数値流体力学

筑波大学システム情報工学科
構造エネルギー工学専攻
阿部　豊

講義概要

- 学期:　第2学期
- 曜日校時:木曜日、3・4時限(12:15-15:00)
- 教室:　3B204号室
- 単位数:　2単位
- 教科書:「応用数値解析」、高橋亮一著、朝倉書店

講義予定(案)

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第1章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第2章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第3章) +変換 (テキスト第4章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第5章)+連立一次方程式の解法(テキスト第6章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第7章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第7章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析 by 金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際 by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) (予備日)

微分方程式の差分解法

微分方程式の差分解法例
ー　孤立波の衝突問題　ー

Boussinesq方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

初期条件:

$$u = 0.072 \operatorname{sec} h^2 [1.073(x-10)] + 0.048 \operatorname{sec} h^2 [0.876(x-20)]$$

境界条件:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (x = \pm\infty)$$

差分(代数)方程式への変換

基礎方程式:

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + c\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$
$$+ c^2\left[\left(u_{j+1}^n\right)^2 - 2\left(u_j^n\right)^2 + \left(u_{j-1}^n\right)^2\right]/2$$
$$+ \varepsilon d^2\left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n\right) \qquad (3 \le j \le 122)$$

$$c = \Delta t / \Delta x \qquad d = \Delta t / \Delta x^2 \qquad \Delta t = 0.25 \qquad \Delta x = 0.25$$

境界条件:

$$u_j^0 = u_j^{-1} = 0.072\,\mathrm{sec}\,h^2\left[1.073(j-3)\Delta x - 10\right]$$
$$+ 0.048\,\mathrm{sec}\,h^2\left[0.876(j-3)\Delta x - 20\right] \qquad (3 \le j \le 122)$$

$$u_3^n = u_{122}^n = 0 \qquad u_1^n = u_2^n = u_3^n \qquad u_{122}^n = u_{123}^n = u_{124}^n$$

変数の定義: $u_j^n \xrightarrow{\Delta} u\left(\Delta x \times j, \Delta t \times n\right)$

