{j-1}^n\right)^2\right]/2 \\ &+ \varepsilon d^2\left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n\right) \qquad (3 \le j \le 122) \end{aligned}$$

$$c = \Delta t/\Delta x \qquad d = \Delta t/\Delta x^2 \qquad \Delta t = 0.25 \qquad \Delta x = 0.25$$

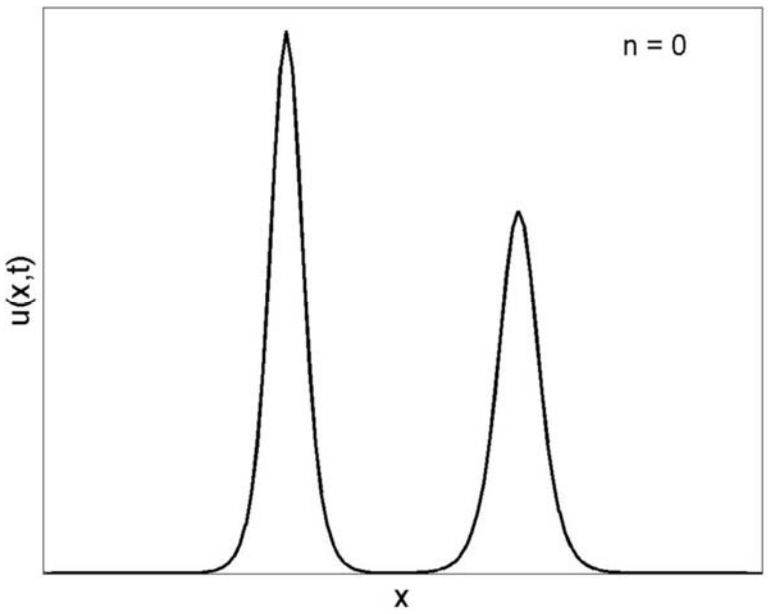
境界条件:

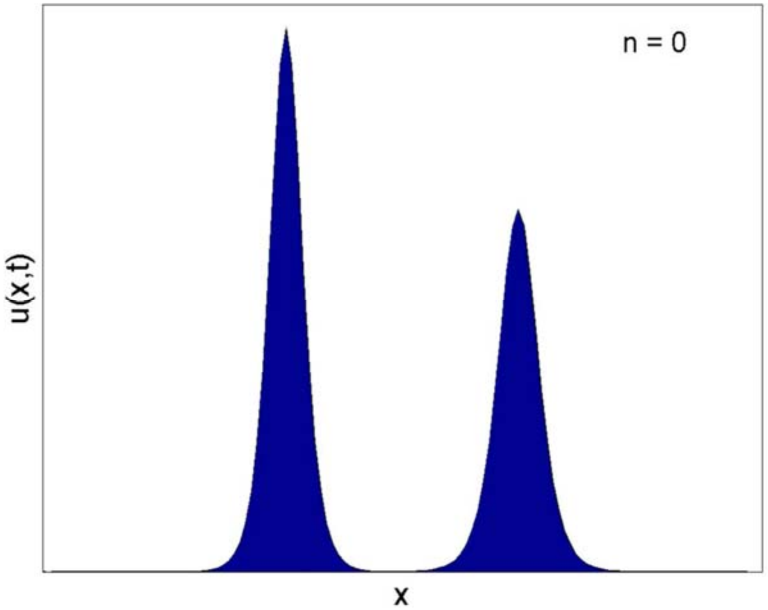
$$\begin{aligned} u_j^0 = u_j^{-1} &= 0.072\,\mathrm{sech}^2[1.073(j-3)\Delta x - 10] \\ &+ 0.048\,\mathrm{sech}^2[0.876(j-3)\Delta x - 20] \qquad (3 \le j \le 122) \end{aligned}$$

$$u_3^n = u_{122}^n = 0 \qquad u_1^n = u_2^n = u_3^n \qquad u_{122}^n = u_{123}^n = u_{124}^n$$

変数の定義: $u_j^n \xrightarrow{\Delta} u(\Delta x \times j, \Delta t \times n)$

Program: SOLTN





差分スキームを吟味するための数学的概念

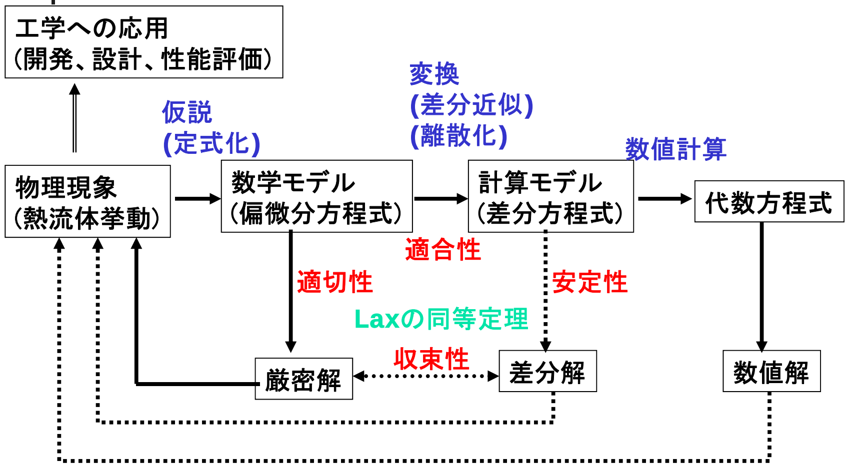
- 適切性(well-posed)
- 適合性(consistency)
- 安定性(stability)
- 収束性(convergency)

↓

- Laxの同等定理

「初期値問題が適切であるとき、差分スキームの差分要素が適合条件を満たしていて、安定であれば収束する。」

変換　ー変化する方程式の定性的性質ー



モデル問題:　線形問題に対する解析例

微分方程式: $\frac{dy}{dx} = ay$　　初期条件: $y(0) = y_0$

厳密解: $y(x) = y_0 e^{ax}$　（適切性）

前進差分による差分表現:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = ay_i, \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n) \qquad \text{（適合性）}$$

より　$y_{i+1} = (1 + \Delta x \cdot a) y_i$

i=0,1,2,･･･,n に対して記述すると、

$$\begin{aligned} y_i &= (1 + \Delta x \cdot a) y_{i-1} \\ y_{i-1} &= (1 + \Delta x \cdot a) y_{i-2} \\ &\vdots \\ y_2 &= (1 + \Delta x \cdot a) y_1 \\ y_1 &= (1 + \Delta x \cdot a) y_0 \end{aligned}$$

