有限差分法（FDM）による流動挙動の数値解析

§1　目的

近年計算機の高速化と大容量化に伴って、複雑な流動挙動を計算機を用いて数値的に求めることが可能となってきた。本実験においては、流体運動を記述する基礎方程式を、さまざまな差分スキームによって数値解析し、得られた数値解を吟味することにする。一連のプログラムを通して、流体運動を記述する物理現象の定式化の意味、微分方程式の離散化によって得られた計算モデルの適合性や適切性、差分解の安定性や収束性について、具体的に体験することによって、有限差分解析（Finite Difference Method）の基礎を学習する。

§2　実験の日程

＜実験の日程＞

第１日目　実験の説明、流体方程式の説明、有限差分法の説明、例題
第２日目　例題プログラムの作成、計算
第３日目　プログラムの作成、計算
第４日目　プログラムの作成、計算
第５日目　レポートの作成、発表資料作成
第６日目　発表会　（提出締め切り：発表会前）

§3　流体の数値解析に使用する流体方程式

対流方程式　$\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$　の物理的な意味

3.1　対流方程式の導出

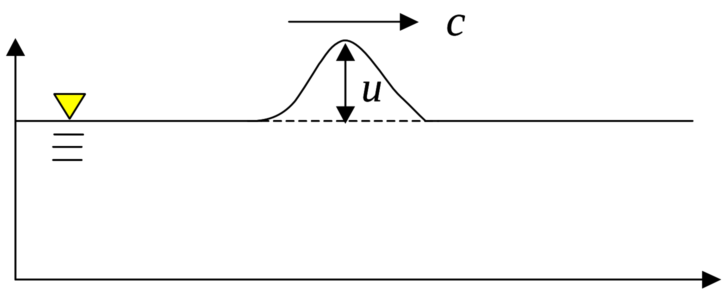

図１　波の伝播の模式図

今、変位uの波が速さcで移動するものとする。

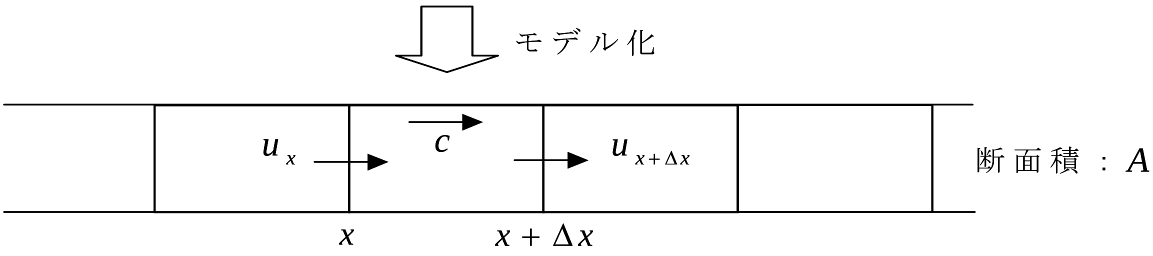

図 2　波の伝播のモデル図

$$\begin{pmatrix}\text{体積}(\Delta x\cdot A)\text{内の時間}\Delta t\text{間} \\ \text{における変位の蓄積量}\end{pmatrix} = \left(x\text{からの流入量}\right) - \left(x+\Delta x\text{からの流出量}\right)$$

$$\left(A\cdot\Delta x\right)\cdot\Delta u = c\cdot A\cdot u_x\cdot\Delta t - c\cdot A\cdot u_{x+\Delta x}\cdot\Delta t$$

$$= c\cdot A\cdot u_x\cdot\Delta t - c\cdot A\cdot\left(u_x + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)\cdot\Delta t$$

$$= -c\cdot A\cdot\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta t$$

$$\therefore \frac{\Delta u}{\Delta t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$\Delta t \to$ 小の極限において

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{：対流方程式} \qquad (1)$$

対流速度 c で変位 u が移動している物理を記述している。

3.2　対流方程式の解

$$u(x,t) = F(x-ct) \qquad F\text{ は任意の関数}$$

（証明）

$\xi = x - ct$ とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot(-c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial \xi}$$

よって

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c)\cdot\frac{\partial F}{\partial \xi} = -c\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2)$$

