

流体の第二粘性が密度ベース 圧縮性流れ数値計算の解に及ぼす影響

THE EFFECT OF SECOND VISCOSITY ON CALCULATION OF COMPRESSIBLE FLOW BY DENSITY BASED METHOD

松浦 大志

Taishi MATSURA

(指導教員 山本 亨輔)

Abstract – Numerical method for compressible fluid is classified into density-based method and pressure-based one depending on calculation order of density and pressure. Density-based method calculates density at first. The density error causes the solution divergence, especially for models of low Mach number flow. This research evaluates the effect of the second viscosity on numerical solution by calculating several models of fluid. The models are Couette flow and natural convection in a cavity, and their result are compared with previous studies. The comparison suggests that the second viscosity affects the stability of calculation.

1 はじめに

数値流体力学において、遅い流れ、一般的にはマッハ数が 0.3 以下の流れでは、圧力による流体の密度変化を無視して非圧縮性流体として計算される^[1]。また、熱流体として解く場合、温度による流体の密度変化に対しては、しばしばブシネスク近似^[2]が適用される。これは密度変化が流体の運動に及ぼす影響を、温度差に比例した浮力としてのみ考慮するという近似である。しかし、温度差が大きい流れに対しては適用が難しく^[3]、このような流れは低マッハ数流れでも流体の密度変化を無視できない。そのため、高低マッハ数どちらの流れに対しても適用可能な数値計算アルゴリズムが求められている。

圧縮性流体の数値計算方法は圧力と密度の計算順序の違いによって密度ベースの解法と圧力ベースの解法に分けられる。圧力を先に求める圧力ベースの解法は非圧縮性流体の解法から研究がすすめられ、MAC (Marker And Cell) 法^[4]や SMAC 法^{[5][6]}などがこれに当てはまる。一方、密度ベースの解法では、まず密度と内部エネルギーを支配方程式から計算し、それから圧力を密度と内部エネルギーから求める。しかし、マッハ数が小さい時、微小な密度の変化は非常に大きな圧力の変化を引き起こすため、密度ベースの解法は密度の誤差に対して非常に敏感になり、正しい解が得られないことがある^[7]。

そのため、密度ベースの解法を低マッハ数の流れに対しても適用できるようにするため、様々な研究がなされてきた。Weiss ら^[8]は基礎方程式に前処理を施すことで、密度ベースの解法を低マッハ数流れに対しても適用可能にした。しかし、この方法では、基礎方程式の特性を変えてしまうため、非定常問題を解くときは二重時間ステップを用いる必要がある。また、青木ら^[9]は保存形で表された基礎方程式系をコロケート格子上で、有限体積法を用いて離散化することにより、質量保存則を高い精度で満足する計算アルゴリズムを提案した。

上に述べたような既往の研究では、流体の体積粘性をゼロとし、第二粘性係数を消去するストークスの仮説^[10]に基づいた基礎方程式を用いている。第二粘性係数は流体の膨張圧縮に対する抵抗性を表すパラメータである。通常、ストークスの仮説に基づく流体の数値計算では、計算の安定性はレイノルズ数をはじめとする様々な無次元数に支配される。しかし、これらの無次元数では第二粘性係数を評価対象としない。したがって、この係数が密度ベースの解法において、計算の安定性を支配するパラメータの一つである場合、その安定条件を満たすような要素や離散化法を用いる必要がある。

そこで本研究では、低マッハ数の圧縮性流れを密度ベースで数値的に解くとき、その数値安定性に対して、流体の第二粘性係数が及ぼす影響を明らかにする。基

礎方程式には連続の式、ナビエ・ストークス方程式、内部エネルギー方程式、理想気体の状態方程式を用いる。形状の自由度や高次精度化を考慮して、空間の離散化には有限要素法を用いる。例題として、定常クエット流およびキャビティ内自然対流を取り上げた。それらの理論解や既往の研究結果と比較を行い、第二粘性係数が流れの数値解に及ぼす影響を検討する。

2 数値解法の概要

2.1 流体の支配方程式

流体の支配方程式は質量、運動量、エネルギーの3つの保存則と、理想気体の状態方程式を用いる。いま、空間中に固定された閉曲面 Γ によって囲まれた領域 Ω を考える。 Ω 内で質量の発生がないとき、質量保存則は以下のように表される。

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho u_j n_j d\Gamma = 0 \quad (1)$$

ここで、 t は時間、 x_j ($j = 1, 2, 3$) は直交座標系、 ρ は流体の密度、 u_j は速度、 n_j は Γ の外向き法線方向単位ベクトルの x_j 成分である。(1)式は Ω 内の質量の増減が単位時間あたりに境界面を通して流入、流出する質量と等しいことを表す。(1)式の左辺第二項に発散定理を適用し、質量保存則が任意の Ω で成り立つとすると、以下のような連続の式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

式(2)は、次のように書くこともできる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

つぎに、 Ω 内の流体に作用する単位質量あたりの体積力を b_i ($i = 1, 2, 3$)、応力テンソルを σ_{ij} とすると、流体に働く力 F_i は

$$F_i = \int_{\Omega} \rho b_i dV + \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j dS \quad (4)$$

