車両ー橋梁相互作用システム問題

Vehicle-Bridge Interaction System

筑波大学 システム情報系
University of Tsukuba

山本亨輔
Kyosuke Yamamoto

助教, 博士（工学）
Asst. Prof., Ph.D. (Eng.)

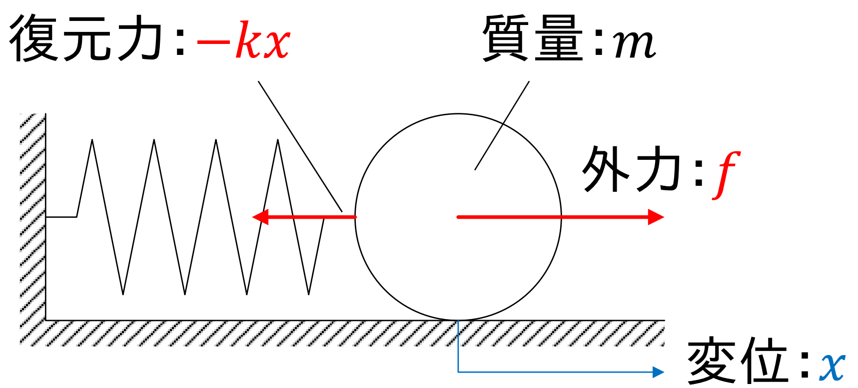
今回の講義で理解してほしいこと

1. 車両や橋梁は**線形システム**としてモデル化できる.

2. 車両と橋梁の相互作用システムは**非線形**である.

力学的システムを，数学的に記述すると，だいたい**微分方程式**になる

解が関数になる（例：$x(t)$ 等）



運動方程式（$ma = F$）

$$m\ddot{x} = f - kx$$

線形微分方程式

$$m\ddot{x} + kx = f$$

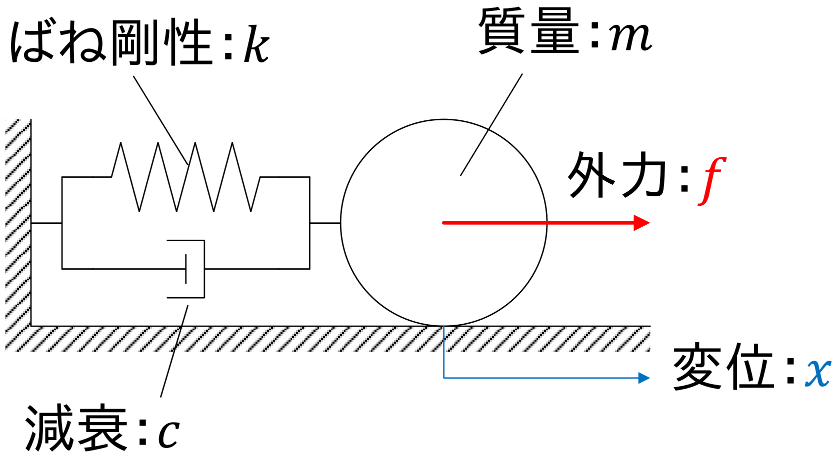
順問題（よくある問題）

f が既知のとき，x を求めよ

逆問題（難しい，研究テーマにしやすい）

$\ddot{x}$ を計測した．f を推定せよ

一般的に, 力学系は質量・バネ・減衰で構成される



運動方程式 ($ma = F$)

$$m\ddot{x} = f - kx - c\dot{x}$$

線形微分方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

線形微分方程式は,
周波数領域で「関数の掛け算」になる

フーリエ変換

$$\boxed{x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)}$$ とする. このとき,

数学的には
厳密じゃないけれど

$$\dot{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega)$$

$$\ddot{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 X(\omega)$$ なので

解が得られた!!
あとは, 逆フーリエ変換
するだけ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$ は,

$$\boxed{X(\omega) = \frac{F(\omega)}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)}}$$

$$= H(\omega)F(\omega)$$

周波数応答関数という
分母側の次数が大きい複素関数(周波数領域ではこういう関数が普通)
分子側の次数が大きいと「適切でない」システムになる➡カオス系

フーリエ変換は, 元の時間関数に含まれる周波数成分を表すのに便利!

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$cos(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)}{2}$$

$$sin(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\sqrt{2\pi} \cdot \frac{\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)}{2}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

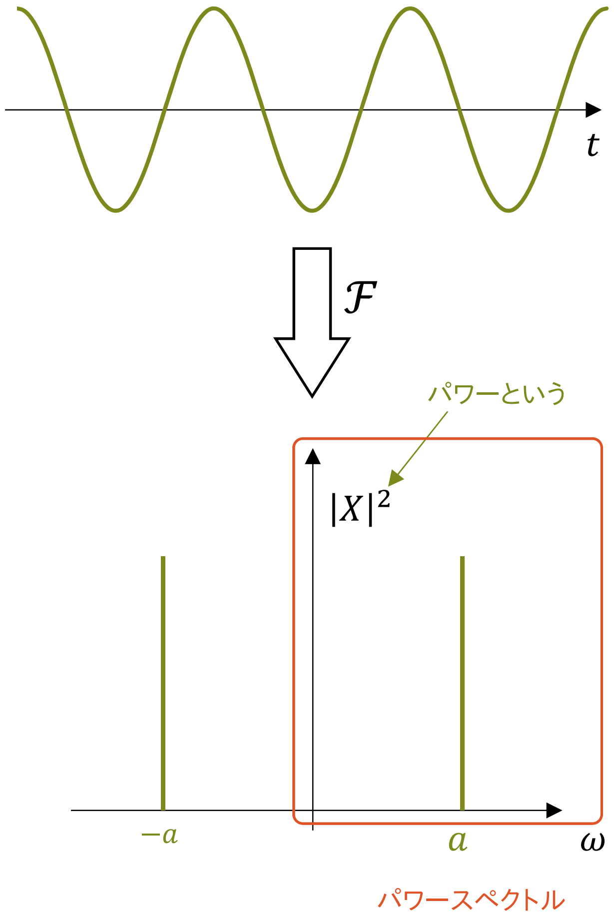
$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n X$$