辺々掛け合わせることによって、　$y_i = (1 + \Delta x \cdot a)^i y_0$

モデル問題： 線形問題に対する解析例

$$y_i = (1 + \Delta x \cdot a)^i y_0$$

$0 < (1 + \Delta xa) < 1$ のとき

$i \to \infty$ に対して

$(1 + \Delta x \cdot a)^i \to$ 有界 （安定性）

一方

$0 < \Delta xa << 1$ とすると $x = \Delta x \cdot i$ であるから

$y(x) = y_0 e^{ax}$ をx=0のまわりで級数展開すると、

$$y(x) = y_0\left\{1 + \frac{\Delta xa}{1!} + \frac{(\Delta xa)^2}{2!} + \frac{(\Delta xa)^3}{3!} + \cdots\right\}^i \to y_0(1 + \Delta x \cdot a)^i$$

（収束性）

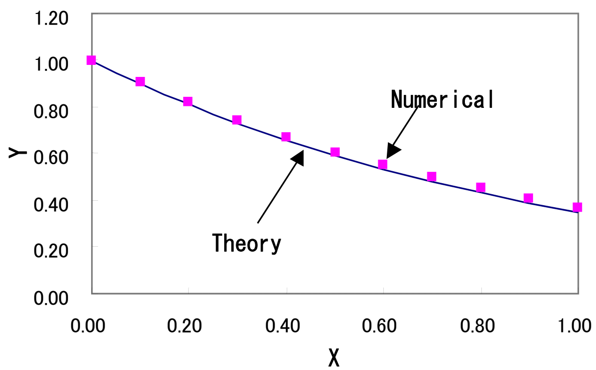
プログラム例

```
x(1)=0.0
y(1)=y0
yex(1)=y0*exp(a*x(1))
error(1)=(y(1)-yex(1))/yex(1)*100
do 10 i=2,nmax+1
x(i)=deltax*float(i-1)
y(i)=y(i-1)+deltax*a*y(i-1)
yex(i)=y0*exp(a*x(i))
error(i)=(y(i)-yex(i))/yex(i)*100
10 continue
yfin=(1.0+deltax*a)**nmax*y0
```

計算結果

i	x	Numerical Solution	Exact Solution	error(%)
1	0.00000e+00	1.00000e+00	1.00000e+00	0.00000e+00
2	1.00000e-01	9.00000e-01	9.04837e-01	-5.34621e-01
3	2.00000e-01	8.10000e-01	8.18731e-01	-1.06638e+00
4	3.00000e-01	7.29000e-01	7.40818e-01	-1.59529e+00
5	4.00000e-01	6.56100e-01	6.70320e-01	-2.12138e+00
6	5.00000e-01	5.90490e-01	6.06531e-01	-2.64466e+00
7	6.00000e-01	5.31441e-01	5.48812e-01	-3.16514e+00
8	7.00000e-01	4.78297e-01	4.96585e-01	-3.68284e+00
9	8.00000e-01	4.30467e-01	4.49329e-01	-4.19776e+00
10	9.00000e-01	3.87420e-01	4.06570e-01	-4.70994e+00
11	1.00000e+00	3.48678e-01	3.67879e-01	-5.21938e+00

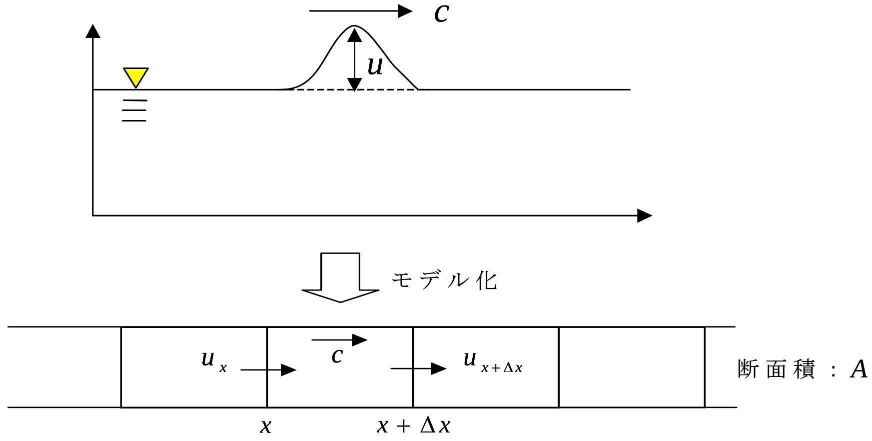
数値解析結果と理論値との比較



数値流体解析の基礎方程式

流体運動を記述する基礎方程式 ー 対流方程式 ー

変位 の波が一定の速さcで移動している



変位（波）の伝播のモデル化

$$\begin{pmatrix}\text{体積}(\Delta x\cdot A)\text{内の時間}\Delta t\text{間}\\ \text{における変位の蓄積量}\end{pmatrix} = (x\text{からの流入量}) - (x+\Delta x\text{からの流出量})$$

$$(A\cdot\Delta x)\cdot\Delta u = c\cdot A\cdot u_x\cdot\Delta t - c\cdot A\cdot u_{x+\Delta x}\cdot\Delta t$$

$$= c\cdot A\cdot u_x\cdot\Delta t - c\cdot A\cdot\left(u_x+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\cdots\right)\cdot\Delta t$$

$$= -c\cdot A\cdot\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta t$$

$$\therefore \frac{\Delta u}{\Delta t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$\Delta t\rightarrow$ 小の極限において

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}}$$:対流方程式

対流速度 で変位 が移動している物理を記述

対流方程式の解

F を任意の関数として、

$$u(x,t) = F(x-ct)$$

（証明）

$\xi = x - ct$ とおくと

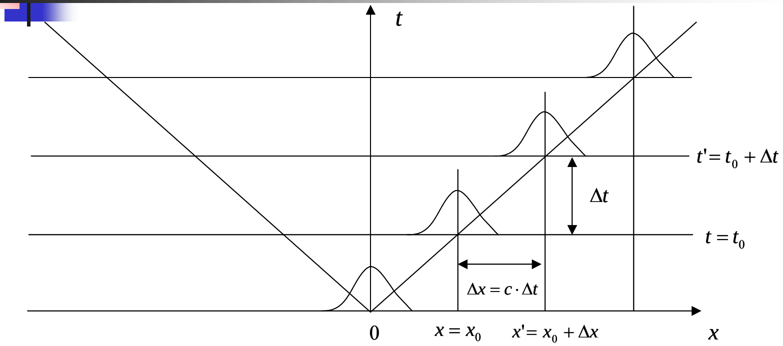
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot(-c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial \xi}$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c)\cdot\frac{\partial F}{\partial \xi} = -c\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

