



# 乱流の数値解析

## ～乱流の物理モデル～

平成22年11月11日

筑波大学大学院システム情報工学研究科

金子 暁子

kaneko@kz.tsukuba.ac.jp

参考資料:「乱流の物理モデル第1」テキスト 益田重明著, 慶應義塾大学理工学部

1



# 目次

- 乱流とは何か, 乱流の特徴
- 乱流の統計的表現
- 乱流の表現
- 流れのエネルギーとエネルギー方程式
- 乱流の特性と数値シミュレーション
- シミュレーション法の分類
- 渦粘性の概念
- 0-方程式モデル
- 1-方程式モデル
- 2-方程式モデル
- LES
- まとめ

6



# 乱流とは何か

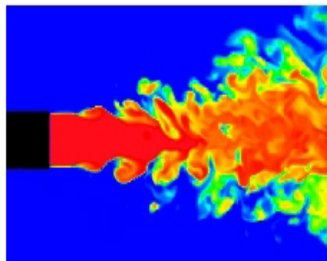
乱れ (Turbulence)

- ・規則性がない
- ・無秩序な
- ・予測のつかない

乱流 (Turbulent Flow)

- ・予測不可能な流れである.
- ・活発な混合が行われる.
- ・広範囲にわたる空間波長を持つ.

(Leiseur, Turbulence In Fluids, 2nd ed., Kluwer Academics Publishers, 1991)



乱流燃焼の様子.

<http://www.nmri.go.jp/turbulence/fire.jpg> 7



# 乱流の特徴1

- 渦運動
  - ・大小様々な渦が多数見える.
  - ・渦軸の方向も様々.
- 不規則運動
  - ・流速, 圧力等は時間的に不規則に変動する.
  - ・各瞬間の値は空間的にも不規則に分布.
- 三次元運動
  - ・平均的に二次元に見える流れでも, 時々刻々の流れでは奥行き方向の流れが存在.



拡散性 (diffusion)  
 変動性 (fluctuation)  
 散逸性 (dissipation)  
 相互作用 (interaction)

<http://www1.gifu-u.ac.jp/~gulib/kanpo/No32/NA-Leonald.gif>

8



## 乱流の特徴2

- 拡散性(diffusion)
  - 運動量拡散 ⇒ 抗力の変化
  - 熱拡散 ⇒ 伝熱促進
  - 物質拡散 ⇒ 攪拌, 混合の促進
- 変動性(fluctuation)
  - 圧力/流速の変動 ⇒ 疲労破壊, 乱流騒音
- 散逸性(dissipation)
  - ⇒ 運動エネルギーから熱エネルギーの不可逆変換
- 相互作用(interaction)
  - ⇒ 輸送性と乱流運動自体の相互作用

9



## 乱流の統計的表現

**微視的アプローチ:** 乱流を「不規則な渦運動の集合」と考える。  
個々の渦運動を三次元非定常な流体運動として扱う。

**巨視的アプローチ:** 乱流を「平均流と変動流の和」として考え、  
**平均流**に着目する。⇒ **工業的に取り扱いやすいアプローチ**。

**瞬時値**

$$\hat{u}_i, \hat{p}, \hat{\omega}_i, \hat{\phi}, \dots = \hat{f}(x_i, t)$$

**統計量**

集合平均(ensemble average), 時間平均(time average)  
空間平均(spatial average), 位相平均(phase average)  
相関(correlation), スペクトル(spectrum),

※定常乱流: 統計量が時間に依存しない乱流。

※一様乱流: 統計量が空間座標に依存しない乱流。

10



## 集合平均と時間平均

**集合平均**

$$\bar{f}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{f}_k(x_i, t)$$

**時間平均**

$$F(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{f}(x_i, t) dt$$

※定常乱流では集合平均と時間平均は一致...エルゴード性

巨視的アプローチでは

$$\hat{f} = F + f$$

瞬時値 = 平均値 + 変動値

11



## レイノルズ分解と運動方程式

$$\hat{u}_i = U_i + u_i$$

$$\hat{p} = P + p$$

連続の式と運動方程式(瞬時)

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.47)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_i \hat{u}_j}{\partial x_j} \right\} = \hat{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\hat{p} \delta_{ji}) + \frac{\partial \hat{\tau}_{ji}}{\partial x_j}. \quad (4.48)$$

$$\hat{\tau}_{ji} = \mu \hat{D}_{ji}, \quad \hat{D}_{ij} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}.$$