とかける。発散定理を適用すると、上式は

$$F_i = \int_{\Omega} \left(\rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (5)$$

とかける。このとき、 Ω 内の運動量保存則は以下のように表される。

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho u_i u_j n_j d\Gamma = F_i \quad (6)$$

上式の左辺第二項に発散定理を適用し、式(2)、式(5)

を代入すると、以下のように運動方程式を得る。

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (7)$$

上式の両辺と u_i の内積を求め、 $K = (1/2)\rho u_i^2$ と置いて、整理すると、単位体積当たりの力学的エネルギーの保存を表す次式を得る。ただし、整理においては連続の式を用いた。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K u_j}{\partial x_j} = \rho u_i b_i + \frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8)$$

つぎに、力学的エネルギーに熱力学的エネルギーを加えた単位体積当たりの全エネルギー $E (= K + \rho e)$ の保存則は以下のように表される。ここで e は単位質量あたりの内部エネルギーである。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial E}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} E u_j n_j d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \rho u_j b_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} q_j n_j d\Gamma + \int_{\Omega} J d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 q_j は x_j 方向の熱流束、 J は単位体積あたりの発熱量である。発散定理により面積積分を体積積分で表し、任意の Ω で保存則が成り立つとすると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E u_j}{\partial x_j} = \rho u_i b_i + \frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + J \quad (10)$$

式(10)に式(2)、式(8)を代入して整理することで以下の内部エネルギー方程式を得る。

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + J \quad (11)$$

次に、本研究で扱う流体はニュートン流体と仮定すると、応力の構成式は以下のように表される^[10]。

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (12)$$

ここで、 p は圧力、 μ は粘性係数、 λ は第二粘性係数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 ϵ_{ij} は次式で定義されるひずみ速度である。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

式(12)において主成分の平均値を求めると、

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \epsilon_{kk} \quad (14)$$

となり、このとき ϵ_{kk} の係数 $(\lambda + 2/3\mu)$ を体積粘性係数と呼ぶ。この体積粘性をゼロとして、平均主応力(応

力の主成分の平均値)が圧力に等しいとする仮定をストークスの仮説という。この仮定を導入すると、

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (15)$$

となって第二粘性係数は消去される。しかし、第二粘性係数は流体の膨張圧縮に対する抵抗性を表す係数である。密度の誤差が発散要因になりやすい密度ベースの解法においては、第二粘性係数が無視できない可能性がある。したがってその影響を評価することで数値計算の安定性向上が期待できる。そのため本研究では、第二粘性係数の影響を評価するため、ストークスの仮説は導入せず、 μ と λ は独立な定数として扱う。

また、熱流束 q_j がフーリエの法則^[11]に従うとすると、熱流束は以下のように表される。

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (16)$$

ここで、 T は絶対温度、 κ は熱伝導率である。

流体に理想気体を仮定すると、内部エネルギーと状態方程式はそれぞれ以下のように表される^[12]。

$$e = c_v T \quad (17)$$

$$p = \rho R T \quad (18)$$

ここで、 c_v は定積比熱、 R は気体定数である。

よって、式(3)、式(7)、式(11)、式(12)、式(13)、式(16)、式(17)より、以下のような式を得る。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ = \rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \dot{\epsilon}_{kk}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} - p \dot{\epsilon}_{kk} + J \\ + \Phi \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \quad (21)$$

である。

本研究では式(3)、式(18)、式(19)、式(20)を基礎方程式とし、未知量 u_i 、 p 、 ρ 、 T を求める。

2.2 方程式の離散化

いま、 n ステップ目の物理量 ρ^n 、 u_i^n 、 T^n 、 p^n が既知の時、式(19)において速度を陰的に扱い、時間方向に次のように離散化する。

$$\begin{aligned} \rho^n \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j} \right) \\ = \rho^n b_i - \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \dot{\epsilon}_{kk}^{n+1}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、左辺の移流速度は u_j^{n+1} が未知であるため、初期条件として2次精度のAdams-Bashforth法^[13]を用いて以下のように近似することにより線形化している。

$$\bar{u}_j = \frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1} \quad (23)$$

式(22)では、密度に n ステップ目の値を用いることで u^{n+1} を求めることができるようになっている。次に、式(22)で求めた u^{n+1} を用いて式(20)を時間方向に式(24)のように陰的に離散化し、 T^{n+1} を求める。

$$\begin{aligned} \rho^n c_v \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + u_j^{n+1} \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_j} \right) \\ = \kappa \frac{\partial^2 T^{n+1}}{\partial x_j^2} - p^n \dot{\epsilon}_{kk} + J + \Phi^{n+1} \end{aligned} \quad (24)$$

次に式(3)において密度を陰的に扱い、時間方向に式(25)のように離散化する。

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \rho^{n+1} \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_j} + u_j^{n+1} \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (25)$$