Program: SOLTN

差分スキームを吟味するための数学的概念

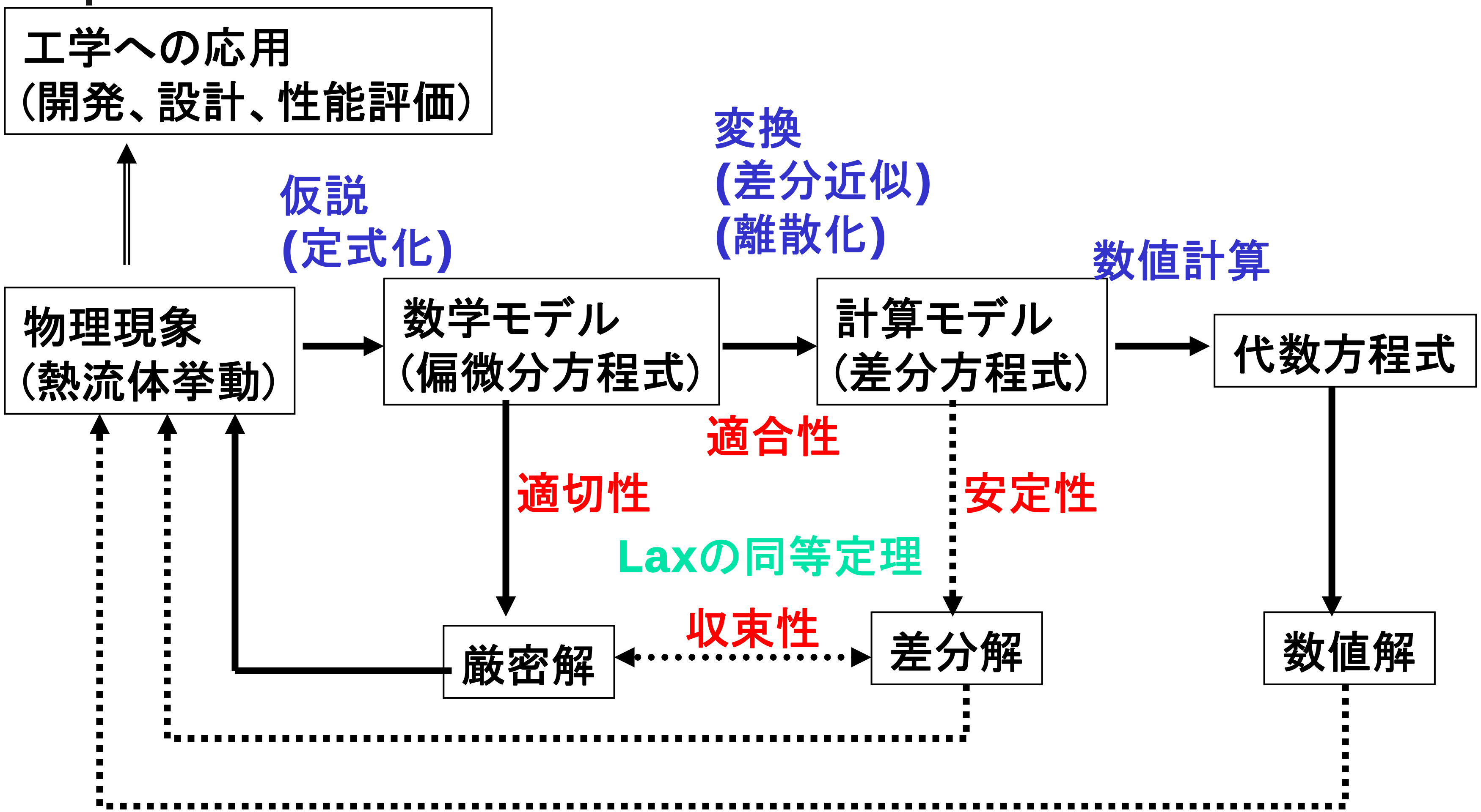
- 適切性(well-posed)
- 適合性(consistency)
- 安定性(stability)
- 収束性(convergency)

↓

- Laxの同等定理

「初期値問題が適切であるとき、差分スキームの差分要素が適合条件を満たしていて、安定であれば収束する。」

変換　ー変化する方程式の定性的性質ー



モデル問題：　線形問題に対する解析例

微分方程式：　$\dfrac{dy}{dx} = ay$　　初期条件：$y(0) = y_0$

厳密解：　$y(x) = y_0 e^{ax}$　　（適切性）

前進差分による差分表現：

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = a y_i, \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$ （適合性）

より　$y_{i+1} = (1 + \Delta x \cdot a) y_i$

i=0,1,2,・・・,n に対して記述すると、

$$\begin{aligned} y_i &= (1 + \Delta x \cdot a) y_{i-1} \\ y_{i-1} &= (1 + \Delta x \cdot a) y_{i-2} \\ &\vdots \\ y_2 &= (1 + \Delta x \cdot a) y_1 \\ y_1 &= (1 + \Delta x \cdot a) y_0 \end{aligned}$$

辺々掛け合わせることによって、　$y_i = (1 + \Delta x \cdot a)^i y_0$

モデル問題：　線形問題に対する解析例

$$y_i = (1 + \Delta x \cdot a)^i y_0$$

$0 < (1 + \Delta xa) < 1$　のとき

$i \to \infty$　に対して

$(1 + \Delta x \cdot a)^i \to$ 有界　　（安定性）

一方

$0 < \Delta xa << 1$　とすると $x = \Delta x \cdot i$　であるから

$y(x) = y_0 e^{ax}$　　をx=0のまわりで級数展開すると、

$$y(x) = y_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta xa}{1!} + \frac{(\Delta xa)^2}{2!} + \frac{(\Delta xa)^3}{3!} + \cdots \right\}^i \to y_0 (1 + \Delta x \cdot a)^i$$