12



# 平均流と変動成分

平均流について

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.49)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j U_i + \overline{u_j u_i}) \right\} = F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-P \delta_{ji} + T_{ji}), \quad (4.50)$$

$$T_{ij} = \mu D_{ij}.$$

変動成分について

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.52)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i + U_j u_i + \overline{u_j u_i} - \overline{u_i u_j}) \right\} = f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \tau_{ji}), \quad (4.53)$$

$$\tau_{ij} = \mu d_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

13



# レイノルズ応力

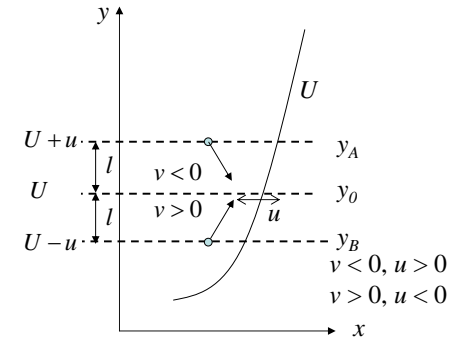
乱流においては流体塊が混合

$y_A \rightarrow y_0$   $y_0$ において流体は加速  
(速いものに引っ張られる)  
 $y_B \rightarrow y_0$   $y_0$ において流体は減速  
(遅いものに引きずられる)

乱れによる運動量の混合のため  
応力(レイノルズ応力)が発生

レイノルズ応力

$$\tau_R = -\rho \overline{u_i u_j} \quad \text{or} \quad \overline{u_i u_j}$$



乱流中のせん断応力

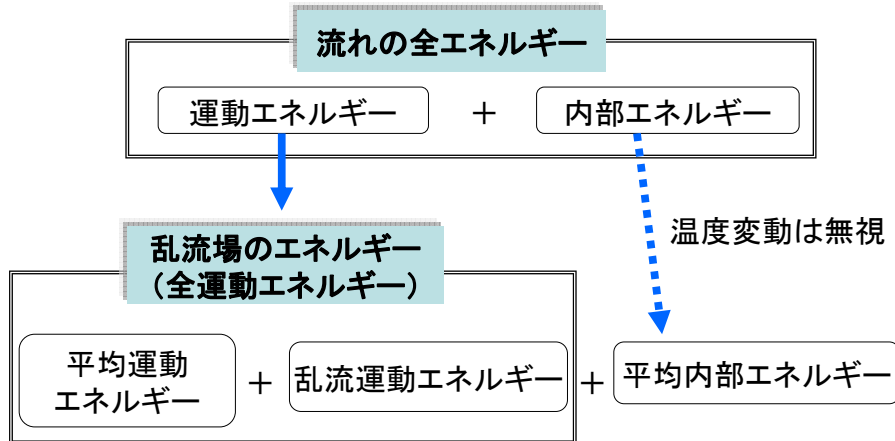
$$\frac{T_{ij}}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_j}$$