次に、重みつき残差法の考え方に基づき式(22)、式(24)、式(25)に重み関数をかけて Ω 内で積分する。運動方程式の圧力項と粘性項、内部エネルギー方程式の熱伝導項に部分積分を施すことで重みつき残差式を得る。得られた重みつき残差式を双一次要素を用いたGalarkin法に基づく有限要素法^[13]によって離散化する。状態方程式は圧力を求めるために用いる。以下では簡単のため、2次元問題について考え、 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ とする。 $\{N\}$ を形状関数。 $\{u\}$ 、 $\{v\}$ をそれぞれ x 方向、 y 方向の節点における速度を表すベクトルとし、各係数行列を定義すると、以下の離散化式を得る。Galarkin法に基づく有限要素法を用いたため、重み関数と未知変数の形状関数は同一のものとなっている。以上をまとめた式(26)、式(27)、式(28)の連立一次方程式を解くことで、 $n+1$ ステップにおける物理量を得ることができる。ただし、総和記号は要素係数行列の重ねあわせを表す。数値積分にはガウス-ルジャンドル法^[14]を用い、積分点は5とした。連立一次方程式の解法にはGMRES法^[15]を用いた。

$$[\mathbf{A}_{NS}] \{ \mathbf{u}^{n+1} \}_{ \mathbf{v}^{n+1} } = \{ \mathbf{b}_{NS} \} \quad (26)$$

$$[\mathbf{A}_{EN}] \{ \mathbf{T}^{n+1} \} = \{ \mathbf{b}_{EN} \} \quad (27)$$

$$[\mathbf{A}_C] \{ \boldsymbol{\rho}^{n+1} \} = \{ \mathbf{b}_C \} \quad (28)$$

$$\{ \mathbf{p}^{n+1} \} = R \{ \boldsymbol{\rho}^{n+1} \} \circ \{ \mathbf{T}^{n+1} \} \quad (29)$$

$$[\mathbf{A}_{NS}] = \sum_e \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}_U] + [\mathbf{C}_U] - [\mathbf{S}] \right) \quad (30)$$

$$\{ \mathbf{b}_{NS} \} = \sum_e \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}_U] - [\mathbf{G}] \{ \mathbf{p}^n \} + \{ \mathbf{f} \} \right) \quad (31)$$

$$[\mathbf{A}_{EN}] = \sum_e \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}_E] + [\mathbf{C}_E] - [\mathbf{H}_E] \right) \quad (32)$$

$$\{ \mathbf{b}_{EN} \} = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}_E] - [\mathbf{D}_E] \{ \mathbf{p}^n \} + \{ \mathbf{W} \} \quad (33)$$

$$[\mathbf{A}_C] = \sum_e \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}_C] + [\mathbf{D}_C] + [\mathbf{C}_C] \right) \quad (34)$$

$$\{ \mathbf{b}_C \} = \sum_e \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{M}_C] \{ \boldsymbol{\rho}^n \} \right) \quad (35)$$

$$[\mathbf{M}_U] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & \\ & [\mathbf{M}] \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[\mathbf{M}] = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{N} \}^T \{ \boldsymbol{\rho}^n \} \{ \mathbf{N} \}^T d\Omega \quad (37)$$

$$[\mathbf{C}_U] = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{C}}] & \\ & [\bar{\mathbf{C}}] \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[\bar{\mathbf{C}}] = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{N} \}^T \{ \boldsymbol{\rho}^n \} \{ \mathbf{N} \}^T [\mathbf{conv}] d\Omega \quad (39)$$

$$[\mathbf{S}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d\Omega \quad (40)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial x} & \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial y} & \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu & \\ 2\mu & \lambda + 2\mu & \\ & & 2\mu \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$[\mathbf{G}] = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}}{\partial x} \{ \mathbf{N} \}^T \\ \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}}{\partial y} \{ \mathbf{N} \}^T \end{bmatrix} d\Omega \quad (43)$$

$$[\mathbf{M}_E] = c_v \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{N} \}^T \{ \boldsymbol{\rho}^n \} \{ \mathbf{N} \}^T d\Omega \quad (44)$$

$$[\mathbf{C}_E] = c_v \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{N} \}^T \{ \boldsymbol{\rho}^n \} \{ \mathbf{N} \}^T [\mathbf{conv}^{n+1}] d\Omega \quad (45)$$

$$[\mathbf{H}_E] = \kappa \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \{ \mathbf{N} \}}{\partial x} \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}}{\partial y} \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial y} \right) d\Omega \quad (46)$$

$$[\mathbf{D}_E] = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \mathit{div}^{n+1} \{ \mathbf{N} \}^T d\Omega \quad (47)$$

$$\mathit{div}^n = \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial x} \{ \mathbf{u}^{n+1} \} + \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial y} \{ \mathbf{v}^{n+1} \} \quad (48)$$

$$[\mathbf{conv}^n] = \{ \mathbf{u}^n \} \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial x} + \{ \mathbf{v}^n \} \frac{\partial \{ \mathbf{N} \}^T}{\partial y} \quad (49)$$

$$\{ \mathbf{W} \} = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{u}^{n+1} \}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{ \mathbf{u}^{n+1} \} d\Omega \quad (50)$$

$$[\mathbf{M}_C] = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{N} \}^T d\Omega \quad (51)$$

$$[\mathbf{D}_C] = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \mathit{div}^n d\Omega \quad (52)$$

$$[\mathbf{C}_C] = \int_{\Omega_e} \{ \mathbf{N} \} \{ \mathbf{N} \}^T [\mathbf{conv}^{n+1}] d\Omega \quad (53)$$