3.3　対流方程式の解の性質

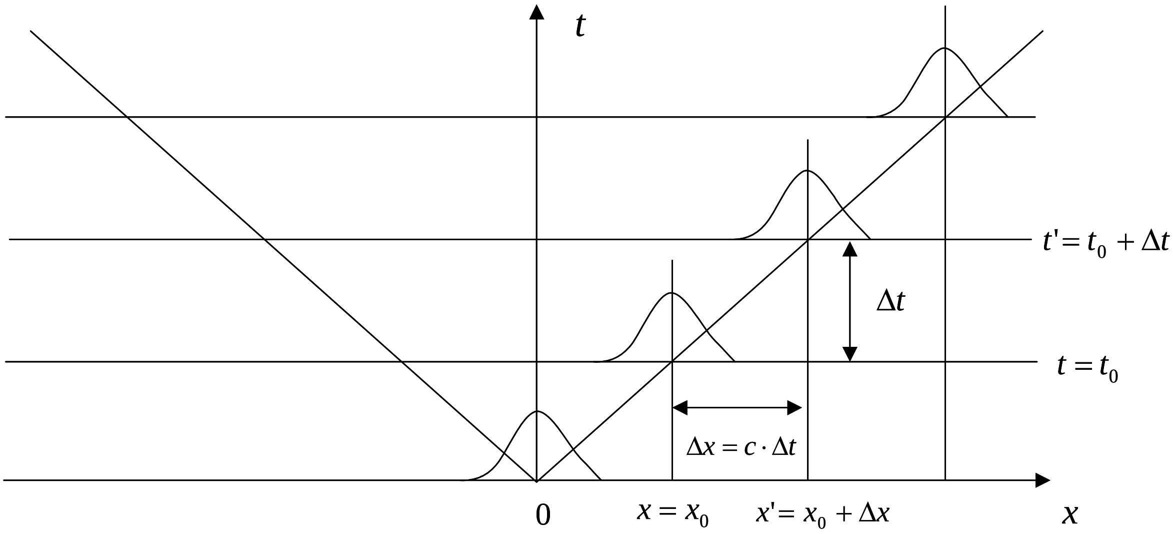

図 3　対流方程式の波の伝播

$$
\begin{aligned}
F(x - ct') &= F(x - c(t_0 + \Delta t)) \\
&= F(x - ct_0 - c\Delta t) \\
&= F(x_0 - ct_0) \qquad (\because x_0 = x' - \Delta x)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

すなわち、時刻$t = t_0$のときの波形と、時刻$t = t'$のときの波形とは同じであることを示している。対流方程式が記述する物理とは、変形しない波の速度cでの伝播である。

3.4　波動方程式との関係

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{：波動方程式}$$

波の伝播を記述する波動方程式は、

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad (4)$$

なる解（ダランベールの解）を有する。

上式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underline{\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u} = 0 \qquad (5)$$

とも書けるが、下線部を考えると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

となり、微分が可換であることを考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

となり、対流方程式が波動方程式と同値なものであることが分かる。

3.5　分散性

もし、波の移動速度cが波の変位uの関数である場合、特に$c=u$とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \text{――――――――――} \quad (8)$$