$$x_1 \cdot x_2 \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1 \otimes X_2$$

畳み込み積分

$$\delta \otimes f = f(0)$$



$f(t)$がパルス入力：$\delta(t)$と仮定する（**自由減衰振動**）

ここで$t > 0$で，$\delta(t) = 0$なので
$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ を解けばよい

解を$x(t) = A\exp(\lambda t)$と仮定すると

$A\,(m\lambda^2 + c\lambda + k)\exp(\lambda t) = 0$

となる．

$\Rightarrow\ m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$

$\Rightarrow\ \lambda = \dfrac{-c}{2m} \pm j\sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{c}{2m}\right)^2}$

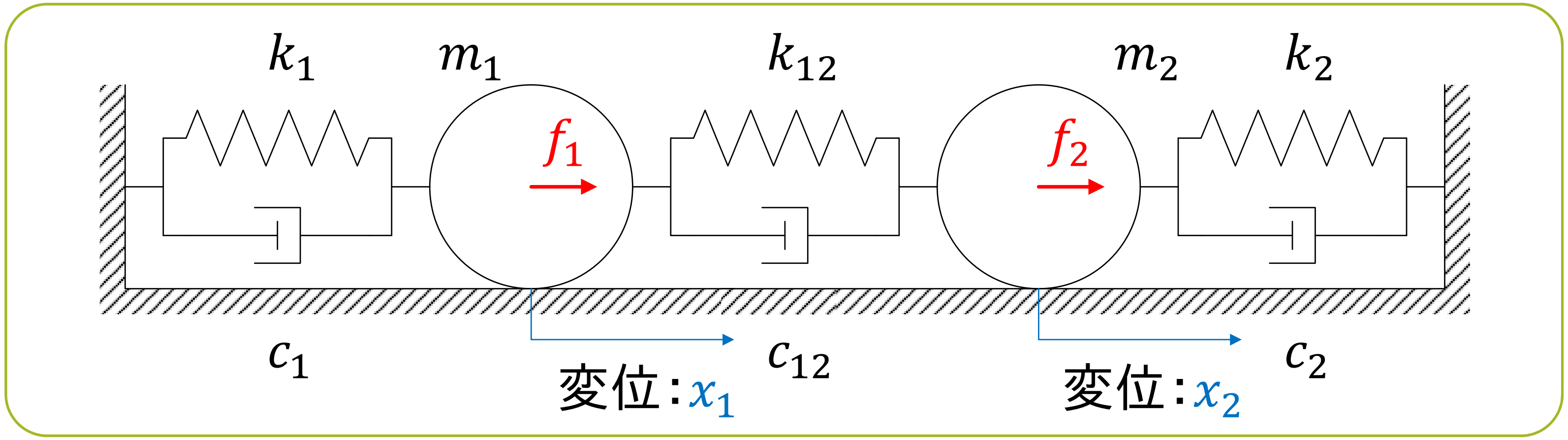
$\Rightarrow\ \boxed{x(t) = \underbrace{A\cdot\exp\left(\dfrac{-c}{2m}t\right)}_{減衰項}\cdot\cos(\omega_1 t)}$

固有角振動数 $\omega_1 = \sqrt{\boxed{\dfrac{k}{m}} - \left(\dfrac{c}{2m}\right)^2}$
という

非減衰固有角振動数

一方，フーリエ変換の結果から　$X(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)}$

多自由度系の運動方程式も単自由度系と形は同じ!



$$m_1\ddot{x}_1 = f_1 - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_{12}(x_1 - x_2) - c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = f_2 - k_1x_2 - c_1\dot{x}_2 - k_{12}(x_2 - x_1) - c_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