本手法のフローチャートを図1に示す。

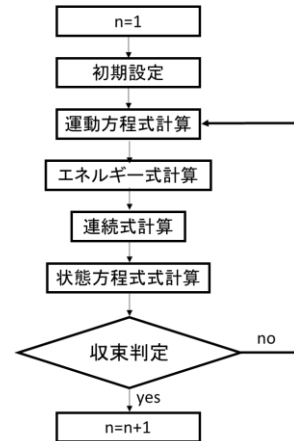


図1 計算のフローチャート

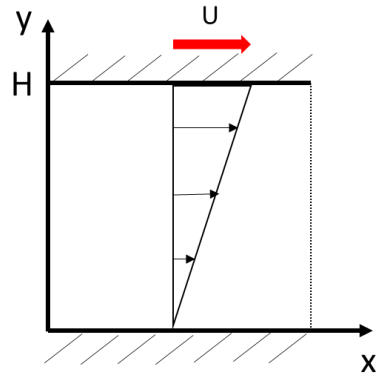


図2 モデル概要図

表1 モデルパラメータ

計算領域[m] × [m]	1 × 1
時間刻みΔt[s]	0.01
計算ステップ数	100
気体定数R[J/kg · K]	1000
定積比熱 c_v [J/kg · K]	1000
熱伝導率 κ [W/m]	0.1
初期温度 T_0 [K]	100
初期圧力 P_0 [Pa]	10^5
初期密度 ρ_0 [kg/m ³]	1

表2 各ケースのパラメータ

ケース	1	2	3	4
粘性係数 μ [Pa · s]	1	0.1	10	1
移動壁速度U[m/s]	0.1	1	1	10
レイノルズ数Re	0.1	10	0.1	10
マッハ数M	2.24×10^{-4}	2.24×10^{-3}	2.24×10^{-4}	2.24×10^{-3}

3 数値計算例

3.1 定常クエット流れ

3.1.1 モデル概要

クエット流れは、図2のように二枚の平板の間に流体が満たされているとき、一方の平板を固定し、他方の平板を水平方向に移動させると、流体の粘性によって速度分布が発生するという問題である。圧縮性が無視でき、水平方向に圧力勾配が無いとき、その速度分布は直線分布になることが知られている^[16]。非圧縮流体を仮定すると、式(2)において $\rho = \text{const.}$ となり、 $(\partial u_k) / (\partial x_k) = \dot{\epsilon}_{kk} = 0$ となる。このとき、式(12)の応力の構成式で、体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kk}$ がゼロであるとき、流体の運動は第二粘性係数とは無関係に定まる。よって、マッハ数が十分小さく、流れが非圧縮とみなせるとき、数値解は λ によらず、理論解に近づくと考えられる。

モデルのパラメータを表1に示す。粘性係数、移動壁速度を変えて表2に示す4ケースで計算を行った。これらのケースは、ケース1と3、ケース2と4は以下の式で定義されるレイノルズ数Reが一致しているため、定性的に同様の挙動を示すと考えられる。

$$Re = \frac{\rho U H}{\mu} \quad (54)$$

ここで、代表長さは平板間距離を、代表密度は初期条件における密度を用いた。

この問題は非圧縮流体の例題であるため、本研究ではマッハ数が十分小さいとみなせる範囲で計算を行った。マッハ数は音速を a として理想気体の場合、次式で定義される^[1]。

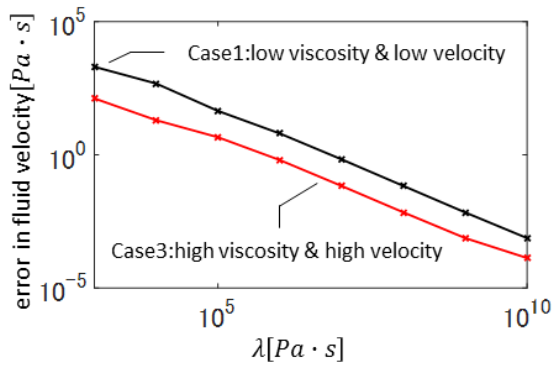
$$M = \frac{U}{a} = \frac{U}{\sqrt{\gamma R T}} \quad (55)$$

γ は比熱比であり、理想気体の場合 $\gamma = 1 + R/c_v$ で表される^[12]。

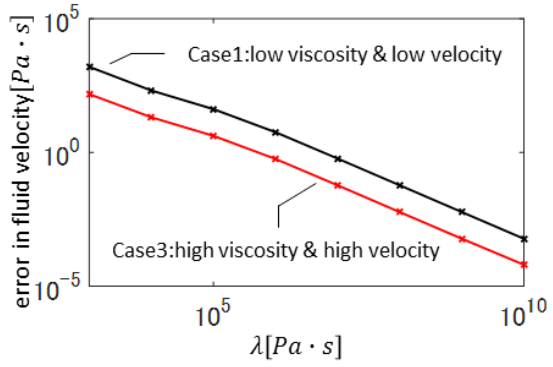
初期条件として理論解の流速を与え、20ステップ計算を行った。流速の初期値からの変化率を指標として第二粘性の影響を検討した。