となるが、この式の意味するところは、変位uが大きいところでは、移動速度も大きくなることを示している。すなわち、

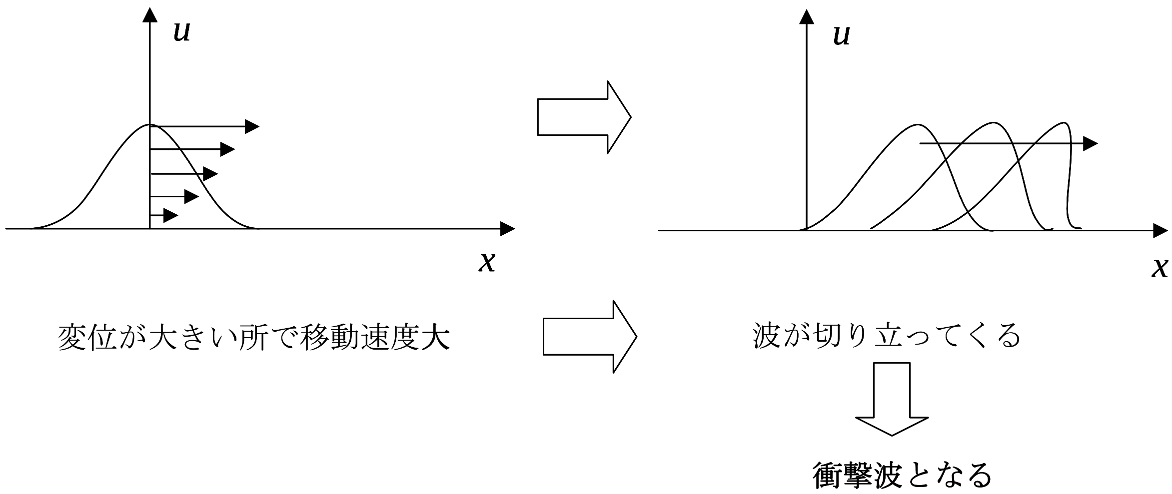

図 4　波の分散

3.6　対流拡散方程式

変位の大きい部分が小さい部分へ移動する性質“**拡散**”を考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\underbrace{\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{拡散項}} \qquad (\alpha\ ：拡散係数) \qquad \text{――――――――――} \quad (9)$$

となる。体系が２次元の場合、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \text{――――――――――} \quad (10)$$

“**変位の拡散**”を物理的な意味の応力テンソルとみなし、圧力による変位を考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{――――――――――} \quad (11)$$

となり、上式は流体の挙動を記述する Navier-Stokes 方程式に他ならない。
すなわち、対流方程式は流体挙動を記述する最も基本となる関係式である。

§4　有限差分法

4.1　有限差分法の意味とは？

（１）　微分方程式の計算機による計算のための離散化表現

（２）　微分方程式を導く際のモデル化において、物理を考えること。

の両方の意味をもつ。

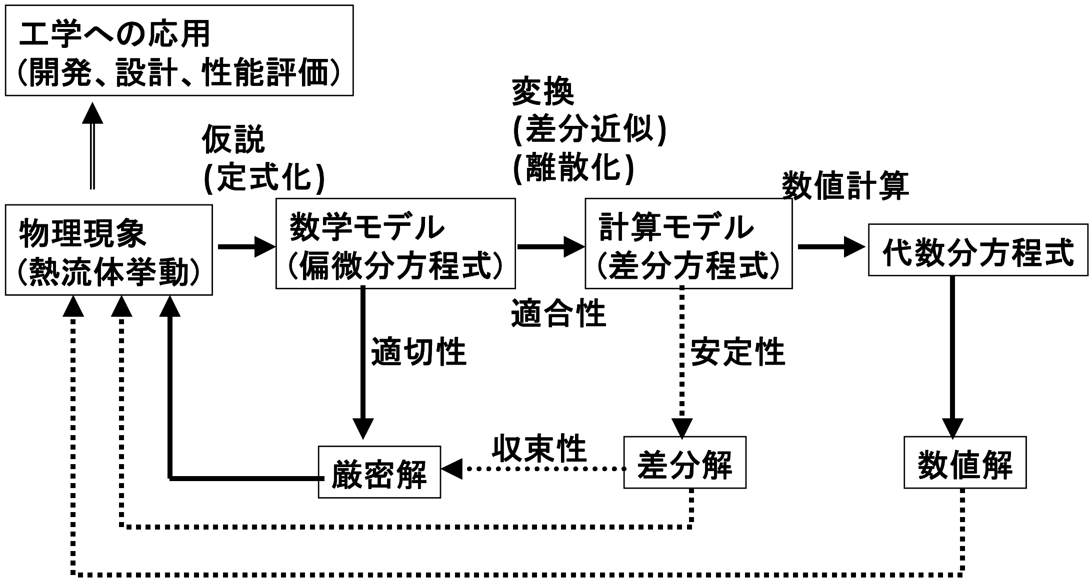

図５　変化する方程式の定性的性質

4.2　空間と時･空間の離散化

連続的な空間(x, y)を、図のように等間隔にx方向にΔx、y方向にΔyで分割する。
x方向にi番目、y方向にj番目における変数を$u_{i,j}$と記述する。
連続的な時･空間(x,t)を等間隔に空間をΔx、時間をΔtで分割する。
x方向にi番目、n番目の時間における変数をu_i^nと記述する。