システム
パラメータ

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

システム入力

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}$$

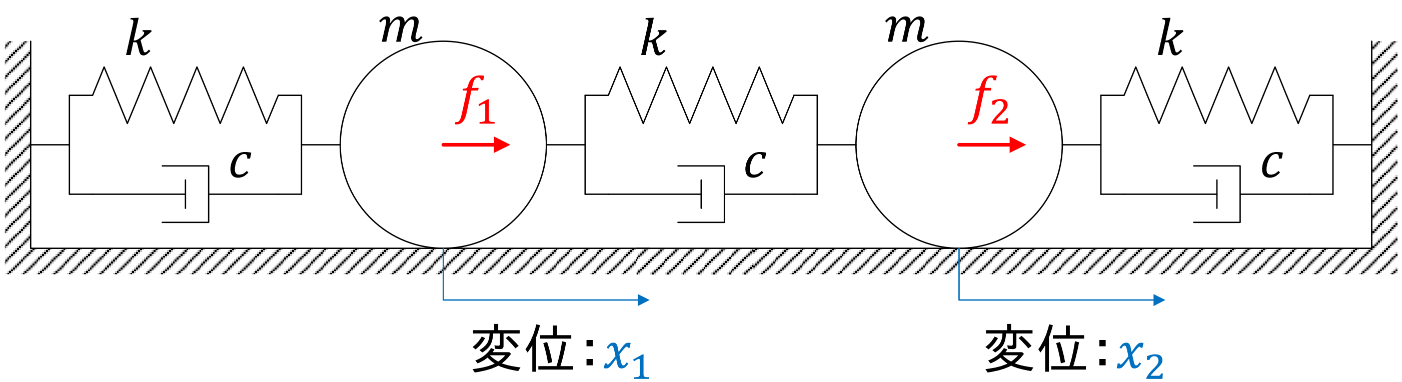
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

システム出力

多自由度系の**固有振動数**を求めよ



$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$　自由減衰振動は，周波数応答関数の逆フーリエ変換！

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

⇨

モード形状

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a} \exp \lambda t$$

を仮定する

解　　基準座標

⇨

非減衰振動のみ考える

$\mathbf{C} = \mathbf{O}$

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\boldsymbol{a} \exp \lambda t = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{a} = -\mathbf{M}\lambda^2\boldsymbol{a}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{a} = -\lambda^2\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}$は$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$の固有ベクトル，$\lambda^2$は固有値 ➡ 解は2つあるので$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$とλ_1^2, λ_2^2が対応

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2] \begin{bmatrix} -\lambda_1^2 & \\ & -\lambda_2^2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]^{-1}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]\begin{bmatrix} -\lambda_1^2 & \\ & -\lambda_2^2 \end{bmatrix}[\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]^{-1}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{a} = -\lambda^2\boldsymbol{a}$$

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E})\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

もし, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}$が逆行列を持つなら, $\boldsymbol{a} = \left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}\right)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

となって不適!($\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$は求めたい解ではない)　よって,

$$|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}| = 0 \qquad -\lambda^2 = \frac{k}{m}\alpha$$

$$|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - (-\lambda^2)\mathbf{E}| = \left|\frac{k}{m}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-\lambda^2) & \\ & (-\lambda^2) \end{bmatrix}\right| = \frac{k}{m}\begin{vmatrix} 2-\alpha & -1 \\ -1 & 2-\alpha \end{vmatrix} = \frac{k}{m}\left((2-\alpha)^2 - 1\right)$$

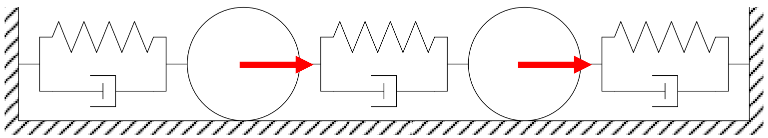
$$= \frac{k}{m}(\alpha^2 - 4\alpha + 3) = \frac{k}{m}(\alpha - 3)(\alpha - 1) = 0$$

$$-\lambda^2 = \frac{k}{m}, \frac{3k}{m} \qquad \boxed{\lambda = j\sqrt{\frac{k}{m}}, j\sqrt{\frac{3k}{m}}} \qquad (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda^2\mathbf{E})\boldsymbol{a} = \begin{cases} \dfrac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \dfrac{k}{m}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

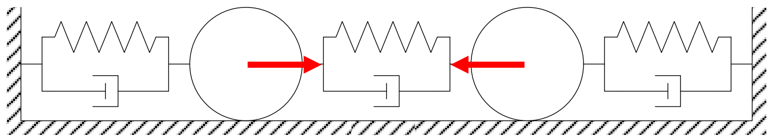
$$\boldsymbol{x}(t) = A\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\exp\left(j\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\exp\left(j\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

実数部分だけ取り出すと

$$\boldsymbol{x}(t) = A\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + B\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

