演習問題５－１

- 軽水(H_2O)中に、熱中性子が密度$n=10^7(1/cm^3)$で存在している。軽水と熱中性子との反応率を求めなさい。ただし、軽水の密度$\rho=1.0(g/cm^3)$とし、アボガドロ数$N_A=6.022\times10^{23}(1/cm^3)$、反応のミクロ断面積を103(barn)、熱中性子の速度$v=2.2\times10^5(cm/s)$とする。

演習問題５－１ 回答の方針

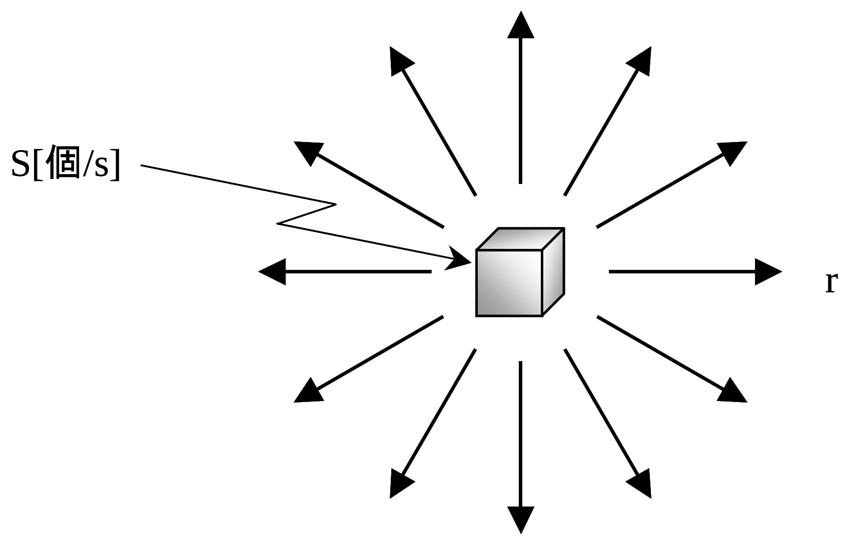
- 軽水の原子量は、18であるから、原子核数は、$N=N_A\rho/18=(6.022\times10^{23})(1.0)/18=$ (1/cm^3)、
- よって、1(barn)= 1.0×10^{-24}(cm^2)であることより、マクロ断面積Σは、
- $\Sigma=N\sigma=$ (1/cm)
- 従って、反応率Rは、
- $R=\Sigma vn=$ (1/cm^3/s)

演習問題5－1回答

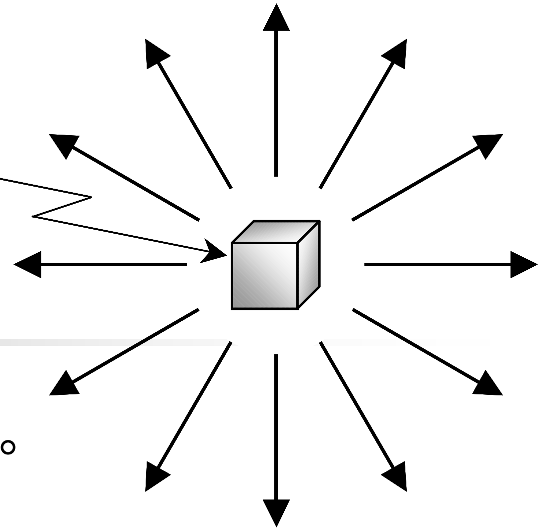
- 軽水の原子量は、18であるから、原子核数は、$N=N_A\rho/18=(6.022\times10^{23})(1.0)/18=0.344\times10^{23}$ $(1/cm^3)$、
- よって、1(barn)= $1.0\times10^{-24}(cm^2)$であることより、マクロ断面積Σは、
- $\Sigma=N\sigma=(0.344\times10^{23})(103\times10^{-24})=34.4(1/cm)$
- 従って、反応率Rは、
- $R=\Sigma vn=(34.4)(2.2\times10^5)(10^7)=7.57\times10^{13}$ $(1/cm^3/s)$

