

筑波大学大学院博士課程

理工情報生命学院

システム情報工学研究群修士論文

一般化三変数板理論に基づいた
高階 Hermite 適合要素の開発

酒井 真清

修士（工学）

（構造エネルギー工学学位プログラム）

指導教員 山本 亨輔

2024年3月

概要

Kirchhoff-Love 板および Reissner-Mindlin 板の力学的挙動を分析するために、Hermite 補間を用いた新たな要素を開発した。開発した要素は補間に 1 変数 Hermite 多項式の積である双 Hermite 補間関数を用いた四辺形適合要素であり、節点の曲げ自由度が 4 自由度、9 自由度であることから P4, P9 要素と呼ばれる。計算コスト削減の観点から均質で等方性を備える板の支配方程式は一般化三変数板理論によって導入される。開発した P4 要素, P9 要素の性能を検証するために MATLAB 上で数値シミュレーションを行い、解析解や既存研究による厳密解と比較した。数値シミュレーションの結果、開発した P4 要素, P9 要素は板厚や要素形状に関係なく優れた近似結果を提供することが確認された。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究背景, 研究目的	1
1.2	研究方法	3
第2章	一般化3変数板理論	4
第3章	有限要素法	10
3.1	P4要素	13
3.2	P9要素	15
第4章	数値シミュレーション	18
4.1	薄い円板	18
4.1.1	面外方向に等分布荷重を受ける固定された円板	19
4.1.2	面外方向に等分布荷重を受ける単純支持された円板	20
4.1.3	面外方向に集中荷重を受ける単純支持された円板	21
4.2	薄い正方形板	21
4.2.1	面外方向に等分布荷重を受ける固定された正方形板	22
4.2.2	面外方向に等分布荷重を受ける単純支持された正方形板	23
4.2.3	面外方向に集中荷重を受ける単純支持された正方形板	24
4.2.4	辺長比が大きな板要素で構成された正方形板	24
4.3	厚い正方形板	25
4.3.1	面外方向に等分布荷重を受ける固定された正方形板	25
4.3.2	面外方向に等分布荷重を受ける単純支持された正方形板	26
第5章	結論	27
	謝辞	28
	参考文献	29
付録A	仮想仕事	33
付録B	弱形式化	34

目次

2.1	板モデルおよび応力状態の概念図	4
3.1	物理座標と自然座標の変換	12
4.1	円板のメッシュ分割例	18
4.2	円板を粗くメッシュ分割した際の変形図	19
4.3	円板を細かくメッシュ分割した際の変形図	19
4.4	正方形板のメッシュ分割例	22
4.5	正方形板を粗くメッシュ分割した際の変形図	23
4.6	正方形板を細かくメッシュ分割した際の変形図	23
4.7	辺長比-相対誤差関係図	25

第1章 はじめに

1.1 研究背景，研究目的

板は様々なデバイスや機械，土木構造物などに広く使われている重要な構造部品である．板の様々な使用場面や形状を考えると，多様な方法でその力学的挙動をモデル化し，計算できることは極めて重要である．板の力学的挙動は板の厚さに応じて Kirchhoff-Love 板理論，またはせん断変形板理論を使い分けることにより，精度良く計算することができる．Kirchhoff-Love 板理論は古典的板理論 (Classical Plate theory : CPT) とも呼ばれることがあり，せん断変形を無視できるような薄い板の曲げ変形を計算することに優れている．一方，せん断変形板理論は土木構造物によく使用されるような比較的厚い板の曲げ挙動の計算に適している．

CPT およびせん断変形板理論を用いると，板の変形挙動は偏微分方程式によって記述される．その偏微分方程式の近似解を得るために有限要素法 (Finite Element Methods : FEM) がよく用いられる．FEM では基本的に偏微分方程式が対象とする領域を領域の特徴に合わせて直線や三角形，四角形，四面体，六面体などの微小領域に分割し，微小領域を構成する離散点における解を求める．その離散点を節点，節点によって構成される微小領域を要素と呼ぶ．要素内において連続的に分布する変位や外力といった物理量は節点での値を基底関数で内挿することにより表現される．節点の配置や内挿に採用される値，基底関数によって要素の種類が定義され，これまでに様々な種類の要素が開発されてきた．

板の力学的挙動を解析する上では三角形や四角形の形状を持つ 2 次元要素である板要素，シェル要素が採用されることが多く，隣接する要素は共有する辺を介して接続される．板のたわみを正確に表現する為には共有辺上で曲げたわみが連続している C^0 連続だけでなく，たわみ角まで連続である C^1 連続が要求される．一般的に C^1 連続を満たす要素は適合要素と呼ばれ，CPT に基づく適合要素の例としては HCT 要素 [1]，TUBA [2]，DKQ 要素 [3] などが挙げられる．適合要素の定式化は複雑なものが多く，比較的定式化が簡単に行える C^1 連続を満たさない要素 (非適合要素) の開発も行われてきた．非適合要素の代表的な例としては DKT 要素 [4] や ACM 要素 [5] などが挙げられる．この文脈において Bogner らは BFS 要素と呼ばれる，Hermite 多項式を基底関数として用いた革新的な要素を開発した [6]．Zienkiewicz と Taylor [7] によればこの BFS 要素は HCT，DKT，DKQ，ACM といった要素と比較を行った中で精度と収束の速さの面で最も優れていると評されている．しかし，BFS 要素はその導出の中で親要素が定義されておらず，要素形状が矩形に限られている．このような幾何的制約から BFS 要素の適用例はあまり多くない．