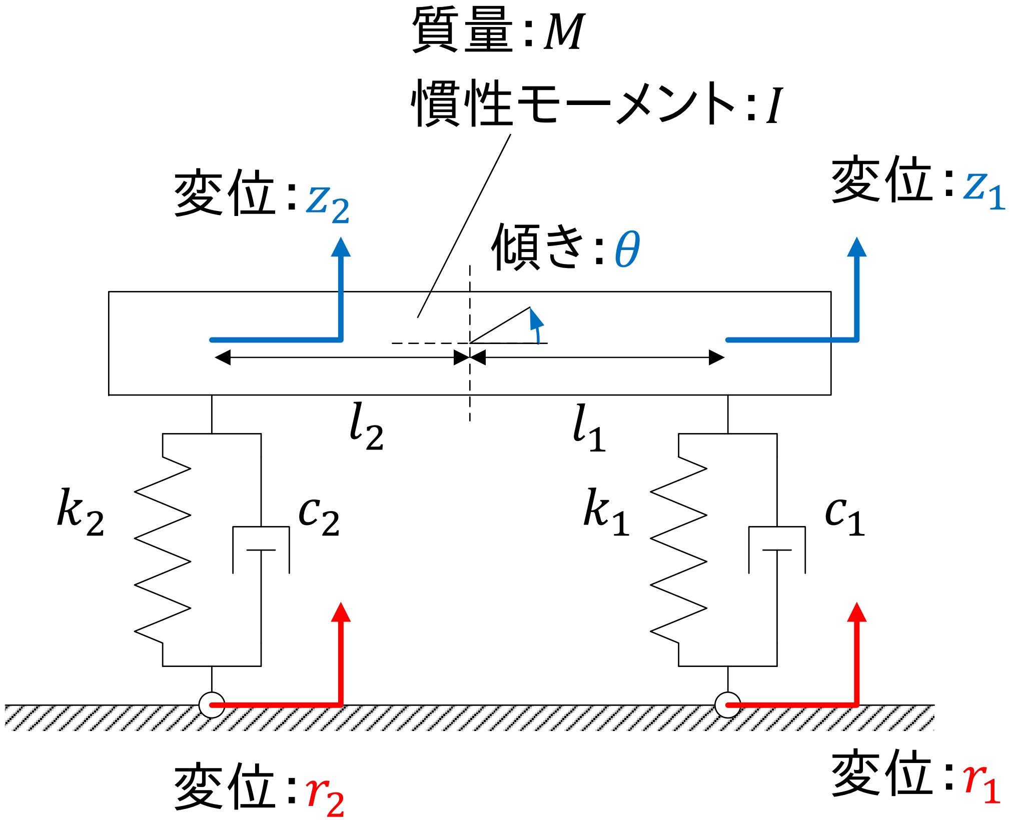


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

車両の運動方程式を求めよ



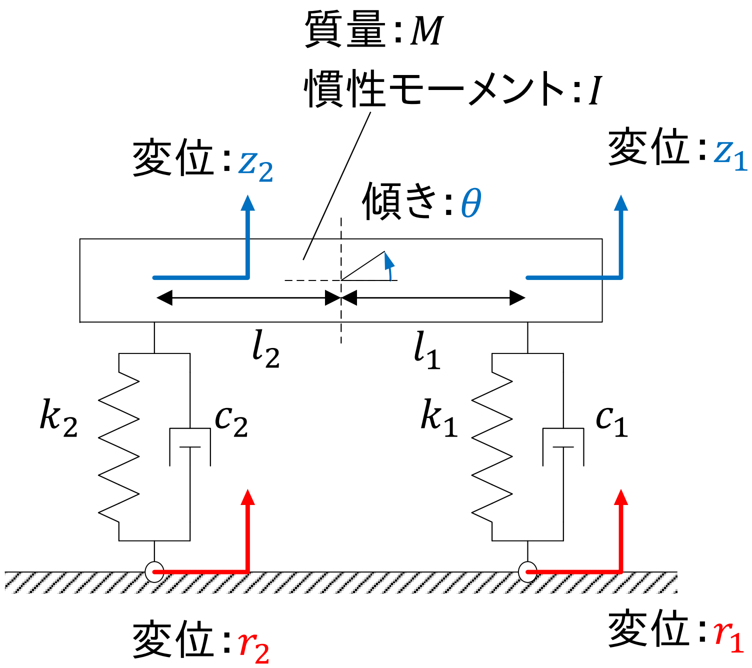
クルマは，サスペンション（バネ＋ダンパー）で支えられた剛体系と考えることができる
入力は『路面凹凸』で，出力は『車体応答』（車体の鉛直振動）
路面プロファイルという

並進の運動方程式（重心位置）：$(ma = F)$

$$M\frac{l_2\ddot{z}_1 + l_1\ddot{z}_2}{l_1 + l_2} = \underbrace{\boxed{-k_1(z_1 - r_1) - k_2(z_2 - r_2)}}_{\text{復元力}} - \underbrace{\boxed{c_1(\dot{z}_1 - \dot{r}_1) - c_2(\dot{z}_2 - \dot{r}_2)}}_{\text{減衰力}}$$

回転の運動方程式（重心＝回転中心）：$(m\ddot{\theta} = l \times F)$

$$I\frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{l_1 + l_2} = \underbrace{\boxed{-l_1 \times k_1(z_1 - r_1) + l_2 \times k_2(z_2 - r_2)}}_{\text{復元力のトルク}} - \underbrace{\boxed{l_1 \times c_1(\dot{z}_1 - \dot{r}_1) + l_2 \times c_2(\dot{z}_2 - \dot{r}_2)}}_{\text{減衰力のトルク}}$$



まとめると

$$\boxed{\mathbf{M}_\mathrm{V}\ddot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{C}_\mathrm{V}\dot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{K}_\mathrm{V}\boldsymbol{z} = \mathbf{C}_\mathrm{P}\dot{\boldsymbol{r}} + \mathbf{K}_\mathrm{P}\boldsymbol{r}}$$

$$\mathbf{M}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \dfrac{l_2 M}{l_1 + l_2} & \dfrac{l_1 M}{l_1 + l_2} \\ \dfrac{I}{l_1 + l_2} & \dfrac{-I}{l_1 + l_2} \end{bmatrix}$$