対流方程式の解の性質
ー 対流方程式上の波の伝播 ー



$$F(x'-ct') = F(x'-c(t_0+\Delta t))$$
$$= F(x'-ct_0 - c\Delta t)$$
$$= F(x_0 - ct_0) \quad (\because x_0 = x'-\Delta x)$$

時刻t‘ のときの波形と、時刻t_0 のときの波形とは同じであることを示している。

対流方程式が記述する物理とは、変形しない波の速度 での伝播である。

波動方程式との関係

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

波の伝播を記述する波動方程式は、以下の解（ダランベールの解）を有する。

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

波動方程式は、以下のようにも記述できるが、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

微分が可換であることを考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad あるいは \quad \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

対流方程式が波動方程式と同値なものであることが分かる。

対流方程式の厳密解の挙動

対流方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

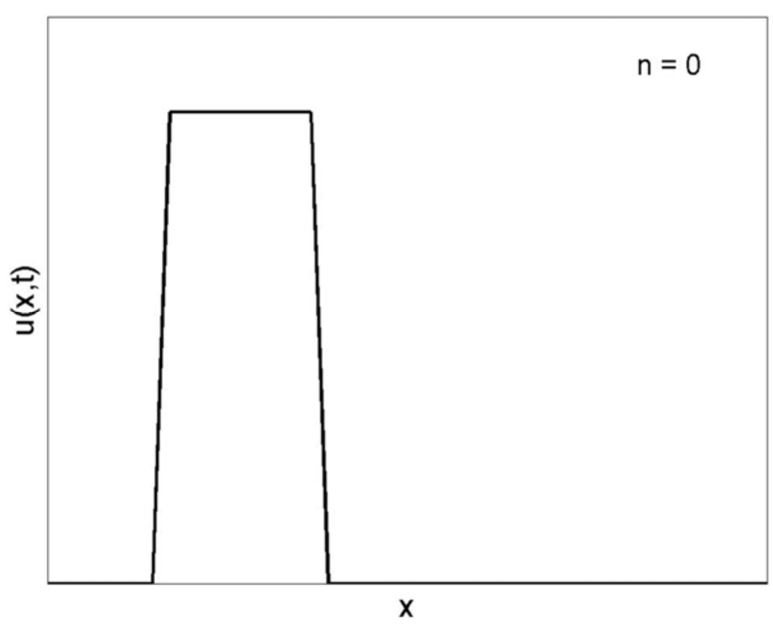
初期条件と境界条件：

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1/5) \\ 1 & (1/5 \le x \le 2/5) \\ 0 & (2/5 \le x \le 1) \end{cases}$$

$$u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0 \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

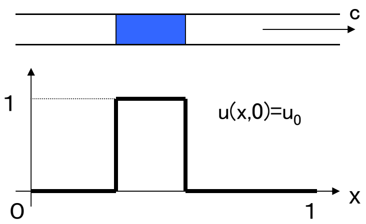
（解）

$$u(x,t) = F(x-ct) \longrightarrow$$ Program: ADVEX



流れの中のインクの振舞い

浅くて狭い長さ1の流路が水平に置かれ、水が流速cで流れている。流路の底と側壁の水との相互作用はなく何の摩擦も働かない理想的な流路とする。流路の上流にインクを落とすと、それは下流に移動する。t=0のときのインク濃度u_0が時間ともにどのように変化するか。



問題の定式化

i. 1次元流れを仮定。

ii. インクは濃度勾配に比例して拡散すると仮定し、インクの物質流束 j はFickの拡散則に従うとする。

$$j = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\alpha > 0)$$

ここで、u はインク濃度

iii. インクの質量に対する質量保存則より
（インク濃度の変化率）Δx
=(対流による正味のインクの流入）
＋（拡散による正味の流入）

この物理現象を記述する数学モデルは、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

モデル問題

対流・拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

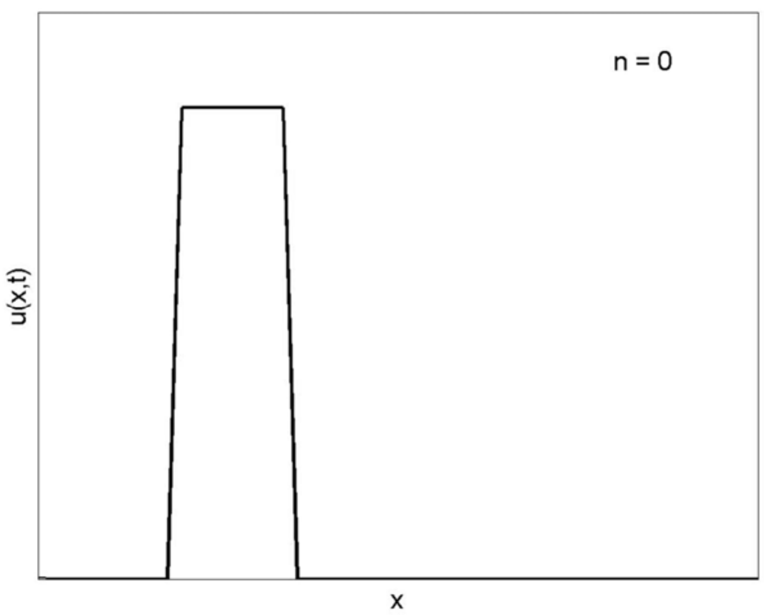
を次の初期条件

$$u(x,0) = u_0 = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le x_1) \\ 1 & (x_1 \le x \le x_2) \\ 0 & (x_2 \le x \le 1) \end{cases}$$

と次の境界条件

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = 0$$

を与えて解き、インク濃度u(x,t)の振舞いを求めよ。



Burgers方程式

線形である対流・拡散方程式の定数cを、従属変数u
に置き換えると非線形のBurgers方程式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Burgers方程式は、Navier−Stokes方程式と同様の非線形性