3.1.2 結果と考察

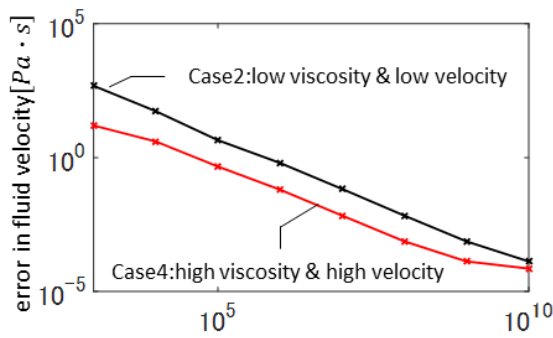
ケース1から4に対してそれぞれ要素数400と100の場合について計算を行った。それぞれの場合における20ステップ後の計算領域内における流速の変化率の絶対値の最大値を図3、図4に示す。初期値として理論解の速度分布を与えているため、計算を進める過程で速度が初期値から変化した場合、その変化分を誤差として評価した。計算したすべての場合において、第二粘性係数が大きいとき、流速の初期値からの変化率が小さくなる傾向が見られた。また、図3(a)と図3(b)、図4(a)と図4(b)を比較すると、レイノルズ数が異なる場合でも、第二粘性係数が大きい程誤差が小さいという傾向は共通して確認できた。一般に、レイノルズ数が2300より大きいとき、流れは乱流と



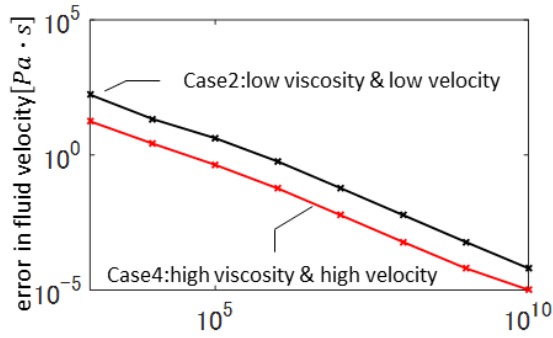
(a) $Re = 0.1$



(a) $Re = 0.1$



(b) $Re = 1$



(b) $Re = 1$

図3 流速の変化率 (400要素)

図4 流速の変化率 (100要素)

なり^[16]、計算の不安定化の原因となる。今回のモデルでは、乱流となるレイノルズ数に対して十分小さいレイノルズ数で計算を行った。このことから、十分に小さいレイノルズ数の流れに対しても、安定性評価の基準としての、第二粘性係数の有用性が示唆される。ケース1とケース3、ケース2とケース4はレイノルズ数が等しく、ともに第二粘性係数が大きくなる程誤差が小さくなった。このことから、数値計算の安定性は第二粘性係数の影響を受けると考えられる。また、今回用いたモデルでは、節点数の違いによる差は第二粘性係数による差に比べて小さく、クエット流れのような単純な流れのモデルに対しては、少ない節点数でも妥当な解を得られることがわかった。

3.2 キャビティ内自然対流

3.2.1 モデル概要

つぎに、二次元正方形容器内に発生する自然対流を数値的に再現し、既存の研究と比較する。図5に示すような、一辺が $L = 0.04[\text{m}]$ の正方形容器内に流体が満たされている。鉛直下向きに重力が作用しているとき、左右の壁面に温度差を与えると温度、密度、圧力が干

渉し合って渦が発生する。このモデルは熱対流現象の数値計算におけるベンチマーク問題として知られており、多くの計算例^{[17][18][19][20][21]}がある。

3.2.2 第二粘性係数の影響

第二粘性係数の影響を評価するために、次のような計算を行った。まず、図5と同じ計算領域において、左右の壁に温度差を与えず、 $y = L$ で基準圧力と等しくなる静圧分布となるように圧力と密度の初期値を与える。このとき、流体に働く力は領域内の任意の位置で釣り合っており、時刻を進めても流体は初期条件を保ったまま静止し続けるはずである。図6のように領域を分割し、同一時間ステップでの反復計算を行わずに100ステップ計算した。初期値からの変化率を指標として第二粘性係数の影響を考える。流体の物性値は空気の値を参照し、第二粘性係数は $\lambda = 10^k [\text{Pa} \cdot \text{s}]$ ($1 \leq k \leq 10$)として計算を行った。表2にモデルのパラメータを示す。図7、図8、図9、図10に計算領域中央における、圧力、温度、密度の初期値からの変化率の絶対値の推移と、100ステップ後における質量の初期値からの変化率を示す。図7から図9より、 $\lambda \leq 10^3$