（収束性）

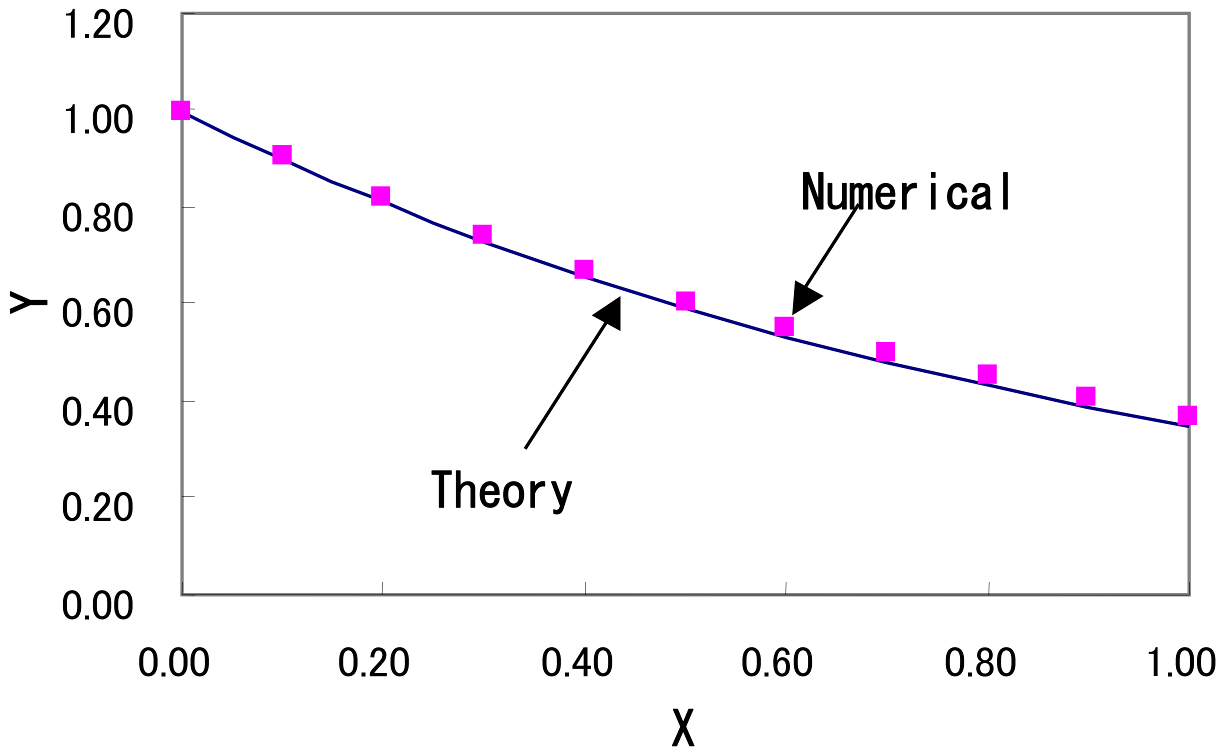
プログラム例

```
      x(1)=0.0
      y(1)=y0
      yex(1)=y0*exp(a*x(1))
      error(1)=(y(1)-yex(1))/yex(1)*100
      do 10 i=2,nmax+1
      x(i)=deltax*float(i-1)
      y(i)=y(i-1)+deltax*a*y(i-1)
      yex(i)=y0*exp(a*x(i))
      error(i)=(y(i)-yex(i))/yex(i)*100
10    continue
      yfin=(1.0+deltax*a)**nmax*y0
```