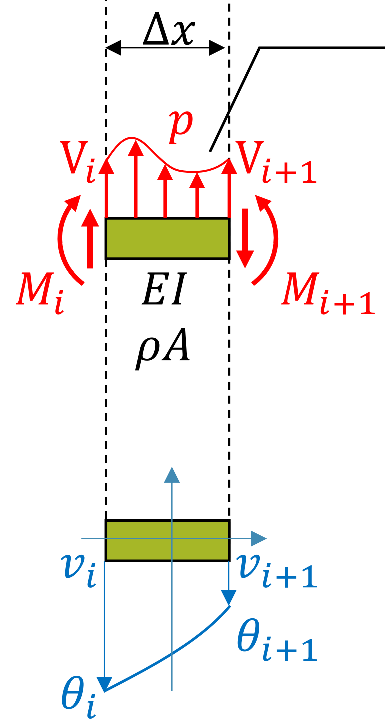
モデルによっては
$[\ \ ]_\mathrm{V} \neq [\ \ ]_\mathrm{P}$
なので，別々に定義する

$$\mathbf{C}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ l_1 c_1 & -l_2 c_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ l_1 c_1 & -l_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 k_1 & l_2 k_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 k_1 & l_2 k_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

橋梁の運動方程式を考える



平面保持仮定

▽

$$M = EI\phi = EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = EI\frac{d^3v}{dx^3}$$

$$\frac{dV}{dx} = EI\frac{d^4v}{dx^4}$$

局所系の『運動方程式』

$$\boxed{\rho A\ddot{v}\Delta x = V_i - V_{i+1} + p}$$

$$\rho A\ddot{v} = -\frac{V_{i+1} + V_i}{\Delta x} + p$$

$$\rho A\ddot{v} + \frac{dV}{dx} = p$$

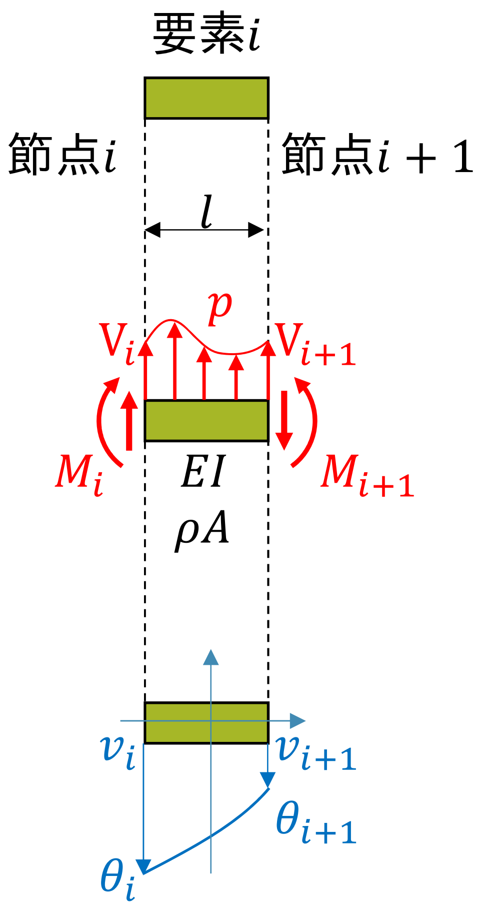
⇩ 平面保持仮定

$$\boxed{\rho A\ddot{v} + EI\frac{d^4v}{dx^4} = p}$$

$$\rho A\ddot{v} + \boxed{EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}} = p$$

$$\boxed{v(t,x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$ と仮定する ⇨

$$\theta(t,x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$\phi(t,x) = 6ax + 2b$$
$$v'''(t,x) = 6a$$



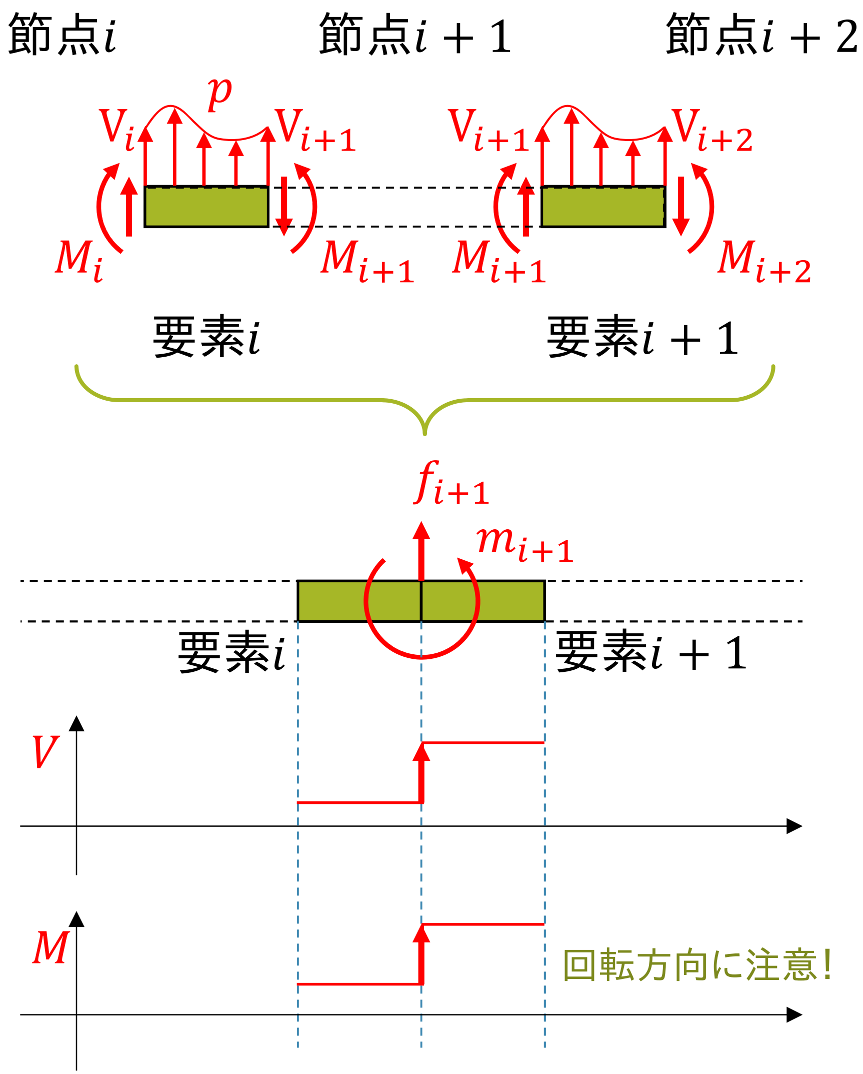
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(t,0) \\ \theta(t,0) \\ v(t,l) \\ \theta(t,l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \\ c \\ al^3 + bl^2 + cl + d \\ 3al^2 + 2bl + c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ 3l^2 & 2l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(i)} = EI \begin{Bmatrix} v'''(t,0) \\ \phi(t,0) \\ v'''(t,l) \\ \phi(t,l) \end{Bmatrix}^{(i)} = EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(i)} = EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l^3 & l^2 & l & 1 \\ 3l^2 & 2l & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