分子粘性による応力+乱流変動による応力

14



# 乱流におけるエネルギーの収支

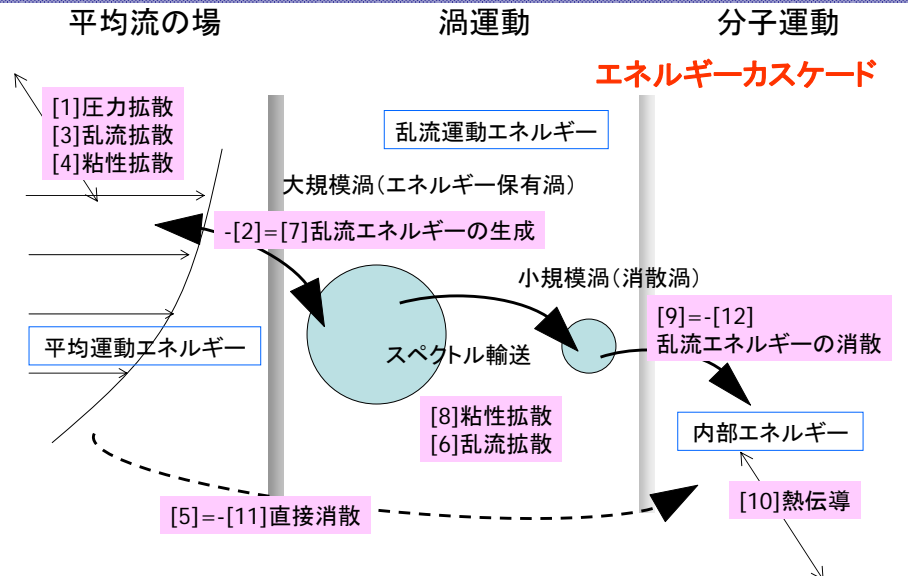


別紙参照

15



# エネルギー収支の全体像



16



# 乱流の渦スケール

散逸は粘性の作用によって生じる。そこで散逸と動粘性係数を用いて長さ、速度、時間の次元を持つ量を作ると

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \quad [m] \quad (5.45) \quad \text{小さな渦のスケールを表す}$$

$$u_\eta = (\varepsilon \nu)^{1/4} \quad [m/s] \quad (5.46) \quad \text{小さな渦の変動速度を表す}$$

$$\tau_\eta = (\nu / \varepsilon)^{1/2} \quad [s] \quad (5.47) \quad \text{小さな渦の存続時間を表す}$$

(5.45)式を**コルモゴロフのマイクロスケール**と言う

他方、大きい渦に注目すると散逸は大きい渦のスケールと変動速度を用いて

$$\varepsilon = C_D \frac{u^3}{L} \quad (C_D \text{は未定定数})$$

散逸は主に小さな渦で行われるが**エネルギーカスケード**を考えれば大きな渦のスケールと散逸にも関連性があると考えられる。

17



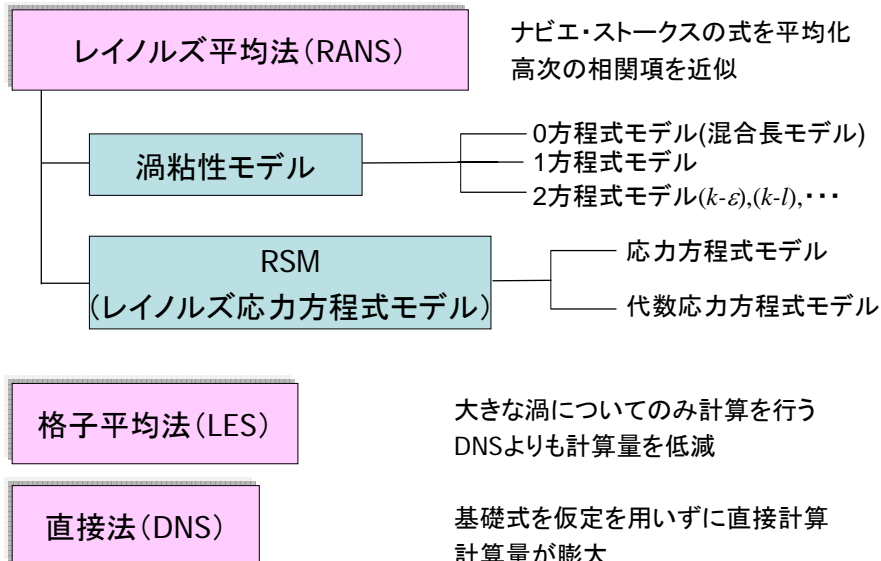
# 乱流の特性と数値シミュレーション

- **三次元性・非定常性**  
乱流は本質的に三次元非定常運動。  
従属変数  $u, v, w, p$  を独立変数  $x, y, z, t$  の関数として取り扱うため、計算量が層流解析に比べて増大。
- **スケールの広がり**  
乱流レイノルズ数  $R_T$  の増大とともに、マイクロスケールとミクロスケールの比が増大。(時空間で広い周波数範囲)
- **非線形性**  
乱流運動を支配する重要な現象は運動方程式の非線形性に起因。

18



# シミュレーション法の分類



19



# レイノルズ平均法の基礎方程式

平均流の運動方程式と連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.49)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j U_i + \overline{u_j u_i}) \right\} = F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-P \delta_{ji} + T_{ji}) \quad (4.50)$$

$$T_{ji} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.51)$$

レイノルズ応力  $\overline{u_i u_j}$  の独立な6成分に関する情報を組み込んで閉じた方程式系を構成。

⇒ レイノルズ応力方程式を連立させる。

20



# レイノルズ応力方程式

変動速度成分 $u_i$ に関するナビエ・ストークスの式

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i U_j + U_i u_j + u_i u_j - \overline{u_i u_j}) \right) = f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \tau_{ji}) \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.53)$$