モデル問題

次のBurgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 2)$$

に、次の初期条件

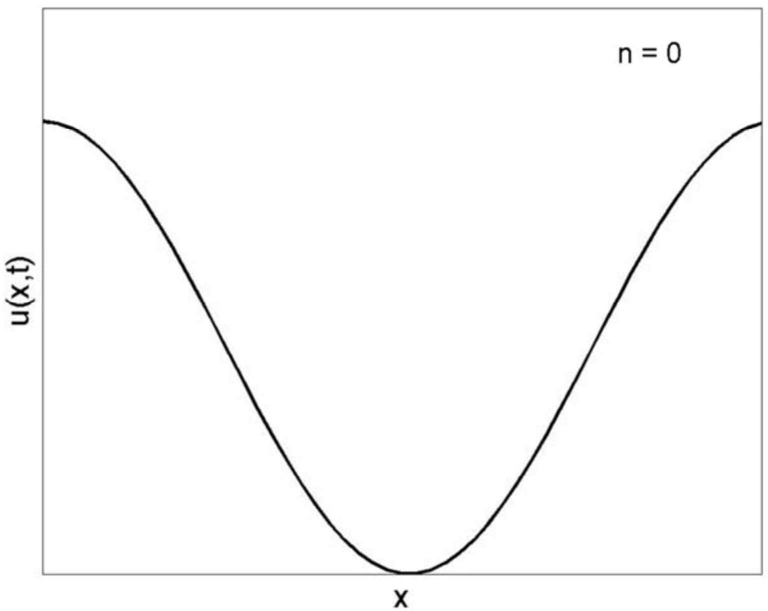
$$u(x,0) = 1 + \cos \pi x$$

と次の境界条件

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(2,t) = 0$$

を与えて数値的に解け。

Program: BURG

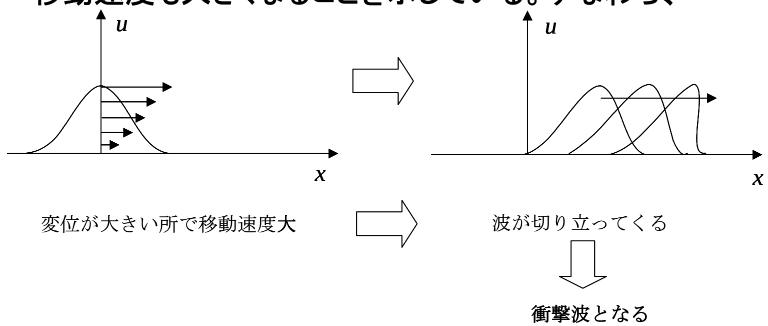


分散性

もし波の移動速度が波の変位の関数であるとすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

この式の意味するところは、変位 が大きいところでは、
移動速度も大きくなることを示している。すなわち、



対流拡散方程式

変位の大きい部分が小さい部分へ移動する性質“拡散”を考慮すると、α を拡散係数として、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

体系が2次元の場合、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

“変位の拡散”を物理的な意味の応力テンソルとみなし、圧力による変位を考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}$$

上式は流体の挙動を記述するNavier−Stokes方程式に他ならない。すなわち、対流方程式は流体挙動を記述する最も基本となる関係式であることが分かる。

モデル問題

対流・拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(0\le x\le 1)$$

を次の初期条件

$$u(x,0)=u_0=\begin{cases}0 & (0\le x\le x_1)\\ 1 & (x_1\le x\le x_2)\\ 0 & (x_2\le x\le 1)\end{cases}$$

と次の境界条件

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(1,t)=0$$

を与えて解き、インク濃度u(x,t)の振舞いを求めよ。

差分スキーム

対流・拡散方程式を、陽スキーム、対流項は風上差分、拡散項は中心差分として差分方程式に変換する。

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)$$

ここで、変域を50分割する。(Δx=1/50)

内点をj=2, 3,……, 51とし、

境界点をj=1, j=52とする。

そのため、境界条件の離散化近似を、

$u_1^n=u_2^n,\quad u_{52}^n=u_{51}^n$ とおくことにする。

Program: INK

差分スキームによる安定性の比較

風上スキーム:

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{u_j^n\Delta t}{\Delta x}(u_j^n-u_{j-1}^n)+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

FTCSスキーム:

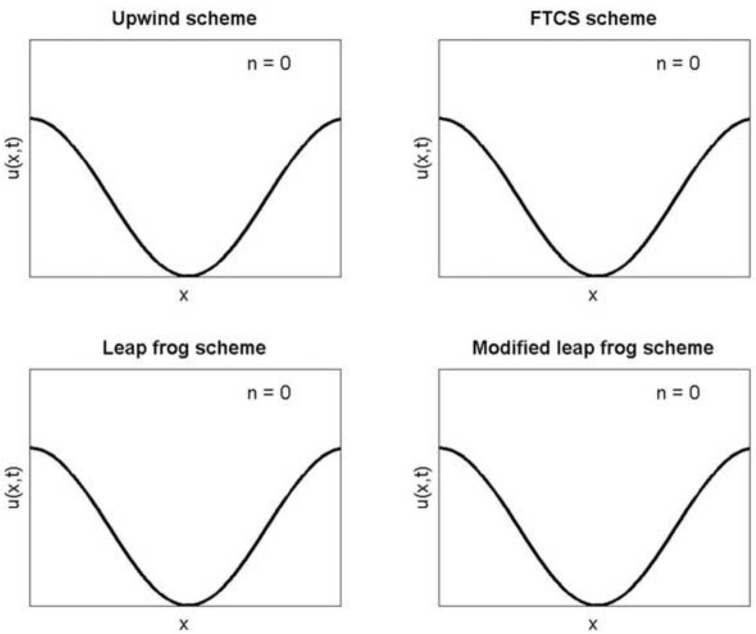
$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{u_j^n\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

蛙とびスキーム:

$$u_j^{n+1}=u_j^{n-1}-\frac{u_j^n\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

修正した蛙とびスキーム:

$$u_j^{n+1}=u_j^{n-1}-\frac{(u_{j+1}^n+u_j^n+u_{j-1}^n)}{3\Delta x}\Delta t(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$



数値流体解析の基礎方程式のベクトル・テンソル表示

Navier-Stokes方程式

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \vec{g}}$$

ここで

$$\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{v}\vec{v}\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

せん断応力テンソルの成分

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \vec{v}\right) \\ \tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \vec{v}\right) \\ \tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \vec{v}\right) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \end{cases}$$