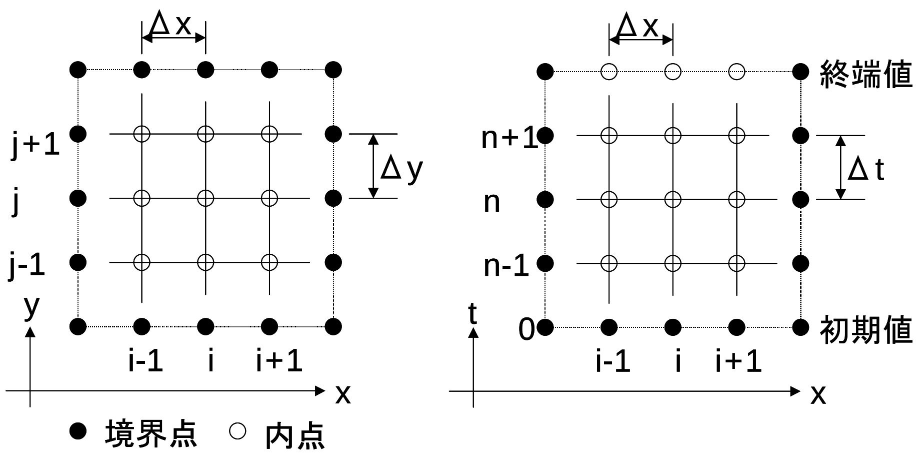

図６　空間と時･空間の離散化

4.2.1　空間の前進差分近似

$u_{i+1,j}$ を点 (i, j) において x について Taylor 展開すると、

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots \qquad (12)$$

となり、$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j}$ について解くと、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (13)$$

となる。これは、導関数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ を表現する差分商 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ のひとつが、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (14)$$

であることを示している。これを空間の**前進差分近似**（forward space difference）という。

4.2.2　空間の後退差分近似

$u_{i-1,j}$ を点（i, j）において x について Taylor 展開すると、

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots \qquad (15)$$

となり、$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j}$ について解くと、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (16)$$

となる。これは、導関数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ を表現する差分商 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ のひとつが、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (17)$$

であることを示している。これを空間の**後退差分近似**（backward space difference）という。

4.2.3　空間の中心差分近似

$u_{i+1,j}$，$u_{i-1,j}$ を点（i, j）において x について Taylor 展開すると、

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots \quad \text{———} \quad (18)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots \quad \text{———} \quad (19)$$

となり、上式から下式を差し引くと、

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + 2\cdot\frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{i,j} \Delta x^3 + \cdots \quad \text{———} \quad (20)$$

となり、$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j}$ について解くと、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right) \quad \text{———} \quad (21)$$

となる。これは、これは、導関数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ を表現する差分商 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ のひとつが、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right) \quad \text{———} \quad (22)$$

であることを示している。これを空間の**中心差分近似**（centered space difference）という。

4.2.4　空間と時間の差分商

以上より、u_i^n の時空間の点（i, n）における、**空間**についての差分商は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{（前進差分近似）} \quad \text{———} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{（後退差分近似）} \quad \text{———} \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right) \quad \text{（中心差分近似）} \quad \text{———} \quad (25)$$

同様に、u_i^n の時空間の点（i, n）における、**時間**についての差分商は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad \text{（前進差分近似）} \quad \text{———} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad \text{（後退差分近似）} \quad \text{———} \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}+O\left(\Delta t^2\right)$$ （中心差分近似） ――― (28)

4.3　対流方程式の差分（陽）スキーム

対流方程式：$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$

を時間：前進差分、空間：中心差分で差分化すると、

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+O(\Delta t)+O\left(\Delta x^2\right)=0$$ ――― (29)

となる。これをu_i^{n+1}について解くと、

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{C}{2}\left(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n\right)$$ ――― (30)

$$C=c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$ C ：Courant 数

となり、これを **FTCS（Forward-Time Centered Space）** スキームという。

4.4　対流方程式の陰スキーム

対流方程式：$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$

対流方程式を、完全陰解法で空間：中心差分近似すると、次のような差分方程式が得られる。

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=-c\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$ ――― (31)

u_{i-1}^{n+1}、u_i^{n+1}、u_{i+1}^{n+1}を変数値として差分スキームを求めると、

$$\frac{1}{2}\alpha u_{i+1}^{n+1}+u_i^{n+1}-\frac{1}{2}\alpha u_{i-1}^{n+1}=u_i^n$$ ――― (32)

$$\alpha=c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

図 6 のように、$i=1\sim5$つまり$0\leq x\leq1$の区間を 4 分割した場合を考える。

式(32)より、

$i=2$ の と き 、 $-\frac{\alpha}{2}u_1^{n+1}+u_2^{n+1}+\frac{\alpha}{2}u_3^{n+1}=u_2^n$

