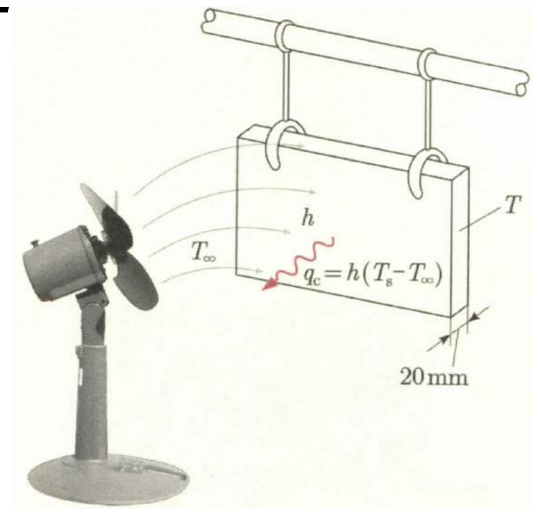
問題4-1

図3に示すように，厚さ20 mm の十分大きい
炭素鋼板が均一温度T_i= 800 K に加熱された後，
T_∞=300 Kの空気中で冷却される。空気との熱伝達率を
h=80W/(m^2･K)とすると、T=550 Kとなる時間を推定せよ。
ただし、炭素鋼板の熱伝達率k=43W/(m･K)、代表長さ
L=0.01 mとする。
また、ビオ数Bi≪1のとき、集中熱容量モデルとして
以下の式を用いてよい。

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(- \frac{hS}{c\rho V} t \right) = \exp\left(- Fo \cdot Bi \right)$$



問題4−2

鉄（k=45W/m^2・K、α=1.4×$10^{-5}$$m^2$/s）のブロックを最初一様な温度35℃にしておき、

(a)突然表面の温度を250℃に上げる場合
(b)突然に一定表面熱流束3.2×10^5W/m^2を加える場合

について、0.5分後の表面から2.5cmの位置の温度を計算せよ。
ただし、右の表を使用して良い。

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\ \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.54	0.55494
0.56	0.57162
0.58	0.58792
0.60	0.60386
0.62	0.61941
0.64	0.63459

問題4-3

大きなアルミニウムの棒材が一様な温度200℃に保たれていて、突然、表面温度が70℃に下がった。4.0 cmの深さのところの温度が120度に下がったときまでに棒材表面の単位面積あたりに逃げた熱量を求めよ。

ただし、アルミニウムの物性値は、

$$\alpha = 8.4 \times 10^{-5} m^2 / s, \quad k = 215 W / m \cdot K$$

とする。

問題4-4

以下の変数の定義式を記述し、それぞれが無次元となることを示しなさい。

- レイノルズ数
- ビオ数
- フーリエ数

解法の手順4-2(a)

$$\frac{T(x,\tau)-T_i}{T_o-T_i}=1-erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

内部の温度分布は

$$\frac{T(x,\tau)-T_0}{T_i-T_0}=erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

であるから、

$$T(x,\tau)=T_o-(T_o-T_i)\cdot erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

となる。また、

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}=$$

なので、右の表より、

$$T(x,\tau)=T_o-(T_o-T_i)erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}=$$

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.54	0.55494
0.56	0.57162
0.58	0.58792
0.60	0.60386
0.62	0.61941
0.64	0.63459

表面での熱流束は以下の式で与えられる。

$$\frac{Q_0}{A} = q_0 = \frac{k(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}$$

解答手順4−3

アルミニウムの物性値は　$\alpha = 8.4\times10^{-5} m^2/s,\quad k = 215 W/m\cdot K$

また　$T_i = 200^\circ C,\quad T_0 = 70^\circ C,\quad T(x,\tau) = 120^\circ C$

であるから、温度分布の式より　$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{T - T_0}{T_i - T_0} =$

の式より、$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} =$

よって、　$\tau = \frac{x^2}{4\alpha\cdot\eta^2} =$

実際に放出した単位面積当たりの総熱量は

$$\frac{Q_T}{A} = \int_0^t q_0 d\tau = \int_0^t \frac{k(T_i - T_0)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} d\tau = 2k(T_i - T_0)\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}} =$$

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.32	0.34913
0.34	0.36934
0.36	0.38933
0.38	0.40901
0.40	0.42839
0.42	0.44749

解答4-1

代表長さL=0.01 m であることから、ビオ数は

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{80 \times 0.01}{43} = 1.860 \times 10^{-2}$$

となる。したがってBi≪1のため、集中熱容量モデルが適用できる。

$$Fo \cdot Bi = ln\theta = ln\frac{550-300}{800-300} = -0.6931 \qquad \therefore Fo \approx 37.26$$