要素剛性マトリクス

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ -M_i \\ -V_{i+1} \\ M_{i+1} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{i+1} \\ m_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_i \\ -M_i \\ -V_{i+1} \\ M_{i+1} \end{Bmatrix}^{(i)} + \begin{Bmatrix} V_{i+1} \\ -M_{i+1} \\ -V_{i+2} \\ M_{i+2} \end{Bmatrix}^{(i+1)}$$

要素剛性マトリクスを組み合わせて
全体剛性マトリクスを作る

これは『**平面保持仮定**』から得られる結論

運動方程式 $\boxed{\rho A\ddot{v}} + EI\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p$

平面保持仮定

$$\left[\ \mathbf{K}\ \right]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\theta}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{m}\end{Bmatrix}$$

合わせるために
なんとなく

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\rho Al}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\rho Al}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{v}_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix}$$

集中質量マトリクス

最終的に同じ形で書ける

$$\left[\ \mathbf{M}\ \right]\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{v}}\\ \boldsymbol{\theta}\end{Bmatrix} + \left[\ \mathbf{K}\ \right]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\theta}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{m}\end{Bmatrix}$$

車両の**接地力**を代入する

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{m}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{LM}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{g} - \ddot{\mathbf{z}})\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}$$

数学的部分をちゃんとしないと気がすまない人には,

$$\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{v}_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\end{Bmatrix}$$

整合質量マトリクス

というのもある・・・（重み付き残差法・仮想仕事の定理などから導く）
ただし,必ずしも精度が良いわけではない

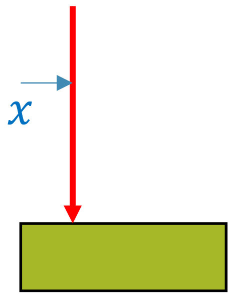
車両の接地力を記述する: $\mathbf{L}\mathbf{M}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{g}-\ddot{\boldsymbol{z}})$

軸重1を分配

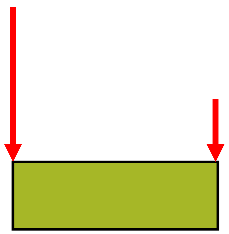
$$\mathbf{L}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}(l-x_1)/l & (l-x_2)/l \\ x_1/l & x_2/l\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{節点}i \\ \text{節点}i+1\end{array}\end{array}$$

節点数×軸重のマトリクス

軸重位置の範囲外
にある要素は全てゼロ



節点i　要素i　節点$i+1$



等価な節点荷重
に置き換える

$$\mathbf{M}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}\frac{M}{2} & \\ & \frac{M}{2}\end{bmatrix}$$

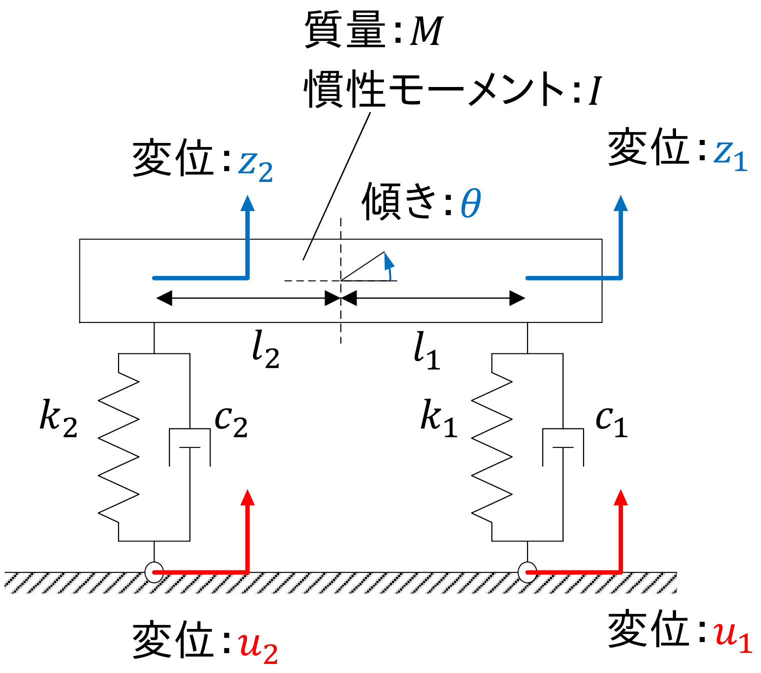
$$\boldsymbol{g}=\begin{Bmatrix}-g \\ -g\end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{z}}=\begin{Bmatrix}\ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2\end{Bmatrix}$$