速度勾配のテンソル表現

$$\nabla\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} & v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} & v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

速度勾配のテンソル表現

$$\nabla\cdot(\vec{v}\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_xv_x & v_xv_y & v_xv_z \\ v_yv_x & v_yv_y & v_yv_z \\ v_zv_x & v_zv_y & v_zv_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial(v_xv_x)}{\partial x}+\frac{\partial(v_yv_x)}{\partial y}+\frac{\partial(v_zv_x)}{\partial z} \\ \frac{\partial(v_xv_y)}{\partial x}+\frac{\partial(v_yv_y)}{\partial y}+\frac{\partial(v_zv_y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(v_xv_z)}{\partial x}+\frac{\partial(v_yv_z)}{\partial y}+\frac{\partial(v_zv_z)}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} v_x\frac{\partial(v_x)}{\partial x}+v_y\frac{\partial(v_x)}{\partial y}+v_z\frac{\partial(v_x)}{\partial z}+\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]v_x \\ v_x\frac{\partial(v_y)}{\partial x}+v_y\frac{\partial(v_y)}{\partial y}+v_z\frac{\partial(v_y)}{\partial z}+\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]v_y \\ v_x\frac{\partial(v_z)}{\partial x}+v_y\frac{\partial(v_z)}{\partial y}+v_z\frac{\partial(v_z)}{\partial z}+\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]v_z \end{pmatrix}^T$$

$$= \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

せん断応力のテンソル表現

$$\nabla\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

だから

$$\nabla\cdot\pi = -\mu\begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} \end{pmatrix}^T$$

速度の2階微分テンソル

$$\nabla\cdot(\nabla\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}^T$$

$$\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}^T$$

せん断応力のテンソル表現

$$\nabla\cdot\left[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^T\right]=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z} \end{pmatrix}^T$$

よって

$$\nabla\cdot\pi=-\mu\nabla\cdot\left[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^T\right]$$

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\nabla p-\nabla\cdot\pi+\rho\vec{g}}$$

課題(2)

- 以下のテンソル表現で記載されているNavier–Stokes方程式の各項の成分を書き下しなさい。

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\nabla p-\nabla\cdot\pi+\rho\vec{g}$$

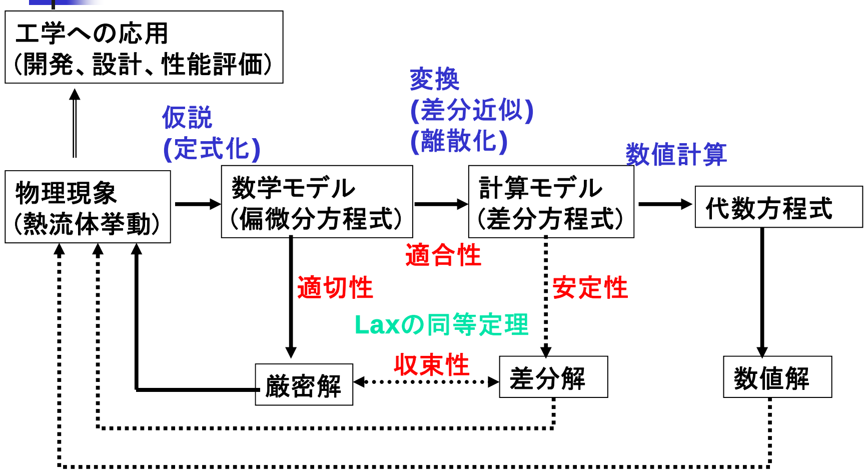
- ただし、 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec{v}\vec{v})=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

$$\nabla\cdot\pi=-\mu\nabla\cdot\left[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^T\right]$$

- 提出期限は、次回(10/9)までとする。

変換 ー変化する方程式の定性的性質ー



境界条件と初期条件

- 工学の問題では、
- 偏微分方程式の性質そのものよりも、
- 現実に与えられた境界条件ならびに初期条件の下で、
- 現象を記述する偏微分方程式の解がどのような挙動をとるのか、が求められる。

偏微分方程式の分類

線形二階の偏微分方程式：　$u(x,t)$　または　$u(x,y)$

↓

一階の連立方程式

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

固有方程式：　$\det(A\lambda+B)=0$

- すべての固有値が実数のとき方程式は：　双曲型
- すべての固有値が0のとき方程式は：　放物型
- すべての固有値が複素数のとき方程式は：　楕円型

拡散方程式あるいは熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(\alpha>0)$$

変数uを次式のようにおく

$$u_1=u,\quad u_2=\frac{\partial u}{\partial x}$$

固有方程式

$$\det\begin{pmatrix}\lambda & -\alpha\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=0$$

すべての固有値は0　⟶　放物型

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\qquad (c：波動の伝播速度)$$

変数uを次式のようにおく

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial t},\quad u_2=\frac{\partial u}{\partial x}$$

固有方程式

$$\det\begin{pmatrix}\lambda & -c\\ -c & \lambda\end{pmatrix}=0$$

固有値　$\lambda=\pm c$　⟶　双曲型

Laplace方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

変数uを次式のようにおく

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_2=\frac{\partial u}{\partial y}$$

固有方程式

$$\det\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}=0$$

固有値　$\lambda=\pm i$　⟶　楕円型

境界条件

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u=\gamma$$

α, βによって継の3種類に分けられる

$$u=\frac{\gamma}{\beta}\quad(\alpha=0,\quad\beta\neq 0)$$ Dirichlet条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\gamma}{\alpha}\quad(\alpha\neq 0,\quad\beta=0)$$ Neumann条件

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta u=\gamma$$ Robin条件

初期条件

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\gamma$$

α, βによって継の3種類に分けられる

$$u=\frac{\gamma}{\beta}\quad(\alpha=0,\quad\beta\neq 0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\gamma}{\alpha}\quad(\alpha\neq 0,\quad\beta=0)$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\gamma\quad(\alpha\neq 0,\quad\beta\neq 0,\quad\gamma\neq 0)$$ Cauchy条件