演習問題5-2

- 無限に広い媒質中に、毎秒S個の中性子を等方的に放出している点源がある。中性子束分布ϕを求めなさい。



演習問題5－2 解答 (1/4)



拡散方程式は、L:拡散距離とすると次式で与えられる。

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{L^2}\phi=0 \qquad ①$$

ここで、球座標系のラプラス演算子は

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad ②$$

となる。この計算では等方性を仮定しているのでj, qに無関係となり

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad ③$$

式③を式①に代入すると

$$\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{d\phi(r)}{dr}+r^2\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}\right)-\frac{1}{L^2}\phi=0 \qquad ④$$

演習問題5－2 解答 (2/4)

ここで　$w = r \cdot \phi(r)$ と置く。すると、

$$\frac{dw}{dr} = \phi(r) + r\frac{d\phi(r)}{dr}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d\phi(r)}{dr} + r\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} = 2\frac{d\phi(r)}{dr} + r\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

よって、式④は、

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{L^2}w = 0 \qquad ⑤$$

となる。この式の一般解は

$$w = Ae^{-r/L} + Be^{r/L}$$

で与えられる。改めて書き直すと

$$\phi(r) = \frac{A}{r}e^{-r/L} + \frac{B}{r}e^{r/L} \qquad ⑥$$

演習問題5－2 解答 (3/4)

条件より、無限遠点においては中性子束は無限大とならないので
B=0とならなければならない。よって式⑥は

$$\phi(r)=\frac{A}{r}e^{-r/L} \qquad ⑦$$

フィックの法則より、中性子の流れの密度Jは、

$$J=-D\frac{d\phi(r)}{dr}$$

$$=\frac{AD}{r^2}e^{-r/L}+\frac{AD}{Lr}e^{-r/L} \qquad ⑧$$

また、境界条件は中性子の流れの密度をJとすると、r=0において四方八方
にS[個/s]の中性子を放出すると考え、

$$\lim_{r\to 0}(4\pi r^2\cdot J)=S \qquad ⑨$$

演習問題5－2 解答 (4/4)

この式に式⑧を代入すると

$$\lim_{r\to 0} 4\pi r^2 \cdot \left(\frac{AD}{r^2} e^{-r/L} + \frac{AD}{Lr} e^{-r/L} \right) = 4\pi AD = S \qquad ⑩$$