接地力とは
クルマの重さから慣性力を差し引いたもの

橋梁のモデル化は有限要素法に基づいている.
有限要素法の立式過程においては,『重み付き残差法』が
最も汎用性が高く,ここで用いる『内挿』の概念を用いれば
数式は高度だけど,もう少し統一的に理解できるはず
このとき $\boldsymbol{m}\neq\mathbf{0}$

橋梁からの強制変位を車両モデルに追加する



位置に関する
路面凹凸の関数

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(x_1,t) \\ v(x_2,t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R(x_1) \\ R(x_2) \end{Bmatrix}$$

車両位置の
橋梁振動
（節点位置ではない）

$$\begin{Bmatrix} y(x_1,t) \\ y(x_2,t) \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

としてちゃんと三次曲線でも求められるが
大規模化するとやや面倒になってくる

車両と橋梁の相互作用モデルが記述できた

$$\mathbf{M}_\mathrm{V}\ddot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{C}_\mathrm{V}\dot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{K}_\mathrm{V}\boldsymbol{z} = \mathbf{C}_\mathrm{P}\dot{\boldsymbol{u}} + \mathbf{K}_\mathrm{P}\boldsymbol{u}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{K}\boldsymbol{y} = \mathbf{L}\mathbf{M}_\mathrm{P}(\boldsymbol{g} - \ddot{\boldsymbol{z}})$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\theta}\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} + \mathbf{L}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}$$

$$\mathbf{M}_\mathrm{V}\ddot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{C}_\mathrm{V}\dot{\boldsymbol{z}} + \mathbf{K}_\mathrm{V}\boldsymbol{z} = \mathbf{C}_\mathrm{P}\left(\dot{\boldsymbol{r}} + \mathbf{L}^\mathrm{T}\dot{\boldsymbol{y}}\right) + \mathbf{K}_\mathrm{P}\left(\boldsymbol{r} + \mathbf{L}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}\right)$$

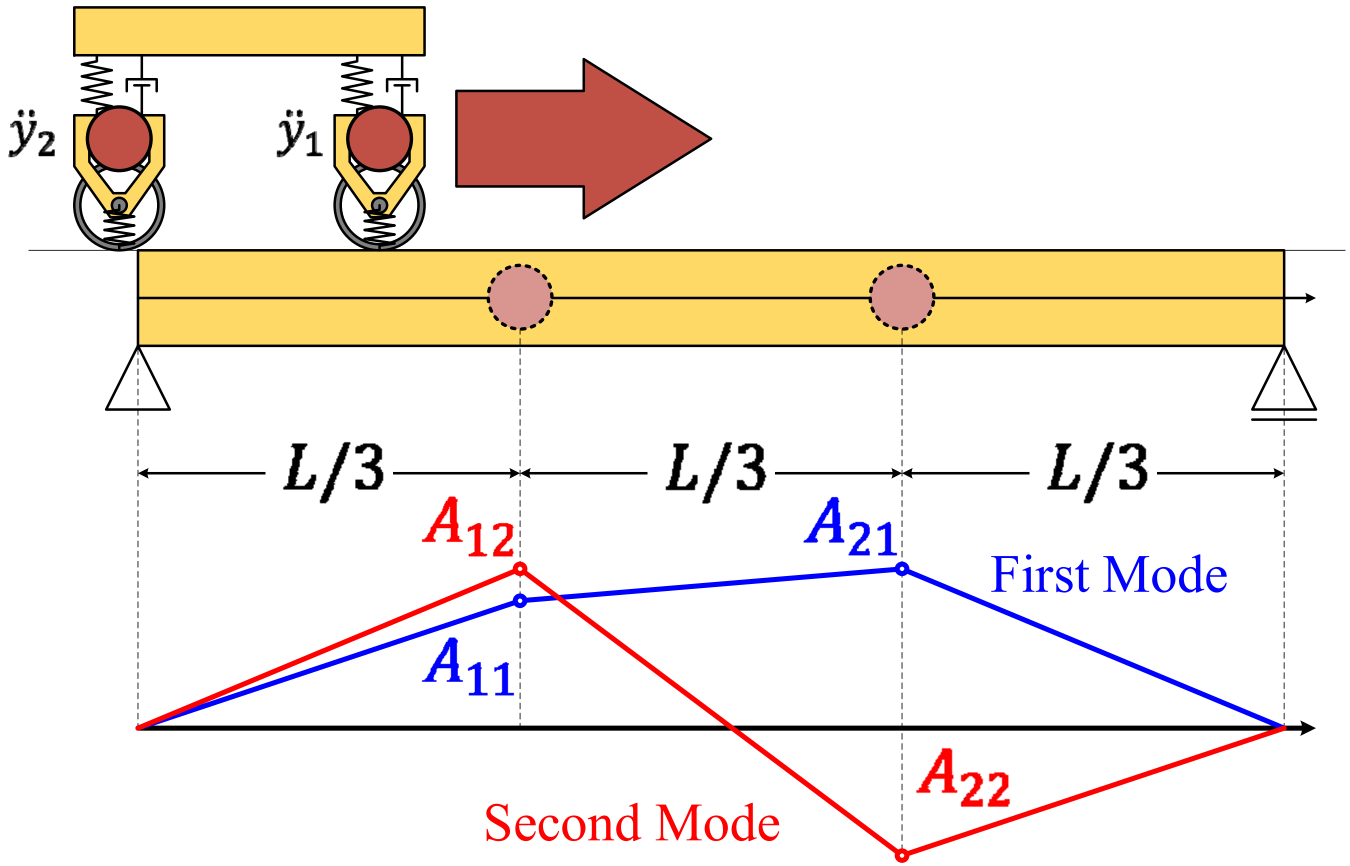
$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{K}\boldsymbol{y} = \mathbf{L}\mathbf{M}_\mathrm{P}(\boldsymbol{g} - \ddot{\boldsymbol{z}})$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{M}_\mathrm{V} & \\ \mathbf{M} & \mathbf{L}\mathbf{M}_\mathrm{P}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{z}}\\ \ddot{\boldsymbol{y}}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_\mathrm{V} & -\mathbf{C}_\mathrm{P}\mathbf{L}^\mathrm{T}\\ & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{z}}\\ \dot{\boldsymbol{y}}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{K}_\mathrm{V} & -\mathbf{K}_\mathrm{P}\mathbf{L}^\mathrm{T}\\ & \mathbf{K}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{y}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{C}_\mathrm{P}\dot{\boldsymbol{r}} + \mathbf{K}_\mathrm{P}\boldsymbol{r}\\ \mathbf{L}\mathbf{M}_\mathrm{P}\boldsymbol{g}\end{Bmatrix}}$$