計算結果

i	x	Numerical Solution	Exact Solution	error(%)
1	0.00000e+00	1.00000e+00	1.00000e+00	0.00000e+00
2	1.00000e-01	9.00000e-01	9.04837e-01	-5.34621e-01
3	2.00000e-01	8.10000e-01	8.18731e-01	-1.06638e+00
4	3.00000e-01	7.29000e-01	7.40818e-01	-1.59529e+00
5	4.00000e-01	6.56100e-01	6.70320e-01	-2.12138e+00
6	5.00000e-01	5.90490e-01	6.06531e-01	-2.64466e+00
7	6.00000e-01	5.31441e-01	5.48812e-01	-3.16514e+00
8	7.00000e-01	4.78297e-01	4.96585e-01	-3.68284e+00
9	8.00000e-01	4.30467e-01	4.49329e-01	-4.19776e+00
10	9.00000e-01	3.87420e-01	4.06570e-01	-4.70994e+00
11	1.00000e+00	3.48678e-01	3.67879e-01	-5.21938e+00

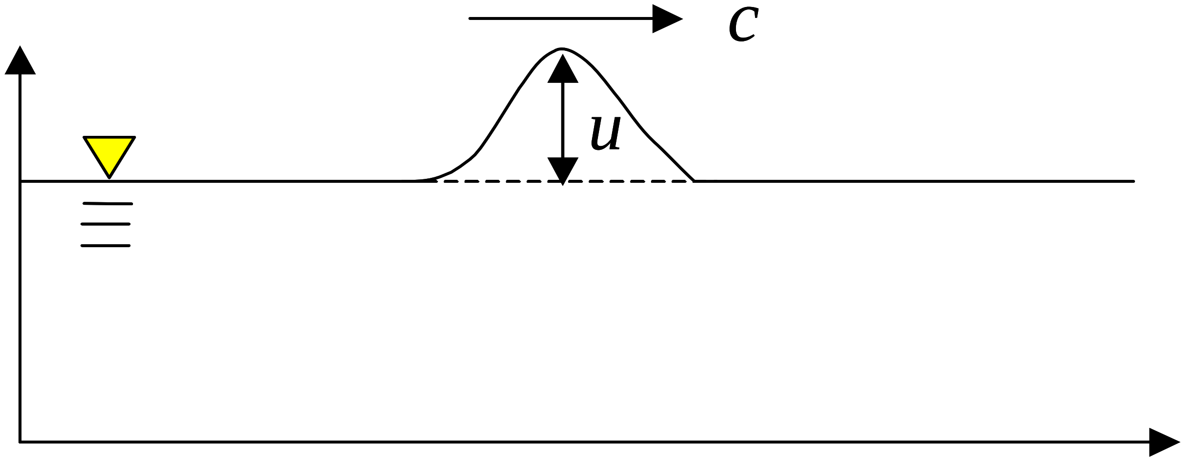
数値解析結果と理論値との比較

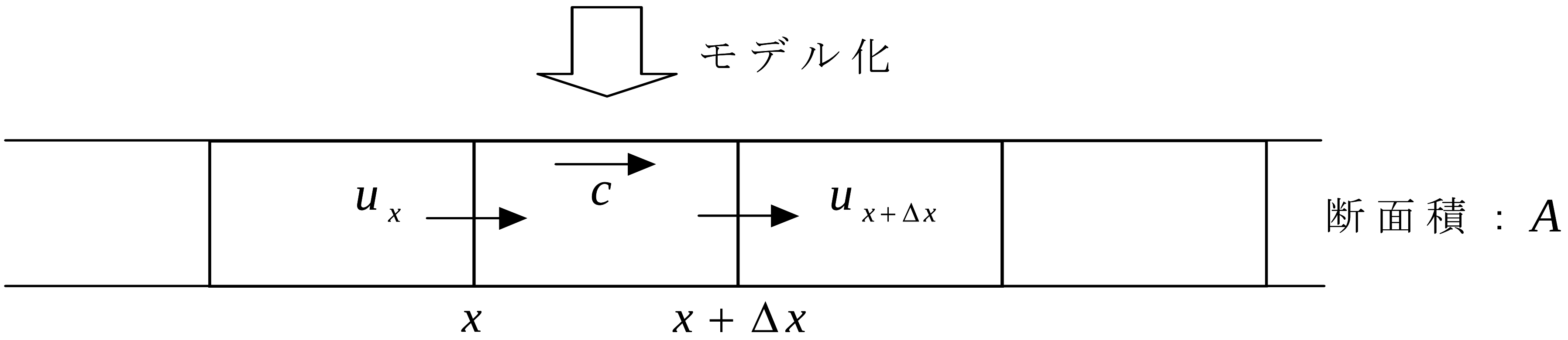


数値流体解析の基礎方程式

流体運動を記述する基礎方程式 ー　対流方程式　ー

変位 の波が一定の速さcで移動している





変位(波)の伝播のモデル化

$$\begin{pmatrix}\text{体積}(\Delta x\cdot A)\text{内の時間}\Delta t\text{間} \\ \text{における変位の蓄積量}\end{pmatrix} = \left(x\text{からの流入量}\right) - \left(x+\Delta x\text{からの流出量}\right)$$