偏微分方程式とその解析解
ー数値解のための物差しとしてー

- 工学機器の設計のためには、あらかじめ
- 偏微分方程式を数値的に解き数値解を得ることが極めて有効な手段となる。

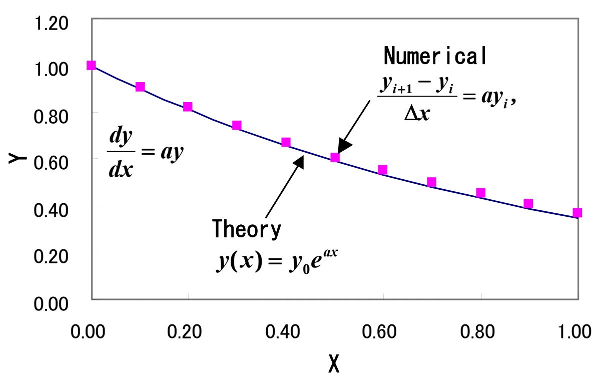
↓

- 仮に数値解が得られたとして

↓

- 数値解の精度を吟味することが必須。
- その際の尺度となるのが、厳密解。

数値解析結果と理論値との比較



Burgers方程式の厳密解

熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\quad(\alpha>0)$$

に、次の関数

$$\varphi=\exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\int u dx\right)$$

を代入すると、Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となる。

Cole-Hopf変換

先の関係式

$$\varphi=\exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\int u dx\right)$$

を書き改めると、

$$u=-2\alpha\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

となる。熱伝導方程式を解くことによって、

φ が求まれば、上式に代入することによって、

u が求まる。

この関係式はCole-Hopf変換と呼ばれる。

課題(3)

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\quad(\alpha>0)$$

- に、次の関数を代入すると、

$$\varphi=\exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\int u dx\right)$$

- 以下の式が導かれることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

解析解のための準備

- 偏微分方程式の各型毎に、
- 工学の問題として、直感の働きやすいものを選択し、
- 初期条件や境界条件を与えて、
- あらかじめ解析解を求めておくことにする。

↓

通常、解析解の多くは、関数列で展開される

関数展開の原理

関数F(x) が既知関数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x)$
線形結合によって記述されるとする。

$$F(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)+\ldots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$$

係数 $c_1,c_2,\ldots,c_m$ が適切に算出されれば、
任意関数F(x) は、既知関数 $\{\varphi_m(x)\}$
によって記述できたことになる。

関数展開のために望ましい性質

1. 直交条件(orthogonal):

$$\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0\quad(m\neq n)$$

2. 正規化条件(normalize):

$\varphi_m(x)=\varphi_n(x)$ のときノルム(norm)が定義できる

$$\|\varphi_m\|=\sqrt{\int_a^b\varphi_m^2(x)dx}$$

↓

正規直交関数

正規直交関数による展開係数の決定

正規直交関数 $\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_k(x)dx=\delta_{mk}$

ここで

$$\delta_{mk}\equiv\begin{cases}1 & (m=k)\\ 0 & (m\neq k)\end{cases}$$

クロネッカのデルタ関数

↓

$$\int_a^b\varphi_m(x)F(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_k(x)dx$$

↓

$$\int_a^b\varphi_m(x)F(x)dx=c_m\int_a^b\varphi_m^2(x)dx=c_m\longrightarrow\quad\{c_m\}$$

長方形のsin波による展開

区間[0 1]における関数

$$u(x)=1\quad(0\leq x\leq 1)$$

を正弦波で展開すると、

$$u(x)=1=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sin(2m-1)\pi x\quad(0\leq x\leq 1)$$

ここで、展開係数c_m は、

$$c_m=\frac{4}{(2m-1)\pi}$$

↓

長方形を展開するのに十分な展開項数は？

Program: ORTHG

偏微分方程式の厳密解(1/3)

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0\le x\le 1)$$

初期条件

$$u(x,0)=1$$

境界条件

$$u(0,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(1,t)=0$$

偏微分方程式の厳密解(2/3)

u(x,t)を $\left\{\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right\}$ で展開　(m=1,2,3,…..)

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m(t)\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

原方程式に代入

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{2m-1}{2}\pi x\frac{dc_m}{dt}=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2\sin\frac{2m-1}{2}\pi x$$

直交条件より

$$\frac{dc_m}{dt}=\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 c_m$$

よって、

$$c_m=c_{m0}e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t}$$

偏微分方程式の厳密解(3/3)

初期条件より

$$1=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}\frac{2m-1}{2}\pi x$$

よって解析解は

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}\exp\left[-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t\right]\sin\frac{2m-1}{2}\pi x$$

展開係数は

$$c_{m0}=\frac{4}{(2m-1)\pi}$$

双曲型方程式とその厳密解

波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\quad (0\le x\le 1)$$

初期条件と境界条件：

$$u(x,0)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 1/2)\\ 2(1-x) & (1/2\le x\le 1)\end{cases}\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$$

（解）

$$u(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 8}{\pi^2(2m+1)}\sin[(2m+1)\pi x]\cos[(2m+1)\pi ct]$$

弦の振動を記述するのに十分な展開項数は？

Program: WAVEXVB

波動方程式の厳密解

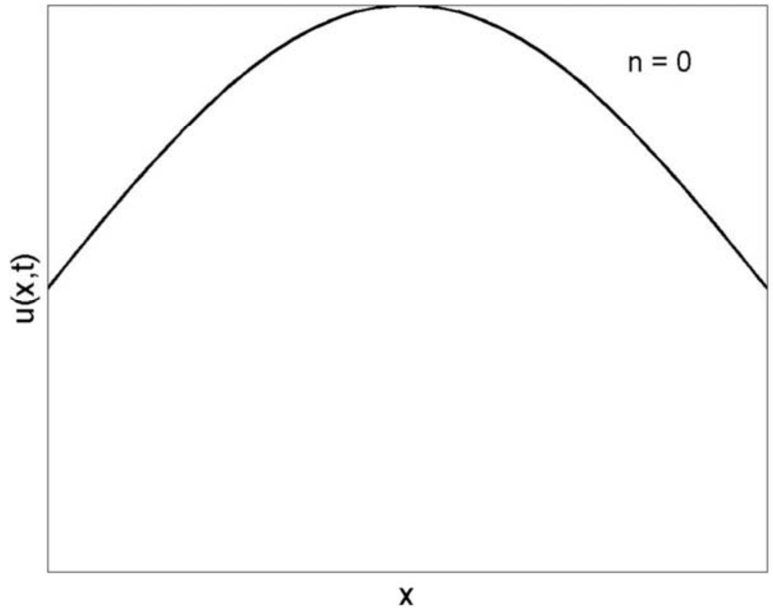
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件:

$$u(x,0) = \sin(\pi x)$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

（解）

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t$$



弦の振動の物理(1/2)