{(4.52)の*i*成分  $\times u_j$ } + {(4.52)の*j*成分  $\times u_i$ }を演算し、平均をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{U_k u_i u_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{u_k u_i u_j} + (u_i \delta_{kj} + u_j \delta_{ki}) \frac{p}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right\} \\ [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4] \quad [5] \\ - \left( \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{\overline{u_i f_j} + u_j f_i}{\rho} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \quad (6.5) \\ [6] \quad [7] \quad [8] \quad [9] \end{aligned}$$

レイノルズ応力方程式

21



# レイノルズ応力方程式の意味

Convection	[1]	local rate of change of $\overline{u_i u_j}$
	[2]	advection
Diffusion	[3]	kinetic diffusion
	[4]	pressure diffusion
	[5]	viscous diffusion
Source / Sink	[6]	production by mean strain
	[7]	pressure strain correlation
	[8]	production by body force
	[9]	viscous dissipation

22



# 乱流エネルギー方程式

(6.5)式で*i* = *j* とおき,

$$k = \frac{\overline{u_i u_i}}{2}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

を代入すると,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{U_k k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_k u_i u_i} + \frac{u_k p}{\rho} - \nu \frac{k}{\partial x_k} \right) - \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i f_i} - \varepsilon. \quad (6.8)$$

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [8] [9]

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}$$

※[7] 圧力-歪み相関項は連続の式より0となる。

[7]項は乱流エネルギーの変化に直接の影響は与えない。外力場の乱流や、強い非等方性を持った乱流など、異方向間でのエネルギー交換が重要な流れに対しては不十分。

23



# 消散方程式

(4.52)式を $x_k$ で微分し、 $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  を乗じた後に平均すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{U_j \varepsilon} = & - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \\ [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4] \quad [5] \\ & - 2\nu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k} \overline{u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\ [6] \quad [7] \\ & - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - 2 \left( \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \quad (6.9) \\ [8] \quad [9] \end{aligned}$$

[1]	local rate of change of $\varepsilon$	[6]	production by mean strain
[2]	advection	[7]	production by mean rate of strain
[3]	kinetic diffusion	[8]	production by turbulent rate of strain
[4]	pressure diffusion	[9]	decay of $\varepsilon$
[5]	viscous diffusion		

24



# レイノルズ平均法と乱流モデル

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j + \overline{u_i u_j}) \right) = F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-P \delta_{ji} + T_{ji}) \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} U_k \overline{u_i u_j} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{u_k u_i u_j} + (u_i \delta_{kj} + u_j \delta_{ki}) \frac{p}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right\} - \left( \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{u_i f_j + u_j f_i}{\rho} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (6.5)$$

スカラー量  $\theta$  の輸送方程式  $\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\theta U_j + \overline{\theta u_j}) = X_\theta$

新たな未知量の発生により方程式系が閉じない. (Closure problem)

➡  $\overline{u_i u_j}, \overline{\rho \theta u_j}$  の近似表現をし, 失われた情報を回復.

## 乱流モデル

- ・広い適用範囲
- ・少数の基本概念から構成
- ・数学的に簡潔
- ・数値計算上, 安定.

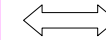
25



# 渦粘性の概念1

分子粘性: 分子の熱運動に伴う運動量交換により, 流れの速度差がならされる現象.  
渦粘性: 渦運動に伴う運動量交換により, 平均流の速度差がならされる現象.

粘性応力



レイノルズ応力

層流の応力テンソル  $\hat{\sigma}_{ij}$ 

$$\hat{\sigma}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \hat{p} \delta_{ij}, \quad \hat{p} = \frac{2}{3} \left( \frac{\rho \bar{c}^2}{2} \right), \quad \mu = \frac{1}{3} \rho \xi \bar{c} \quad (7.1)$$

 $\xi$ : 平均自由行程 $\bar{c}$ : 分子運動の平均速度

分子応力. . . . .	$\hat{\sigma}_{ij}$	レイノルズ応力. . . . .	$-\rho \overline{u_i u_j}$
分子粘性係数. . . . .	$\mu$	渦粘性係数 (eddy viscosity). . . . .	$\mu_T$
流速. . . . .	$\hat{u}_i$	平均流速. . . . .	$U_i$
分子運動の運動エネルギー. . . . .	$\bar{c}^2/2$	乱流エネルギー. . . . .	$k = \overline{u_k u_k}/2$
分子の平均自由行程. . . . .	$\xi$	渦運動の長さスケール. . . . .	$L_T$
分子運動の平均速度. . . . .	$\bar{c}$	渦運動の速度スケール. . . . .	$V_T$