$$\begin{aligned}(A\cdot\Delta x)\cdot\Delta u &= c\cdot A\cdot u_x\cdot\Delta t - c\cdot A\cdot u_{x+\Delta x}\cdot\Delta t \\ &= c\cdot A\cdot u_x\cdot\Delta t - c\cdot A\cdot\left(u_x + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)\cdot\Delta t \\ &= -c\cdot A\cdot\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta t\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta u}{\Delta t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$\Delta t \to$ 小の極限において

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}}$$

:対流方程式

対流速度 で変位 が移動している物理を記述

対流方程式の解

F を任意の関数として、

$$u(x,t) = F(x - ct)$$

（証明）

$\xi = x - ct$　とおくと

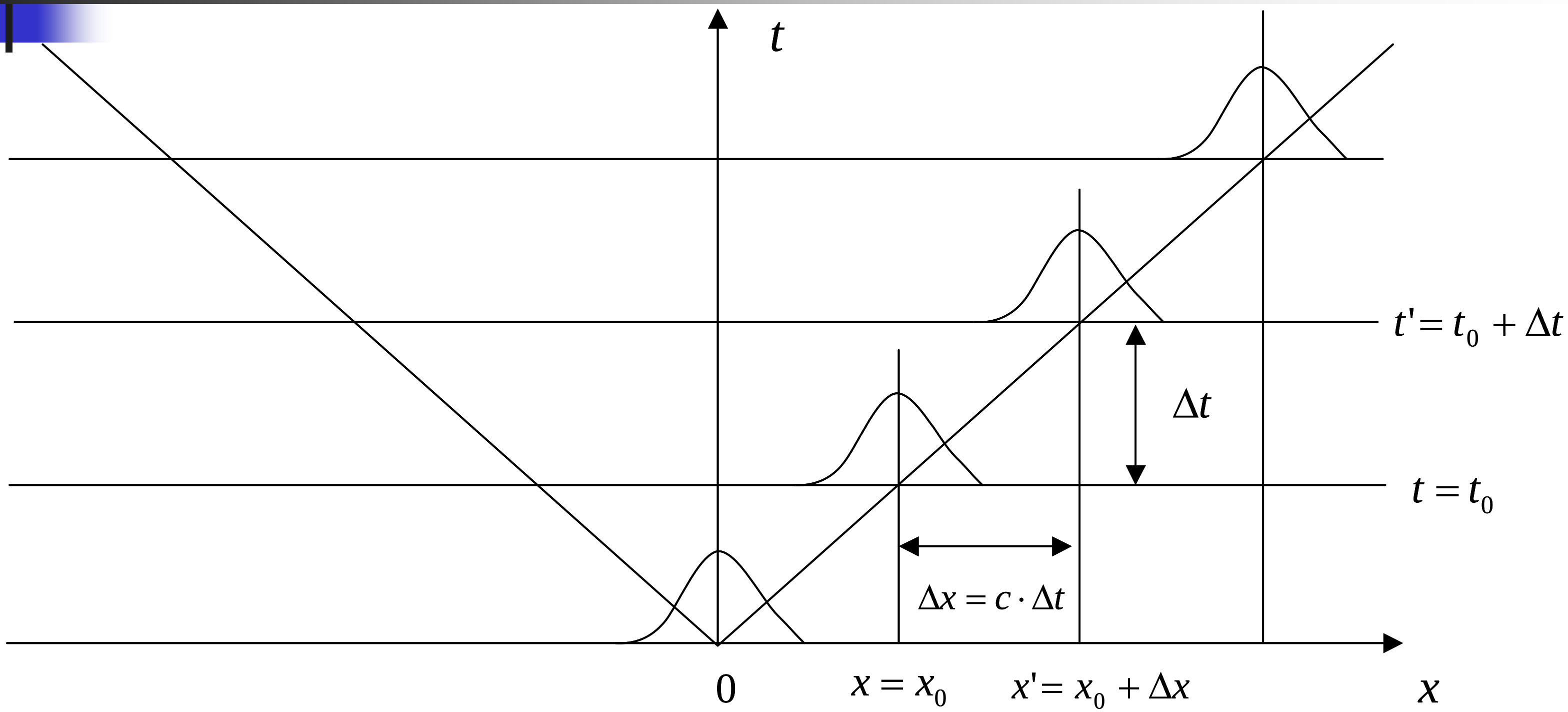
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot (-c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial \xi}$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c) \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi} = -c \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