弦の微小部分ΔSに作用する力

$$\boldsymbol{F = -T\sin\theta\big|_x + T\sin\theta\big|_{x+\Delta x}}$$

釣合いの位置より弦の位置が小さいとしたら

$$\boldsymbol{\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}}$$

従って、

$$\boldsymbol{F = -T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} = T\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x \Delta x + \cdots\right)}$$

$$\boldsymbol{\approx T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_x \Delta x}$$

弦の振動の物理(2/2)

弦の単位長さ当りの質量をρとすると、

$$\boldsymbol{\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

$\boldsymbol{c = \sqrt{T/\rho}}$:弦の変位が伝播する速度

この方程式に減衰効果を加えると、電信方程式となる。

$$\boldsymbol{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

損失のある電線を伝わる電波はこの方程式に従う。

初期条件による波動方程式の解の違い

波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件：

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

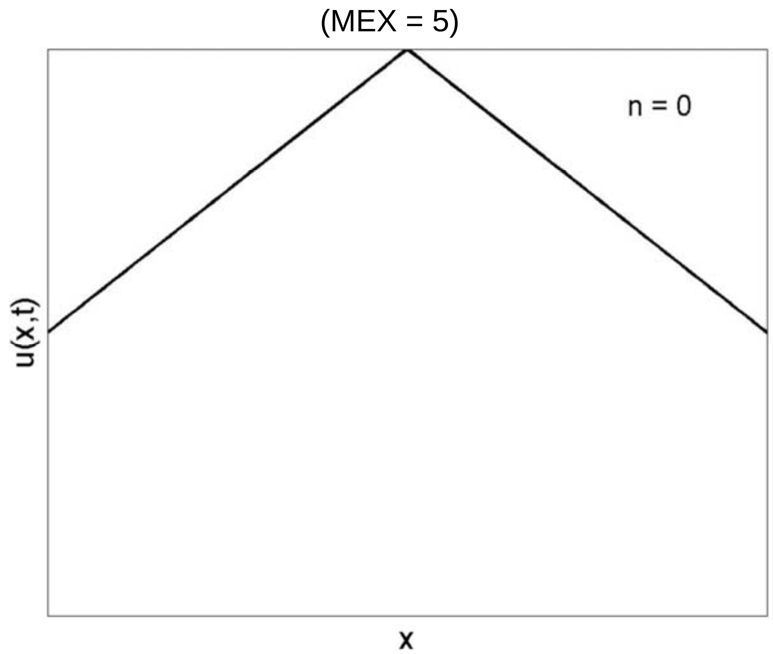
$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

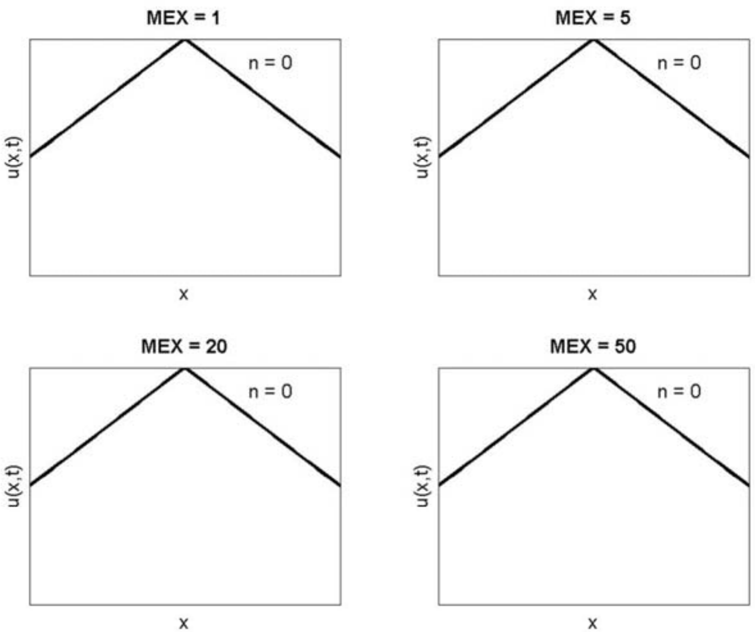
（解）

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t$$

弦の振動を記述するのに十分な展開項数は？

Program: WAVEXVB





対流方程式についての厳密解

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

$$\downarrow$$

対流方程式　(advection equation): 双曲型

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

対流方程式の厳密解の挙動

対流方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

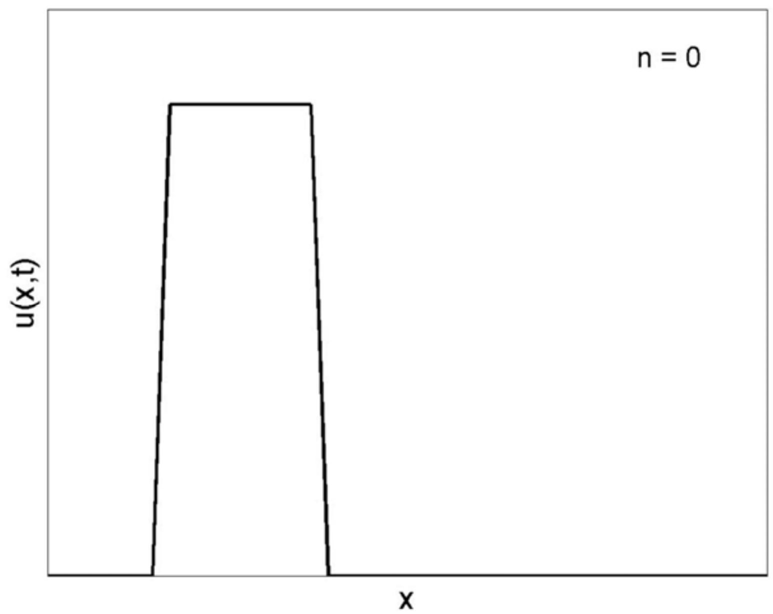
初期条件と境界条件:

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1/5) \\ 1 & (1/5 \le x \le 2/5) \\ 0 & (2/5 \le x \le 1) \end{cases}$$

$$u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0 \qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