よって、

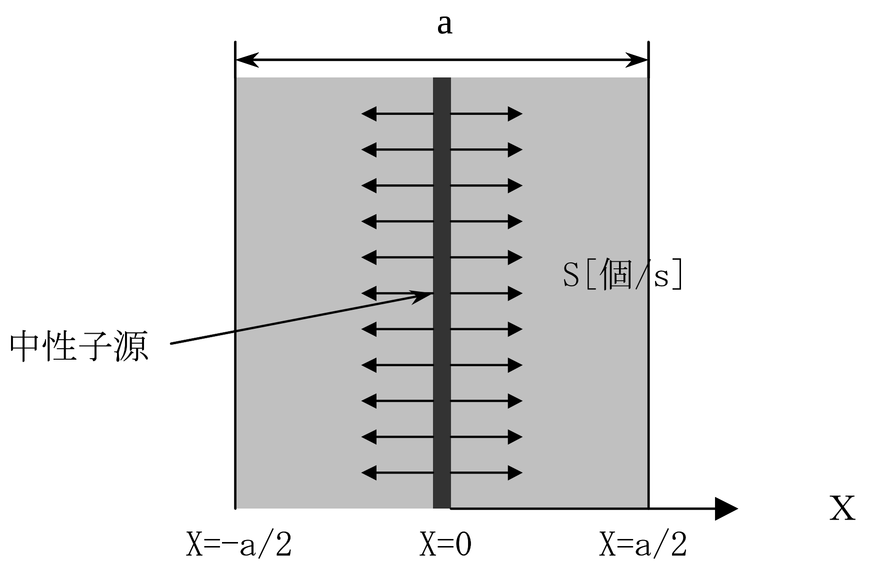
$$A = \frac{S}{4\pi D}$$

最終的に、中性子束分布φ(r)は

$$\phi(r) = \frac{S}{4\pi D} \cdot \frac{1}{r} e^{-r/L}$$

演習問題５－３

- 厚さaの無限に広い平板の中央に無限平面源があり、毎秒S個の中性子を放出している。中性子束分布ϕを求めなさい。



演習問題５－３　解答の方針

拡散方程式は、L：拡散距離とすると次式で与えられる。

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{L^2}\phi = 0 \qquad ①$$

今回はx方向のみの拡散を考えるので、式①は、

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi = 0 \qquad ②$$

上式を解くと、一般解は

③

分布は軸対称であるので、*x>0* の領域のみを考えると、境界条件は、 $\phi\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ であるから、 ④

④式を③式に代入して、整理すると

⑤

となる。これを式③に代入すると、

⑥

フィックの法則より、中性子の流れの密度Jは、

$$J = -D\frac{d\phi(x)}{dx} = \qquad ⑦$$

また、中性子の流れの密度をJとするとx=0において四方八方にS[個/s]の中性子を放出すると考え

$$\lim_{x\to 0} J = \frac{S}{2} \qquad ⑧$$

この式に式⑦を代入すると

$$A = \qquad ⑨$$

よって中性子束分布は、

$$\phi(x) =$$

演習問題5－3解答 (1/3)

拡散方程式は、L：拡散距離とすると次式で与えられる。

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{L^2}\phi = 0 \qquad ①$$

今回はx方向のみの拡散を考えるので、式①は、 $\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi = 0$ ②

上式を解くと、一般解は $\phi(x) = Ae^{-x/L} + Be^{x/L}$ ③

分布は軸対称であるので、$x>0$ の領域のみをまず考える。

境界条件は、

$$\phi\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \qquad ④$$

である。④式を③式に代入して、Bについて整理すると

$$B = -Ae^{-a/L} \qquad ⑤$$

となる。これを式③に代入すると、$\phi(x) = A\left[e^{-x/L} - e^{-(a-x)/L}\right]$ ⑥

演習問題５－３　解答 (2/3)

フィックの法則より、中性子の流れの密度Jは、

$$J = -D\frac{d\phi(x)}{dx} = AD\left[\frac{1}{L}e^{-x/L} + \frac{1}{L}e^{-(a-x)/L}\right] \quad ⑦$$

$$= \frac{AD}{L}\left[e^{-x/L} + e^{-(a-x)/L}\right]$$

また、中性子の流れの密度をJとするとx=0において四方八方にS[個/s]の中性子を放出すると考え

$$\lim_{x\to 0} J = \frac{S}{2} \quad ⑧$$

この式に式⑦を代入すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{AD}{L}\left[e^{-x/L} + e^{-(a-x)/L}\right] = \frac{AD}{L}\left[1 + e^{-a/L}\right] = \frac{S}{2} \quad ⑨$$

演習問題5－3 解答 (3/3)

よって、

$$A=\frac{S/2}{\frac{D}{L}\left[1+e^{-a/L}\right]}=\frac{LS}{2D}\cdot\frac{1}{1+e^{-a/L}} \qquad ⑩$$

ゆえに、式⑥は、

$$\phi(x)=\frac{LS}{2D}\cdot\frac{e^{-x/L}-e^{-(a-x)/L}}{1+e^{-a/L}} \qquad ⑪$$

<u>これはx>0の領域での分布だが、x<0の領域でも対称な分布を持つ。</u>

よって書き改めて

$$\phi(x)=\frac{LS}{2D}\cdot\frac{e^{-|x|/L}-e^{-(a-|x|)/L}}{1+e^{-a/L}} \qquad ⑫$$