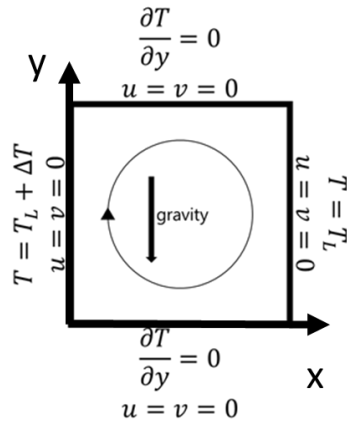


図5 モデル概要図

ではステップが進むと急激に変化率が大きくなり、解が発散していることがわかる。図7から図9より、 $\lambda \leq 10^3$ ではステップが進むと急激に変化率が大きくなり、解が発散していることがわかる。特に図7、図8と図9を比べると、密度の誤差に対して圧力、温度の誤差が大きい。この点は、密度ベースの解法が低マッハ数流れにおいて、密度の誤差に敏感であるという肖らによる文献と一致する。このとき、図10より、領域内の質量が減少し、質量保存則が満たされていないことがわかる。一方、第二粘性係数が大きいとき、計算結果はステップ数が増加しても、解は初期条件を高い精度で保っていることが確認できる。このことから、第二粘性係数が計算の安定性に影響を及ぼすことがわかる。次に、図11に、計算を始めた最初のステップにおける、領域内の体積ひずみ速度の最大値を示す。計算の安定性に対する考察として、式(22)の内部エネルギー方程式の右辺第二項 $p\dot{\epsilon}_{kk}$ について考える。圧力がおよそ大気圧に等しいとき、 $p \cong 10^5[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 $\rho \cong 10^0[\text{Pa}]$ であり、密度に対して圧力のオーダーが大きい。このとき、体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kk}$ にわずかな誤差が生じると、圧力との乗算によって誤差の影響が大きくなり、計算が発散すると考えられる。これに対して、式(12)の応力の構成式より、第二粘性係数が大きいとき、すなわち流体の膨張圧縮に対する抵抗が大きいとき、図11のように体積ひずみ速度は小さく、計算が発散しなかったと考えられる。

3.2.3 自然対流の再現

前節の結果より、第二粘性係数 $\lambda = 10^5[\text{pa} \cdot \text{s}]$ を用いて、自然対流によりキャビティ内に発生する渦を再現する。物性値は前節と同じ値を使用し、要素数を 32×32 要素とした。左右の壁面に温度差 $\Delta T =$

表3 モデルパラメータ

計算領域[m] × [m]	0.04×0.04
時間刻み Δt [s]	0.1
気体定数 R [J/kg · K]	286.8
定積比熱 c_v [J/kg · K]	717
熱伝導率 κ [W/m]	0.023
粘性係数 μ [Pa · s]	1.60×10^{-5}
第二粘性係数 λ [Pa · s]	10^k ($1 \leq k \leq 10$)
初期温度 T_0 [K]	283.15
基準圧力 P_0 [Pa]	1.01325×10^5
基準密度 ρ_0 [kg/m ³]	1.2477

1.465[K]の温度差を与えた。この値は、次式で定義されるレイリー数 Ra の値が既往の研究^[9]で用いられている 1.0×10^4 となるように設定した。

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha\nu} \quad (56)$$

ただし、 $\alpha(= \kappa/\rho c)$ は温度拡散係数、 β は体積膨張率、 $\nu(= \mu/\rho)$ は動粘性係数であり、初期条件での値を参照した。

3.2.4 結果と考察

図12に本手法による $t = 120$ [s]での水平方向速度、鉛直方向速度、温度の分布を示す。等高線の間隔はそれぞれ $3.190 \times 10^{-9}[\text{m}/\text{s}]$ 、 $3.028 \times 10^{-9}[\text{m}/\text{s}]$ 、 $0.1465[\text{K}]$ である。また、既往の研究として、青木らによる結果^[9]を示す。青木らの結果は流れが定常状態に至った後の分布を表し、等高線の間隔はそれぞれ $1.686 \times 10^{-3}[\text{m}/\text{s}]$ 、 $2.105 \times 10^{-3}[\text{m}/\text{s}]$ 、 $0.1465[\text{K}]$ である。容器内に渦が発生している点で定性的な一致は確認できる。しかし、速度の大きさや温度分布にはおおきな差がある。本研究の手法では、移流項に対する安定化処理を施していないため、速度分布に数値振動が見られる。また、初期状態を静止状態とし、非定常問題として解いているため、 $t = 120$ [s]では系が定常状態に至っていない可能性がある。また、渦が形成された後の流れの発達に第二粘性係数が影響していることがわかる。

最後に、図13に本手法による結果における質量の誤差を、図14に青木らによる結果を示す。計算を行った時間において誤差は十分小さく、質量保存則を高い精度で満足していると言える。ただし、本手法によって得られた数値解は速度の大きさが青木らの結果と異なるため、単純に比較することは困難であると考えられる。今後の課題としては長時間の計算と、発達

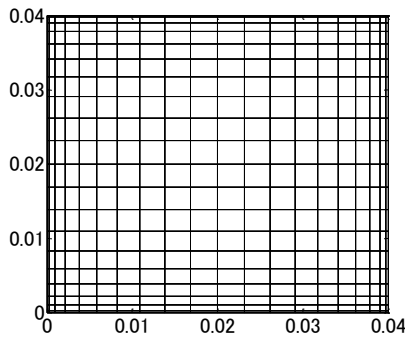


図6 メッシュ分割図 (20×20)