（解）

$$u(x,t) = F(x - ct) \longrightarrow$$ Program: ADVEX



対流の物理

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} =$$ （境界xにおけるインクの流入量）
-（境界x+δxにおけるインクの流出量）

$$= cu|_x - cu|_{x+\Delta x}$$

$$= cu|_x - \left(cu|_x + \Delta x c \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + \frac{1}{2}\Delta x^2 c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \right)$$

よって、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

濃度拡散の効果を考慮すると、対流・拡散方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

放物型方程式とその厳密解

熱伝導方程式: $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件: $u(x,0) = 1$ $u(0,t) = 0$ $\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$

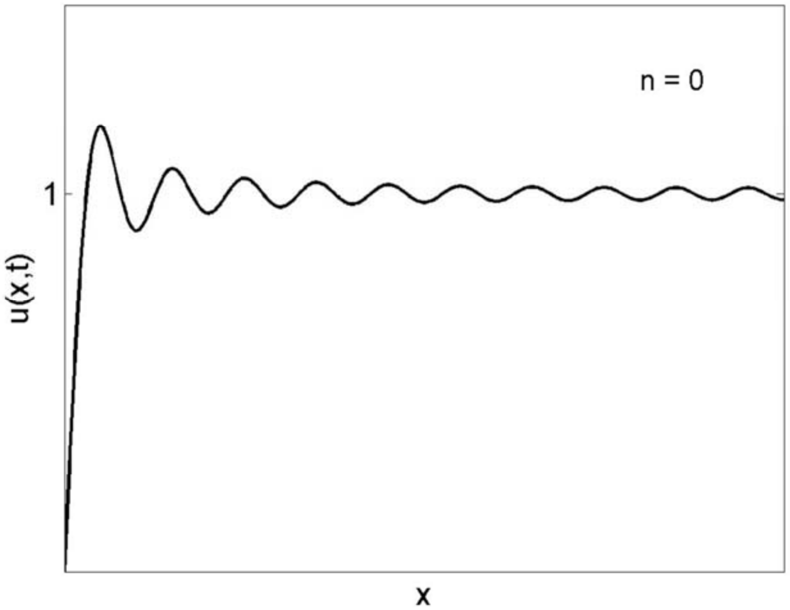
（解）

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp\left[-\frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4} t \right] \sin \frac{2m-1}{2}\pi x$$

展開係数

$$c_m = \frac{4}{(2m-1)\pi}$$

Program: HEATX



熱伝導の物理

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} \Delta x\text{の中での} \\ \text{熱発生} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{境界}x\text{における} \\ \text{熱の流入} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{境界}x+\Delta x\text{にお} \\ \text{ける熱の流出} \end{pmatrix}$$

$$q_x = -\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \qquad q_{x+\Delta x} = -\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

α=1とする。

$$q_{x+\Delta x} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_x \Delta x - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_x \Delta x^2 + \cdots$$

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta x g + \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

拡散方程式

Fick則

$$j_x = -D \frac{\partial u}{\partial x}$$

拡散方程式(diffusion equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

↓

熱伝導方程式と拡散方程式は同じ放物型方程式となる

熱伝導方程式の厳密解

熱伝導方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件と境界条件：

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

（解）

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

↓

Program: HEATX

楕円型方程式の厳密解

Poisson方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-g_0 \quad (0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1)$$

境界条件:

$$\begin{aligned} u(0,y)&=0 \quad (0\le y\le 1)\\ u(1,y)&=0 \quad (0\le y\le 1)\\ u(x,0)&=0 \quad (0\le x\le 1)\\ u(x,1)&=0 \quad (0\le x\le 1)\end{aligned}$$

（Dirichlet条件）

（解）

$$u(x,t)=\frac{4g_0}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2m+1)\pi}\right)\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)\sin[(2m+1)\pi x]\cos[(2m+1)\pi y]$$

↓

Program: POLAX

Poisson方程式が代表する物理

2次元非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g_0$$

定常状態とすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-g_0$$

↓

一様加熱される平板上の温度分布、その変化

楕円型方程式の厳密解

Laplace方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1)$$

境界条件:

$$\begin{aligned} u(0,y)&=0 \quad (0\le y\le 1)\\ u(1,y)&=0 \quad (0\le y\le 1)\\ u(x,0)&=0 \quad (0\le x\le 1)\\ u(x,1)&=1 \quad (0\le x\le 1)\end{aligned}$$

（Dirichlet条件）

（解）

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^m\right]}{m\sinh(m\pi)}\sinh(m\pi y)\sin(m\pi x)$$

↓

Program: POLAX

変係数の1次元Laplace方程式の厳密解

定数σ(σ>0)として変係数の1次元Laplace方程式:

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\sigma u)\frac{du}{dx}\right]=0 \quad (0\le x\le 1)$$

境界条件:

$$u(0)=0,\quad u(1)=1,$$

（解）

$$u(x)=-\frac{1}{\sigma}+\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{2+\sigma}{\sigma}x}$$

↓

Program: LAP1X

Laplace方程式の物理

比例定数αが温度uの関数であるとする:

$$\alpha(u) = 1 + \sigma u \quad (\sigma > 0)$$

より

$$q = -(1+\sigma u)\frac{\partial u}{\partial x} \quad (\alpha > 0)$$

変係数の1次元Laplace方程式が得られる。

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\sigma u)\frac{du}{dx}\right] = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

高温であるほど熱伝導係数が大きくなる

↓

高温領域ほど温度勾配が緩やか
低温領域ほど温度勾配が急峻となる

一次元Laplace方程式の解

一次元Laplace方程式:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

境界条件:

$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 1$$

（解）

$$u(x) = x \quad (0 \le x \le 1)$$

対流方程式の数値解の挙動 ～スキームの選択

- 以下の対流方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- 以下の境界条件と初期条件の下で、

$$u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1/5) \\ 1 & (1/5 \le x \le 2/5) \\ 0 & (2/5 \le x \le 1) \end{cases} \qquad u(0,t) = g_0 \quad g_0 = 0, \qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$$

- 以下の各スキームを用いて数値的に解析しなさい。
  - FTCS
  - 蛙とび法
  - 風上差分

Program: ADVEC

課題(4)

- 前ページに指定する微分方程式を、与えられた境界条件の下で、指定する差分スキームを用いて数値的に解析しなさい。
- 提出期日：　10月30日（金）
- 提出物は、
  - ・内容の説明したレポート
  - ・プログラムリスト
  - ・解析結果（数値出力、作図結果）

以上の全てを、A4レポート用紙ならびに電子媒体(CD)の両方により提出すること。