さらに $Fo = \dfrac{\alpha t}{L^2}$ より、

$$t = \frac{Fo \cdot L^2}{\alpha} = \frac{37.26 \times 0.01^2}{1.18 \times 10^{-5}} \approx 316\,\mathrm{sec}$$

解法の手順4-2(a)

$$\frac{T(x,\tau)-T_i}{T_o-T_i}=1-erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

内部の温度分布は

$$\frac{T(x,\tau)-T_0}{T_i-T_0}=erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

であるから、

$$T(x,\tau)=T_o-(T_o-T_i)\cdot erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

となる。また、右の表より、

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}=\frac{0.025}{2\sqrt{(1.4\times10^{-5})\cdot 30}}=0.61$$

なので、

$$T(x,\tau)=T_o-(T_o-T_i)\cdot erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$=250-(250-35)\cdot 0.61$$

$$=250-131.15=118.85(°C)$$

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.54	0.55494
0.56	0.57162
0.58	0.58792
0.60	0.60386
0.62	0.61941
0.64	0.63459

解答4-2(b)

内部の温度分布は

$$T - T_i = \frac{2q_0\sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{kA}\left(1 - erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

である。表面熱流束q_0/A= 3.2×10^{5}W/m^{2}なので、

$$T(x,\tau) = 35 + \frac{2\cdot(3.2\times10^5)\cdot\sqrt{(1.4\times10^{-5})\cdot 30/\pi}}{45}\exp(0.61)$$

$$-\frac{0.025\cdot(3.2\times10^5)}{45}(1 - erf(0.61))$$

$$= 79.3 \quad {}^\circ C$$

よって表面温度は

$$T(x=0,\tau) = 35 + \frac{2\cdot(3.2\times10^5)\cdot\sqrt{(1.4\times10^{-5})\cdot 30/\pi}}{45}\exp(0.61)$$

$$= 199.4 \quad {}^\circ C$$

解答4-3

アルミニウムの物性値は　$\alpha = 8.4\times10^{-5} m^2/s,\quad k = 215 W/m\cdot K$

また　$T_i = 200^\circ C,\quad T_0 = 70^\circ C,\quad T(x,\tau) = 120^\circ C$

温度分布の式より　$$\frac{120-70}{200-70} = erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.3847$$

また、$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.3553$$

よって、$$\tau = \frac{x^2}{4\alpha\cdot(0.3553)^2} = \frac{0.04^2}{4\cdot(0.3553)^2\cdot(8.4\times10^{-5})} = 37.72 \quad s$$

実際に放出した単位面積当たりの総熱量は

$$\frac{Q_0}{A} = \int_0^t q_0 d\tau = \int_0^t \frac{k(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} d\tau = 2k(T_0 - T_1)\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}}$$

$$= 2\cdot215\cdot(70-200)\sqrt{\frac{37.72}{\pi\cdot(8.4\times10^{-5})}} = -21.13\times10^6 \quad J/m^2$$

解答4-4

フーリエ数とビオ数の定義式は

ビオ数: $Bi \equiv \frac{hs}{k}$　　レイノルズ数: $\mathrm{Re} \equiv \frac{u \cdot D}{\nu}$

フーリエ数: $Fo \equiv \frac{\alpha\tau}{s^2}$

であるから、各変数の次元を考慮すると、

$$Bi \equiv \frac{hs}{k} = \frac{\left[\frac{W}{m^2 K}\right][m]}{\left[\frac{W}{mK}\right]} = [1]^0 \qquad \mathrm{Re} \equiv \frac{u \cdot D}{\nu} = \frac{\left[\frac{m}{s}\right][m]}{\left[\frac{m^2}{s}\right]} = [1]^0$$

$$Fo \equiv \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{\left[\frac{m^2}{s}\right][s]}{[m]^2} = [1]^0$$

レポート回答例：理論解析結果

(20),(26)式より、(6)式の解は

$$T^*(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}e^{-P_n^2\alpha t}\cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X}x\right\} \qquad (27)$$

となる。(5)式より、

$$\frac{T-T_w}{T_a-T_w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4X^2}\alpha t}\cos\left\{\frac{(2n-1\pi)}{2X}x\right\} \qquad (28)$$

または、

$$T=T_w+(T_a-T_w)\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4X^2}\alpha t}\cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X}x\right\} \qquad (29)$$

ここで

$$a_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad (30) \qquad\qquad F_0=\frac{\alpha t}{X^2}\ \text{：フーリエ数} \qquad (31)$$

とおくと、温度分布の時間変化を表わす式：T(x,t)

$$\boxed{T=T_w+(T_a-T_w)\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}e^{-(2n-1)^2a_1F_0}\cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X}x\right\}} \qquad (32)$$