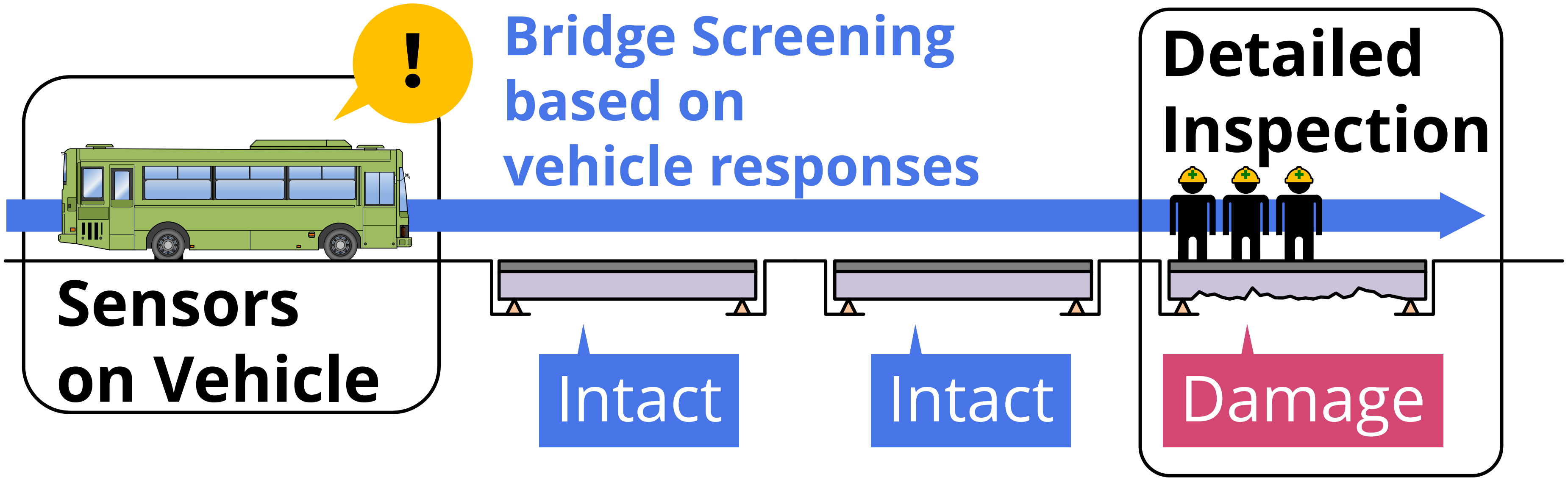
MCKシステムとして記述できる！
でも, M, C, Kのそれぞれが時間変化する**L**を含んでいるので線形ではない！

さらに高度なモデル化として, 車両を**バネ上**と**バネ下**に分けることができる

タイヤをバネでモデル化し, サスペンションの上下をバネ上・バネ下と呼ぶ



最近の研究


!
Bridge Screening
based on
vehicle responses
Detailed
Inspection
Sensors
on Vehicle
Intact
Intact
Damage