26



# 渦粘性の概念2

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\rho \overline{u_k u_k}}{2}, \quad \mu_T = c \rho L_T V_T \quad (7.3)$$

もしくは

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ji} k, \quad \nu_T = \frac{\mu_T}{\rho} = c L_T V_T. \quad c: \text{定数} \quad (7.5)$$

$\mu_T$ : 渦粘性係数 (eddy viscosity)

$\nu_T$ : 渦動粘性係数 (kinematic eddy viscosity)

Boussinesq近似

$L_T, V_T$  をどのように与えるか. . .

	$L_T$	$V_T$
0-方程式モデル	代数式	代数式
1-方程式モデル	代数式	微分方程式
2-方程式モデル	微分方程式	微分方程式

27



# 渦粘性法の留意点・問題点

- 渦粘性の概念は平衡流, すなわち生成と消散が局所的に釣り合う流れに対して成り立つ.  
→ 流れの空間的変化が急な場合には成り立ちにくい.
- 勾配拡散仮定の是非. 乱流を層流と同様に考えられるのか.
- 分子粘性は等方的であるのに対して, 渦粘性は一般的に等方的ではない. 運動量拡散には方向性がある.

28



# 0-方程式モデル

## Prandtlの混合距離モデル

$y_0$ にある流速  $u$  の流体粒子

平均流速  $U$

移動可能な距離  $l$  平均速度勾配  $dU/dy$

混合長(Mixing length)

$$L_T = l$$

$y_A$ における速度の関係

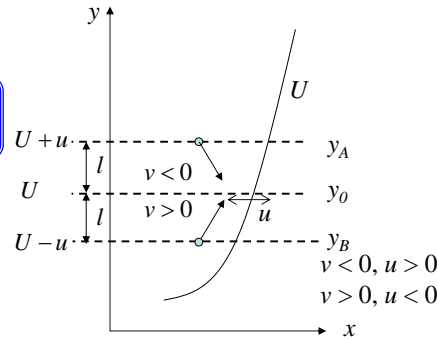
$$\hat{u}_{yA} = U + u \approx U + l(dU/dy)$$

$y_B$ における速度の関係

$$\hat{u}_{yB} = U - u \approx U - l(dU/dy)$$

$u$  と  $v$  のオーダーが等しいとすると

$$u \approx v \approx V_T = l(dU/dy)$$



混合距離モデルによるレイノルズ応力の表現

$$-\overline{\rho uv} \approx -\rho l^2 \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 = \rho \nu_T \left( \frac{dU}{dy} \right)$$

$$\therefore \nu_T = l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \quad (7.15)$$

29



# 混合距離の決定—壁乱流—

壁近傍 混合距離は壁からの距離に比例

$$l = \kappa y \quad (7.16) \quad \kappa \text{はカルマン係数 } \kappa=0.4 \sim 0.42$$

壁面近傍での乱れの減衰を考慮したVan-Driestの式を用いると

$$l = \kappa y \left( 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right) \quad (7.16)$$

$\tau_w$  壁面せん断応力

$u^*$  壁面摩擦速度

$$A^+ = 25 \sim 26$$

$$y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

壁から離れた位置 混合距離は一定

$$l = c_l \delta \quad (7.17) \quad \delta \text{は境界層厚さ又は管半径 } c_l = 0.09 \sim 0.11$$

(7.16)式と(7.17)式を滑らかに接続

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{\text{式(7.16)}^2} + \frac{1}{\text{式(7.17)}^2}$$

30



# 混合距離の決定—自由乱流モデル—

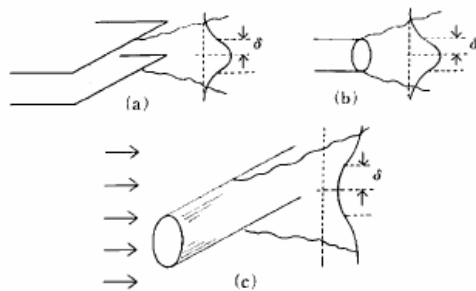


図5.1 自由乱流の流速分布と半値幅  $\delta$  の概念図  
[(a)平面噴流, (b)軸対称噴流, (c)二次元後流]