――― (33)

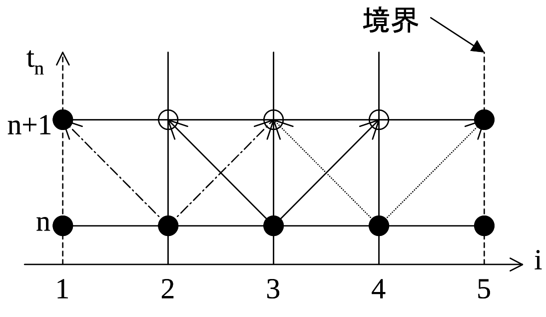

図 6　陰解法の概念図

$i=3$ のとき、$-\dfrac{\alpha}{2}u_2^{n+1}+u_3^{n+1}+\dfrac{\alpha}{2}u_4^{n+1}=u_3^n$ ―――――――――――― (34)

$i=4$ のとき、$-\dfrac{\alpha}{2}u_3^{n+1}+u_4^{n+1}+\dfrac{\alpha}{2}u_5^{n+1}=u_4^n$ ―――――――――――― (35)

上の連立方程式(33)~(35)を行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{2} & 0 \\ -\dfrac{\alpha}{2} & 1 & \dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & -\dfrac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_2^n+\dfrac{\alpha}{2}u_1^{n+1} \\ u_3^n \\ u_4^n-\dfrac{\alpha}{2}u_5^{n+1} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

となる。

以上の行列の式を Gauss-Jordan 消去法で逐次に解いていくと、$[u_i^n]$ が求まる。

4.5　Courant 条件

速度を c とすると、微小時間 Δt に進む距離は $c\Delta t$ 、これが差分した微小区間 Δx を超えると計算が発散してしまう。そのため $c\Delta t<\Delta x$ でなければばならない。

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x}<1$$

これを、**Courant 条件**といい、この値によって計算結果に大きな影響を与える。

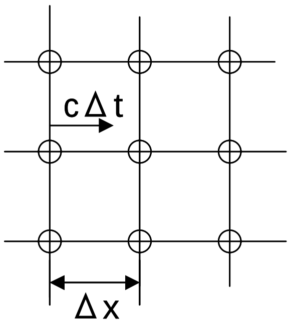

図 7　Courant 条件

4.6　例題（対流方程式の厳密解の挙動）

対流方程式：$\dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

を以下の条件下で、FTCS スキームを用いて数値的に解析しなさい。

初期条件と境界条件：

$$u(x,0)=F(x)=\begin{cases} 0 & (0\le x\le 1/5) \\ 1 & (1/5\le x\le 2/5) \\ 0 & (2/5\le x\le 1) \end{cases}$$

$$u(0,t)=g_0 \qquad g_0=0 \qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=0$$

（解）$u(x,t)=F(x-ct)$

差分式　$\dfrac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\delta t}=-c\dfrac{\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n}{2\delta x_i}$

差分解　$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{1}{2}C(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)$　$C = c\frac{\delta t}{\delta x}$　（Courant 数）