対流方程式の解の性質
ー 対流方程式上の波の伝播 ー



$$\boldsymbol{F}\left(x'-ct'\right)=\boldsymbol{F}\left(x'-c\left(t_0+\Delta t\right)\right)$$
$$=\boldsymbol{F}\left(x'-ct_0-c\Delta t\right)$$
$$=\boldsymbol{F}\left(x_0-ct_0\right)\quad\left(\because\ x_0=x'-\Delta x\right)$$

時刻t‘ のときの波形と、時刻t_0 のときの波形とは同じであることを示している。

対流方程式が記述する物理とは、変形しない波の速度 での伝播である。

波動方程式との関係

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

波の伝播を記述する波動方程式は、以下の解(ダランベールの解)を有する。

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

波動方程式は、以下のようにも記述できるが、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

微分が可換であることを考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ あるいは $$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

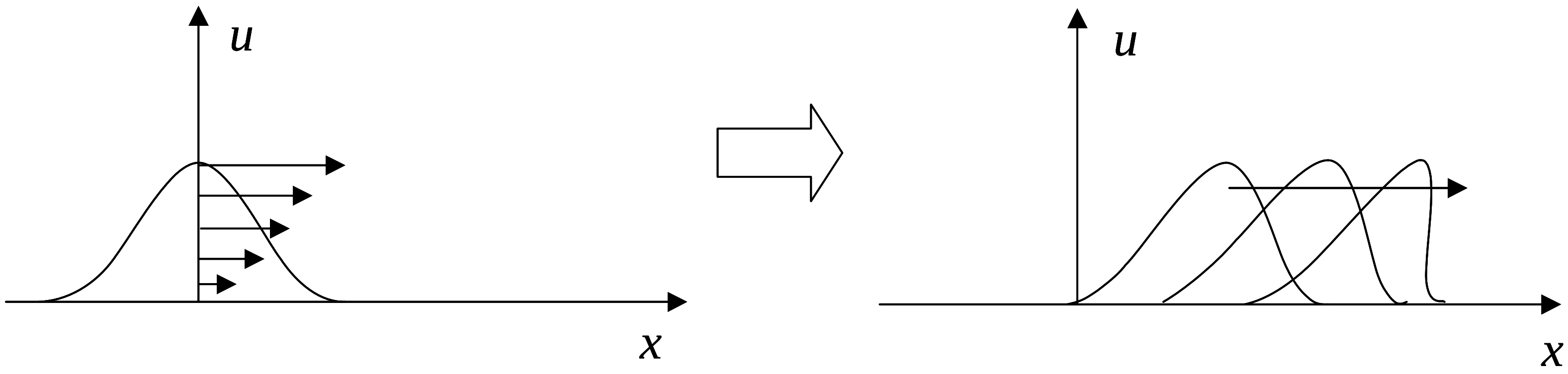
<u>対流方程式が波動方程式と同値なものであることが分かる。</u>

分散性

もし波の移動速度が波の変位の関数であるとすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

この式の意味するところは、変位 が大きいところでは、移動速度も大きくなることを示している。すなわち、



変位が大きい所で移動速度大 ⇒ 波が切り立ってくる

⇓

衝撃波となる

対流拡散方程式

変位の大きい部分が小さい部分へ移動する性質“拡散”を考慮すると、α を拡散係数として、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

体系が2次元の場合、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

“変位の拡散”を物理的な意味の応力テンソルとみなし、圧力による変位を考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}$$

上式は流体の挙動を記述するNavier–Stokes方程式に他ならない。すなわち、対流方程式は流体挙動を記述する最も基本となる関係式であることが分かる。

数値流体解析の基礎方程式のベクトル・テンソル表示

Navier-Stokes方程式

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla\cdot\pi + \rho\vec{g}}$$

ここで

$$\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\vec{v}\vec{v}\right) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\cdot\pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

せん断応力テンソルの成分

$$\begin{cases}
\tau_{xx} = -2\mu \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v}) \\
\tau_{yy} = -2\mu \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v}) \\
\tau_{zz} = -2\mu \dfrac{\partial v_z}{\partial z} + \dfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v}) \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\
\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right)
\end{cases}$$

速度勾配のテンソル表現