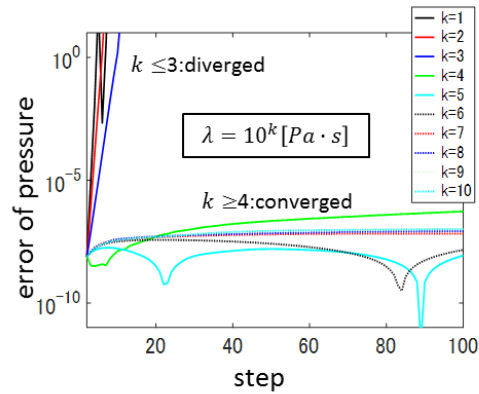


図7 圧力の初期値からの変化率

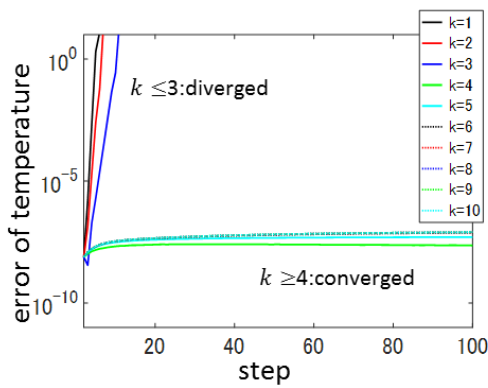


図8 温度の初期値からの変化率

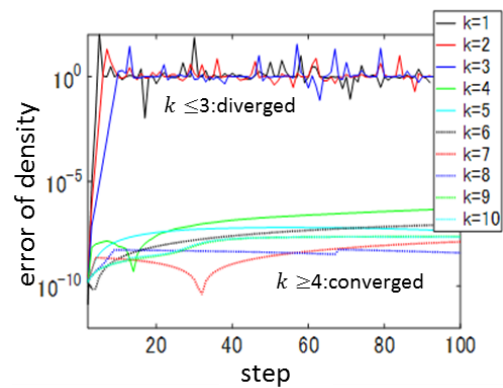


図9 密度の初期値からの変化率

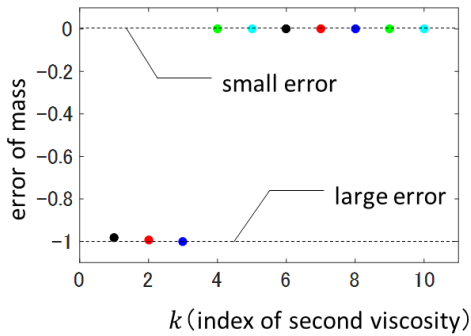


図10 質量の初期値からの変化率

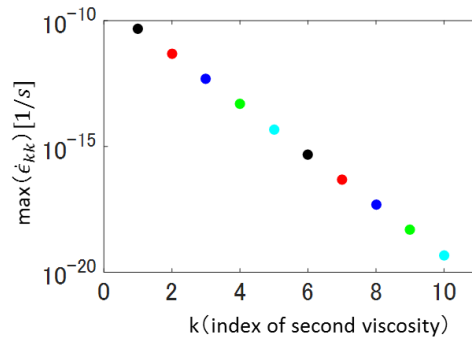


図11 体積ひずみ速度の最大値

した流れにおける第二粘性係数の影響の検討が挙げられる。

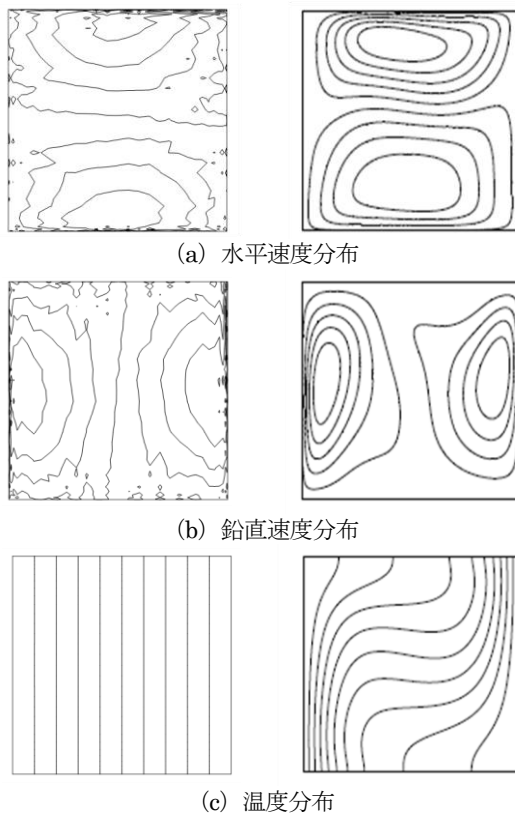
3.2.5 まとめ

クエット流れ、キャビティ内自然対流の計算結果から、第二粘性係数が密度ベースの圧縮性流体数値計算の安定性に影響を与えることがわかった。このことから、大規模化かつ高精度化が要求される数値計算を行