演習問題５－４

- 拡散距離の２乗が、中性子が放出された点から吸収される点までの直線距離の２乗の平均の1/6に等しいことを示しなさい。

演習問題５－４ 解答の方針

$$\bar{r}^2 = \frac{3}{L}\int_0^{\infty} r^2 e^{-r/L} dr =$$

よって、拡散距離の2乗が、中性子が放出された点から吸収される点までの直線距離の2乗の平均の1/6に等しい。

演習問題5－4 解答 (1/3)

5-２より、無限媒質中に点源があり、そこより距離r離れた点における中性子束は

$$\phi(r) = \frac{S}{4\pi D} \cdot \frac{1}{r} e^{-r/L}$$

となる。ここで距離rと距離r+drの間の体積球殻で毎秒吸収される中性子の数dNを考える。中性子吸収マクロ断面積をとすると、

$$dN = \Sigma_a \cdot \phi(r) dV = \frac{S\Sigma_a}{D} re^{-r/L} dr$$

この式は、拡散距離を用いて書き改めることができ、

$$dN = \frac{S}{L^2} re^{-r/L} dr$$

となる。この源によって、毎秒総計S個の中性子が放出され、dN個の中性子がrとr+drの間で毎秒吸収されるとすると、放出された1個の中性子がdr中で吸収される確率はdN/Sと等しい。よって、

$$\frac{dN}{S} = p(r) dr = \frac{1}{L^2} re^{-r/L} dr$$

演習問題5－4 解答 (2/3)

よって、確率分布関数は

$$p(r)=\frac{1}{L^2}re^{-r/L}$$

となる。ここで、nが整数の場合、次式が成立する。

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$$

確率分布関数のn次のモーメントは次式で表される。

$$\bar{r}^2=\int_0^\infty r^n p(r)dr$$

ここで確率分布関数の2次のモーメントを考える。すなわち

$$\bar{r}^2=\int_0^\infty r^2 p(r)dr=\frac{1}{L^2}\int_0^\infty r^3 e^{-r/L}dr$$

$$=\frac{1}{L^2}\left[-L\left(r^3 e^{-r/L}\right)_0^\infty+3L\int_0^\infty r^2 e^{-r/L}dr\right]$$

演習問題5－4 解答 (3/3)

$$\bar{r}^2 = \frac{3}{L}\int_0^\infty r^2 e^{-r/L} dr$$

$$= \frac{3}{L}\left[-L\left(r^2 e^{-r/L} \right)_0^\infty + 6L\int_0^\infty r e^{-r/L} dr \right]$$

$$= 6\int_0^\infty r e^{-r/L} dr$$

$$= 6\left[-L\left(r e^{-r/L} \right)_0^\infty + L\int_0^\infty e^{-r/L} dr \right]$$

$$= 6L^2$$

よって、拡散距離の2乗が、中性子が放出された点から吸収される点までの直線距離の2乗の平均の1/6に等しい。

演習問題５－５

- 以下の積分を実行せよ。

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-\Sigma_t r}\cdot\left[\phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 r\cos\theta\right]\cos\theta\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

演習問題5－5 解答 (1/2)

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\int_{r=0}^{\infty} e^{-\Sigma_t r} \cdot \left[\phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 r \cos\theta \right] dr = \phi_0 \int_{r=0}^{\infty} e^{-\Sigma_t r} dr + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \cos\theta \int_{r=0}^{\infty} e^{-\Sigma_t r} r dr$$

$$= \phi_0 \left[-\frac{e^{-\Sigma_t r}}{\Sigma_t} \right]_{r=0}^{\infty} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \cos\theta \left[-\frac{e^{-\Sigma_t r}}{\Sigma_t{}^2} \right]_{r=0}^{\infty}$$

$$= \frac{\phi_0}{\Sigma_t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 \frac{1}{\Sigma_t{}^2} \cos\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{-\cos 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

演習問題５－５ 解答 (2/2)

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-\Sigma_t r}\cdot\left[\phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 r\cos\theta\right]\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{\Sigma_s}{4\pi}2\pi\left(\phi_0\frac{1}{2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \frac{1}{\Sigma_t{}^2}\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Sigma_s\left\{\frac{\phi_0}{4} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \frac{1}{6\Sigma_t{}^2}\right\}$$