$$\nabla\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} & v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} & v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

速度勾配のテンソル表現

$$\nabla\cdot(\vec{v}\vec{v})=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z\\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z\\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z v_x)}{\partial z}\\ \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z v_y)}{\partial z}\\ \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y v_z)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z v_z)}{\partial z}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z v_x)}{\partial z}+\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]v_x\\ \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z v_y)}{\partial z}+\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]v_y\\ \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y v_z)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z v_z)}{\partial z}+\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]v_z\end{pmatrix}^T$$

$$=\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$$

せん断応力のテンソル表現

$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

だから

$$\nabla \cdot \pi = -\mu \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix}^T$$

速度の2階微分テンソル

$$\nabla\cdot(\nabla\vec{v})=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x}\\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y}\\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\end{pmatrix}^T$$

$$\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z}\\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z}\\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\end{pmatrix}^T$$

せん断応力のテンソル表現

$$\nabla\cdot\left[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^{T}\right]=\begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} \end{pmatrix}^{T}$$

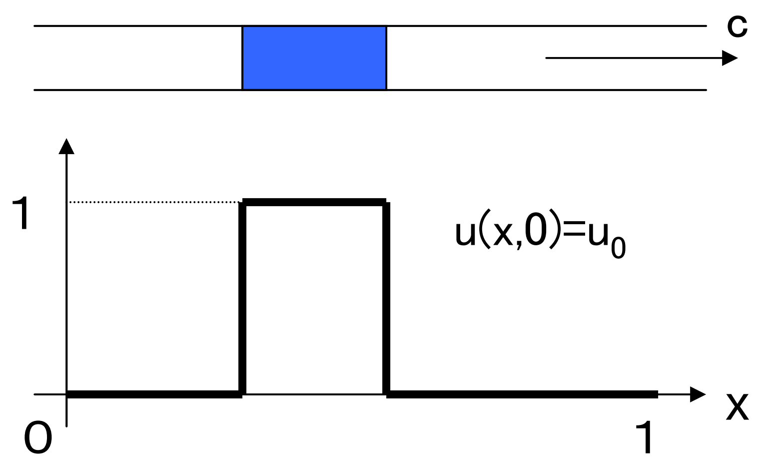
よって

$$\nabla\cdot\pi=-\mu\nabla\cdot\left[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^{T}\right]$$