う際に、適切な解を得るためには、流体の第二粘性を考慮して安定性を評価し、適切な要素サイズや時間増分などを設定する必要がある可能性が示唆される。

4 結論

本研究では、密度ベースの圧縮性流れ数値計算の解に対して流体の第二粘性係数が及ぼす影響を調べるため、有限要素法による数値計算コードを作成し、定



本手法 ($t = 120[s]$) 青木ら (定常状態)
 図 12 本手法と青木らによる結果の比較

常クエット流れとキャビティ内自然対流を例題として数値計算を行った。計算結果から、第二粘性係数は計算の安定性に影響を及ぼし、十分に遅い流れでは、第二粘性係数がある値よりも小さい時、計算が不安定になった。今後の課題として、第二粘性係数が流れの時間発展に及ぼす影響の評価と、第二粘性係数に関する安定条件の解明が挙げられる。

参考文献

- [1] 松尾 一泰, 圧縮性流体力学, オーム社, 1994
- [2] J. S. Turner: Buoyancy Effects in Fluids, (Cambridge University Press, 1973) 9-11
- [3] Helmi M LAOUAH, 辻 俊博, 長野 靖尚, 温度差の大きい閉空間における熱対流, 日本機械学会論文集 (B編), vol.62 (1996)
- [4] F. Harlow and E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface, Physics of Fluids, 8, 2182 (1965)

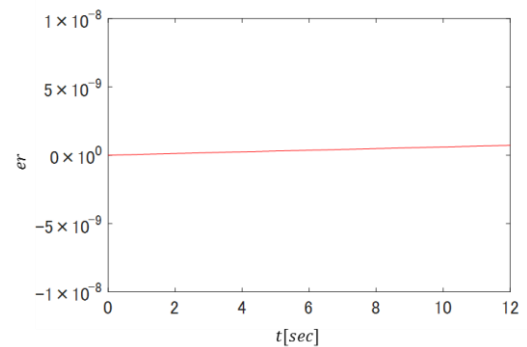


図 13 質量誤差 (本手法)

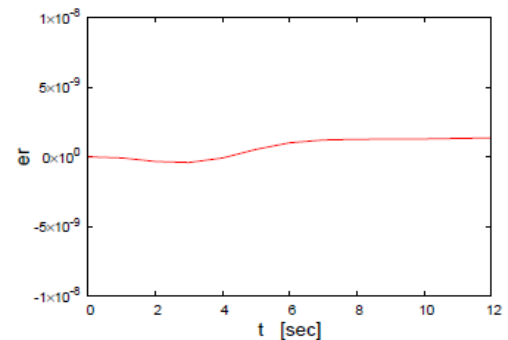


図 14 質量誤差 (青木ら)

- [5] F. Harlow and A. Amsden, Numerical calculation of almost incompressible flows, J. Comput. Phys., 3, 80 (1968)
- [6] F. Harlow and A. Amsden, A Numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds, J. Comput. Phys., 8, 197
- [7] 肖 鋒, 伊井 仁志, 小野寺 直幸, 計算流体力学-CIP マルチモーメント法による手法-, コロナ社, 2009
- [8] Jonathan M. Weiss and Wayne A. Smith, Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows, AIAA J., 22, 745 (1995)
- [9] 青木 一真, 牛島 省, 鳥生 大祐, 圧縮性流体に関する保存形陰的計算アルゴリズムの提案, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 69, No. 2, I_51-I_58, 2013
- [10] 清水 昭比古, 連続体力学の話法-流体力学材料力学の前に-, 森北出版, 2012
- [11] 中山 司, 流れ解析のための有限要素法入門, 東京大学出版会, 2008
- [12] 山下 博史, 熱力学, 培風館, 2014

- [13] 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会, 続・有限要素法による流れのシミュレーション, 丸善出版, 2012
- [14] 日本機械学会, 計算力学ハンドブック I, 丸善出版, 1998
- [15] 藤野 清次, 張 紹良, 反復法の数理, 麻倉書店, 1996
- [16] 日本機械学会, 流体力学, 丸善出版, 2005
- [17] Davis, G., Int. J. Numer. Methods Fluids, vol.3 (1983), pp.249-264
- [18] 柴田 悦太郎, 楨原 孝文, 棚橋 孝彦, CIP 有限要素法を用いた正方形キャビティ内自然対流, 日本機械学会論文集(B編), vol.66(2000), pp.1045-1052
- [19] 角田 和彦, 川原 祐子, 登坂 宣好, 正方形キャビティ内自然対流の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素解析, 日本機械学会論文集(B編), vol.59 (1993), pp.2463-2468
- [20] 姫野 武洋, 渡辺 紀徳, 低重力環境における熱流体管理に関する研究, 日本機械学会論文集(B編), vol.69 (2003), pp.266-273
- [21] 白石 靖幸, 加藤 信介, 石田 義洋, 村上 周三, 大岡 龍三, サーマルキャビティ内における圧縮性自然対流解析, 空気調和・衛生工学会学術講演会講演論文集 (1998), pp.1417-1420

謝辞

本研究を進めるに当たり、日ごろの研究から論文の執筆にわたり、非常に丁寧にご指導いただきました山本亨輔先生に深謝いたします。また、ゼミのたびに貴重なご指摘、アドバイスをいただきました松島亘志先生、高橋悠太先輩をはじめとする研究室の先輩同期の皆さん、そして大学での研究生活を支えてくれた家族のおかげでこのような形で論文を執筆できたことに対して、心から感謝いたします。