噴流や物体後流のような自由乱流

$$l = c_l \delta \quad \delta \text{は半値幅} \quad \text{平面噴流 } c_l=0.25 \quad \text{軸対称噴流 } c_l=0.21$$

$$V_T = U_{\max} - U_{\min} \quad (7.18) \quad \text{二次元後流 } c_l=0.4$$



# 1-方程式モデル

乱流エネルギー  $k$  を用いて乱流の代表速度を表現すると渦動粘性係数は

$$V_T \sim k^{1/2}, \quad L_T = cl$$

$l$  は乱流の代表スケール

$$\nu_T = CL_T k^{1/2}, \quad k = \frac{1}{2} \overline{u_i^2}$$

(6.8)式のままでは解けないので、生成項[6], 消散項[7], 乱流拡散項[3],[4]を修正

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_k k) = \nu_T \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - C_d \frac{k^{3/2}}{L_T} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (7.41)$$

[6]                      [7]                      [3],[4]

$C, C_d, \sigma_k$ : 経験定数,  $\sigma_k$ : 乱流プラントル数

31

32



## 2-方程式モデル

$L_T, V_T$ の両方を微分方程式で解くことで、  
流れ場の変化に対する適応力の増大を期待。

$V_T \sim k^{1/2}, L_T \sim l$   $l$  は大規模渦のスケール

$$v_T = C_l k^{1/2}, \quad k = \frac{1}{2} \overline{u_i^2}$$

$k$ と $(l^n k^m)$ を従属変数とする。  $n, m$ により種々の2-方程式モデルが存在。

$n$	$m$	第2変数	物理的意味
-2	1	$kl^{-2}$	$\omega^2 \sim \left(\frac{V_T}{L_T}\right)^2 \sim \left(\frac{k^{1/2}}{l}\right)^2 = \frac{k}{l^2}$ 大規模渦のエンストロフィー
-1	3/2	$\frac{k^{3/2}}{l} = \varepsilon$	$\varepsilon \sim \frac{V_T^3}{L_T} = \frac{V_T^3}{L_T} = \frac{k^{3/2}}{l}$ エネルギー消散率
-1	1/2	$\frac{k^{1/2}}{l}$	$f_T \sim \frac{V_T}{L_T} = \frac{k^{1/2}}{l}$ <b>k-εモデル</b> 大規模渦の特性周波数

33



## k-ε モデル

2-方程式モデルの中で最も普及している。

- 広範囲なテスト結果の蓄積
- 経験定数の吟味の充実
- 第2変数 $\varepsilon$ が物理的に明確な意味を持っていて、単純な流れでは測定し得る物理量。
- $\varepsilon$ は乱流エネルギーのバランスに直接関係

$$L_T \sim l \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \quad V_T \sim k^{1/2}$$

$$v_T = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = const.$$

乱流エネルギー式、消散方程式を解くことにより、  
渦動粘性係数の分布が定まる。

※種々の係数 $C_\mu, \sigma_k$ などは実験データ、高次モデルより決定。

平均流からのエネルギー

$$\frac{u^3}{l}$$

大規模渦

エネルギー消散

小規模渦

$$\varepsilon$$

エネルギーカスケード

※生成と消散が局所的に釣り合う流れに適している。  
流れの空間的変化が急な場合は成り立ちにくい。

34



## 標準k-εモデル

$$\frac{\partial k}{\partial t} = v_T \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_T \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \quad (7.55)$$

経験定数:  $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$

経験定数の決定

- 実験データに基づく $C_\mu$ の決定
- 高次モデル(レイノルズ応力方程式)に基づく $C_\mu$ の推定
- 格子の後の一様乱流場に注目した $C_{\varepsilon 2}$ の決定
- 壁面乱流に着目した $\sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}$ の決定  
(一定応力層, 局所平衡流, 対数速度分布)

標準値:  $C_\mu=0.09, C_{\varepsilon 1}=1.44, C_{\varepsilon 2}=1.92, \sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.3$

35



## k-ε モデルまとめ

長所

- 低次モデルに比べ適用範囲が広い。
- 2-方程式モデルの中でもっとも普遍性が高い。
- 方程式が少ないほど計算負荷は低いという点で、高次モデルより手軽。
- 初期条件、境界条件の数が少ない。