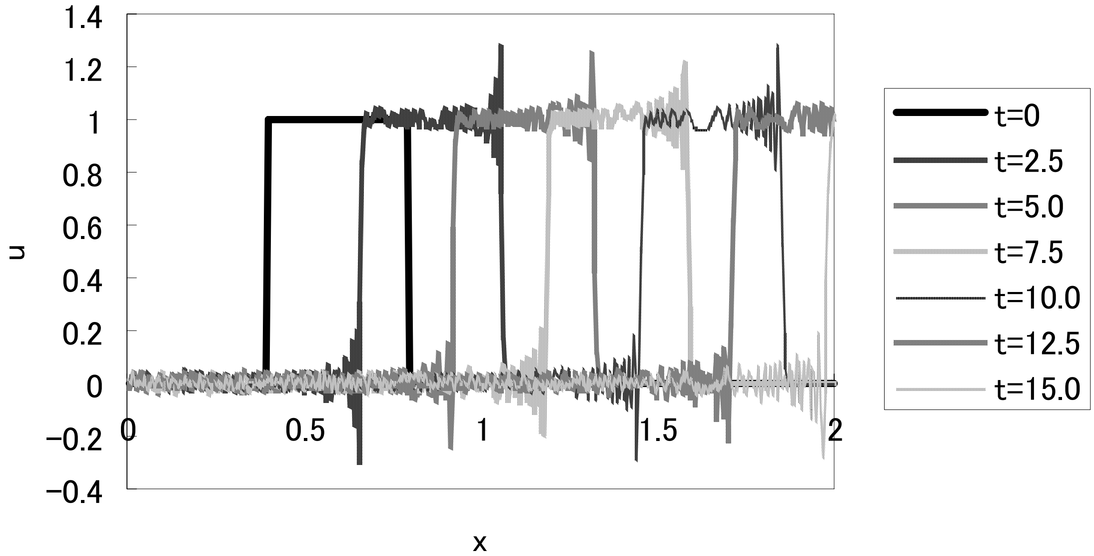

図８　計算結果例

§5　課題スキーム

例題と同じ条件で、以下の３つの課題スキームを、3 グループに分かれて数値的に解析しなさい。

A グループ　　1.時間：前進差分、空間：風上差分

差分式　$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\delta t} = -c\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\delta x_{i-1/2}}$$

差分解　$\phi_i^{n+1} = (1-C)\phi_i^n - C\phi_{i-1}^n$

2.　蛙とびスキーム

差分式　$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\delta t} = -c\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\delta x_i}$$

差分解　$\phi_i^{n+1} = \phi_i^{n-1} - C(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)$

3.　ひし形スキーム

差分式　$$\frac{\frac{1}{2}(\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^n) - \frac{1}{2}(\phi_i^n - \phi_{i-1}^{n-1})}{\delta t} = -c\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{2\delta x_{i-1/2}}$$

差分解　$\phi_i^{n+1} = \phi_{i-1}^{n-1} + (1-2C)(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n)$

B グループ　　時間平均、空間：中心差分

差分式 $\dfrac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n}}{\delta t}=-\dfrac{U}{2}\left[\dfrac{\phi_{i+1}^{n}-\phi_{i-1}^{n}}{2\delta x_i}+\dfrac{\phi_{i+1}^{n+1}-\phi_{i-1}^{n+1}}{2\delta x_i}\right]+S$

差分解 $\dfrac{1}{4}\alpha\phi_{i+1}^{n+1}+\phi_i^{n+1}-\dfrac{1}{4}\alpha\phi_{i-1}^{n+1}=\phi_i^{n}-\dfrac{1}{4}\alpha\left(\phi_{i+1}^{n}-\phi_{i-1}^{n}\right)+\delta t\cdot S$

C グループ　　B.E.T.、時間平均

差分式

$$c\left(\frac{\phi_{i+1}^{n+1}-\phi_{i+1}^{n}}{\delta t}\right)+(1-2c)\left(\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n}}{\delta t}\right)+c\left(\frac{\phi_{i-1}^{n+1}-\phi_{i-1}^{n}}{\delta t}\right)=-\frac{U}{2}\left[\frac{\phi_{i+1}^{n+1}-\phi_{i-1}^{n+1}}{2\delta x_i}+\frac{\phi_{i+1}^{n}-\phi_{i-1}^{n}}{2\delta x_i}\right]+S$$

$$c=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^{2}\right)$$

差分解

$$\left(c+\frac{\alpha}{4}\right)\phi_{i+1}^{n+1}+(1-2c)\phi_i^{n+1}+\left(c-\frac{\alpha}{4}\right)\alpha\phi_{i-1}^{n+1}=(1-2c)\phi_i^{n}+\left(c-\frac{\alpha}{4}\right)\phi_{i+1}^{n}+\left(c+\frac{\alpha}{4}\right)\phi_{i-1}^{n}+\delta t\cdot S$$

§6　レポートの作成方法

文章による説明（課題スキーム、Courant 数による計算結果の変化)、プログラムリスト、解析結果（作図結果）をレポートにまとめること。

参考文献

[1]応用数値解析,高橋亮一著,朝倉書店.