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\nabla p-\nabla\cdot\pi+\rho\vec{g}}$$

モデル問題：　流れの中のインクの振舞い

浅くて狭い長さ1の流路が水平に置かれ、水が流速cで流れている。流路の底と側壁の水との相互作用はなく何の摩擦も働かない理想的な流路とする。流路の上流にインクを落とすと、それは下流に移動する。t=0のときのインク濃度u_0が時間ともにどのように変化するか。



問題の定式化

i. 1次元流れを仮定。

ii. インクは濃度勾配に比例して拡散すると仮定し、インクの物質流束 j はFickの拡散則に従うとする。

$$j = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\alpha > 0)$$

ここで、u はインク濃度

iii. インクの質量に対する質量保存則より
（インク濃度の変化率）Δx
=(対流による正味のインクの流入)
＋（拡散による正味の流入）

この物理現象を記述する数学モデルは、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Burgers方程式

線形である対流・拡散方程式の定数cを、従属変数uに置き換えると非線形のBurgers方程式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Burgers方程式は、Navier-Stokes方程式と同様の非線形性

Burgers方程式の厳密解

熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\alpha > 0)$$

に、次の関数

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int u dx \right)$$

を代入すると、Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となる。

Cole-Hopf変換

先の関係式

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int u dx \right)$$

を書き改めると、

$$u = -2\alpha \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

となる。熱伝導方程式を解くことによって、

φ が求まれば、上式に代入することによって、

u が求まる。

この関係式はCole-Hopf変換と呼ばれる。

モデル問題10

対流・拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

を次の初期条件

$$u(x,0) = u_0 = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le x_1) \\ 1 & (x_1 \le x \le x_2) \\ 0 & (x_2 \le x \le 1) \end{cases}$$

と次の境界条件

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(1,t) = 0$$

を与えて解き、インク濃度u(x,t)の振舞いを求めよ。

差分スキーム

対流・拡散方程式を、陽スキーム、対流項は風上差分、拡散項は中心差分として差分方程式に変換する。

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

ここで、変域を50分割する。（Δx=1/50）

内点をj=2, 3,……, 51とし、

境界点をj=1, j=52とする。

そのため、境界条件の離散化近似を、

$$u_1^n = u_2^n, \quad u_{52}^n = u_{51}^n$$

とおくことにする。

Program: INK

モデル問題11

次のBurgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 2)$$

に、次の初期条件

$$u(x,0) = 1 + \cos \pi x$$

と次の境界条件

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(2,t) = 0$$

を与えて数値的に解け。

Program: BURG

提出課題(1)

- 各自が行ったことのある数値解析(流体解析に限定しない)について、その対象となった物理、基礎方程式、境界条件、数値解析手法、解析結果、(もしあれば)実験との比較、等に関して、簡潔にレポートに纏めなさい。
- もし、数値解析の経験がない場合には、数値解析に関して考えるところをレポートに纏めなさい。
- 提出期限は、次回(9/9)までとする。

提出課題(2)

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\alpha > 0)$$

- に、次の関数を代入すると、

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int u dx \right)$$

- 以下の式が導かれることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 提出期限は、次々回(9/30)までとする。

提出課題(3)

- 以下のテンソル表現で記載されているNavier–Stokes方程式の各項の成分を書き下しなさい。

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \pi + \rho \vec{g}$$

- ただし、 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \pi = -\mu \nabla \cdot \left[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right]$$

- 提出期限は、次次々回(10/7)までとする。