短所

- 渦粘性の過程自体の適用範囲の限界。(非平衡性, 非等方性が強い流れ)
- $\varepsilon$ -方程式の各項に関する実験情報の不足。
- $k$ -方程式の乱流拡散項のモデル化。

今後

- レイノルズ応力の非等方性について考慮(非等方性k-εモデル)。

$$-\overline{u_i u_j} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k + \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m,kk} + R_{ij}$$

36





# レイノルズ応力方程式モデル

レイノルズ応力方程式の厳密形から

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \overline{P_{ij}} - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} - C_1\left(\overline{u_i u_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{u_k u_k}\right) - C_2\left(\overline{P_{ij}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{P_{kk}}\right) + C_s \frac{\partial}{\partial x_k}$$

[生成] [消散]                      [圧力-歪相関]                      [拡散]

$$\overline{P_{ij}} = -\overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \quad (8.29)$$

$U_k$ , レイノルズ応力,  $k$ ,  $\varepsilon$ のみから構成.

運動方程式, 消散方程式を連立させることで閉じた系.



# Large Eddy Simulation (LES)

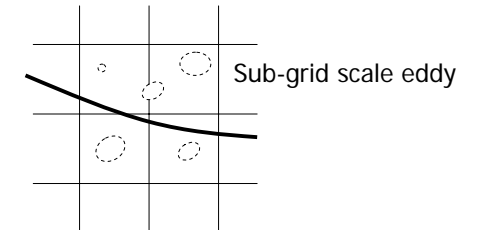
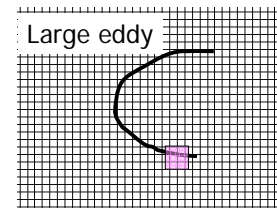
乱流のCoherent structure (組織構造)

...完全にランダムではなく, ある特定のパターンが時間・空間的に不規則に現れること.

アンサンブル平均 (乱流変動全てを除去)

格子平均法 (組織構造の部分を残す)

...N-S方程式にローパスフィルタをかけた状態.



# LESのモデル

N-S方程式の瞬時速度を空間平均速度, 空間変動速度に分解し整理する.

$$\hat{u}_i = \overline{u_i} + u_i'$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \overline{u}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} \quad (9.10)$$

レイノルズ平均法における渦粘性の概念と同様に

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_{sgs} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_{sgs} \delta_{ij}, \quad k_{sgs} = \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} \quad (9.12)$$

$\nu_{sgs}$ : Sub-grid scaleの渦粘性係数  $k_{sgs}$ : Sub-grid scaleの乱流エネルギー

- Smagorinsky model
- Vorticity model
- Turbulent energy model



# おわりに

レイノルズ平均法 (RANS)

ナビエ・ストークスの式を平均化  
高次の相関項を近似

渦粘性モデル

0方程式モデル (混合長モデル)  
1方程式モデル  
2方程式モデル ( $k-\varepsilon$ ), ( $k-l$ ), ...

RSM

(レイノルズ応力方程式モデル)

応力方程式モデル  
代数応力方程式モデル

格子平均法 (LES)




大きな渦についてのみ計算を行う  
DNSよりも計算量を低減

直接法 (DNS)

基礎式を仮定を用いずに直接計算  
計算量が膨大

乱流におけるエネルギー収支

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

	平均運動エネルギー式	乱流運動エネルギー式	平均内部エネルギー式
平均流線に沿っての時間変化率	$\frac{d}{dt} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) +$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{u_i u_i}}{2} \right) +$	$\frac{dE}{dt}$
熱伝導			[10] $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right)$ +
圧力拡散	[1] $-\frac{\partial}{\partial x_j} \left( U_i \frac{P}{\rho} \right)$ +		
速度拡散	[3] $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{u_i u_j} U_i \right)$ +		
粘性拡散	[4] $\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( U_i D_{ji} \right)$ +		
直接消散	[5] $-\nu D_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ +		[11] $\nu D_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ +
乱流エネルギーの生成	[2] $\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$	[7] $-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ +	
			
乱流エネルギーの消散		[9] $-\overline{\nu d_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ +	[12] $\overline{\nu d_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$
			
乱流エネルギーの粘性拡散		[8] $\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j d_{ji}}$ +	
乱流エネルギーの乱流拡散		[6] $-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_i}{2} \right)}$	