近年，ひずみ弾性勾配 (strain gradient) や有限セル法 (Finite Cell Methods : FCM) を扱う

研究者らが Hermite 多項式を基底関数に採用した有限要素に関する研究を精力的に行っている [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Beheshti [8] は要素の形状補間には一般的な要素で使用される双線形 Lagrange 補間関数を使用し, たわみ, たわみ角など補間には 1 変数 Hermite 多項式の積である双 Hermite 補間関数を用いた四辺形サブパラメトリック要素を開発した. Beheshti ら [8] の研究では各節点の曲げ自由度 (Degree of Freedom : DoF) が 3 自由度と 6 自由度である非適合要素を導入し, 様々な板形状や境界条件, 荷重条件に関してベンチマークテストが行われた. しかしながら, Bogner ら [6] が示したような, 節点の曲げ自由度に 4 自由度, 9 自由度を持つ適合要素に関する検討は行われていない. Bacciocchi らは Beheshti が導入したようなサブパラメトリック要素に加え, 要素形状とたわみなどの補間に同一の基底関数を使用したアイソパラメトリック四辺形 Hermite 型要素を開発した [10, 11]. Bacciocchi らの研究 [10, 11] では適合要素の検討が行なわれているが, Hermite 多項式を基底関数として明示的に使用はしていない.

せん断変形を考慮する必要のある厚板モデルでは, せん断変形 (応力) の厚さ方向への線形分布を仮定する Reissner-Mindlin 板理論 [14, 15] が用いられることが多い. このアプローチは一次せん断変形理論 (First Shear Deformation Theory : FSDT) とも呼ばれており, FSDT に基づいた様々な 2 次元有限要素が開発されてきた [16, 17, 18, 19]. しかし, FSDT に基づく有限要素の多くが, 板厚を小さくするとせん断剛性を過大評価する, せん断ロック現象が発生するという問題を抱えている. ロッキングを回避する為には縮減積分法やバブルモードの付加といった計算テクニックを用いるか, せん断ひずみを他の成分と別に仮定すればいいが, 複雑な定式化が必要である [20, 21, 18, 19]. 一方でせん断変形分布を非線形と仮定するモデルも存在する. これらのモデルは高次せん断変形理論 (Higher-order Shear Deformation Theory : HSDT) と呼ばれ, 様々な関数を利用して分布を仮定した研究が存在する [22, 23, 24, 25, 26].

板の変形を解析する際には板の中立面に xy 座標軸を設定することが多く, 中立面法線方向が z 軸となる. このとき x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w とすると, CPT では u, v, w のみを独立変数と見なす. FSDT と HSDT は CPT と異なり u, v, w に加え, x, y 方向のたわみ角 β_x, β_y を独立変数として扱うため計算コストが大幅に増加する. そこで, Senthilnathan ら [27] は計算コストの増大を抑えるために面外変位 w を曲げ成分とせん断成分に分離できると仮定した新たな 4 変数板理論を提案した. Senthilnathan らの仮定に基づいて様々な研究が行われており [28, 29, 30, 31, 32, 33], これらのモデルは Refine Plate Theory (: RPT) と呼ばれている. RPT の流れの中で Nguyen らは一般化 3 変数板理論 (Generalised Three Variavle Plate Theory:GTVPT) を発表した [33]. GTVPT は CPT, FSDT, HSDT の統合を目指し, せん断たわみが曲げたわみによって表されるという仮定の下, 6 次の強形式, 弱形式では 4 次の支配方程式が導出された. Nguyen らは支配方程式の導出後, Iso-Geometric Analysis (: IGA) [34] により検証を行った.

本研究の目的は GTVPT に基づき, 補間に Hermite 多項式を明示的に用いた四辺形適合要素を開発することである. 要素形状の補間は 1 次 Lagrange 多項式を用いて Beheshti [8] と同様に定式化を行うが, 本研究では適合要素を導入し, その妥当性の検証を行う. また, FSDT への適用も行う.

1.2 研究方法

まず、GTVPTによる板の支配方程式の導出および弱形式化を行う。その後、各節点の曲げ自由度が4自由度または9自由度であり、要素形状補間にLagrange多項式、たわみなどの補間にHermite多項式を明示的に用いた四辺形適合要素の導出を行う。要素の性能を確認するために薄板、厚板についてMATLABを用いた数値シミュレーションによるベンチマークテストを行った。

第2章 一般化3変数板理論

本研究では Nguyen ら [33] が発表した GTVPT に基づき、支配方程式を導出した。図 2.1 に示すような均質な板では力のつり合い式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \quad (2.1c)$$

一般的に板構造において σ_{zz} は無視できるため、体積力 b を外力として考えると式 (2.1) は以下のように簡略化できる。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.2c)$$

式 (2.2c) と式 (2.2a), (2.2b) を z 倍したものを $-\frac{h}{2}$ から $\frac{h}{2}$ まで積分すると式 (2.3) のようになる。

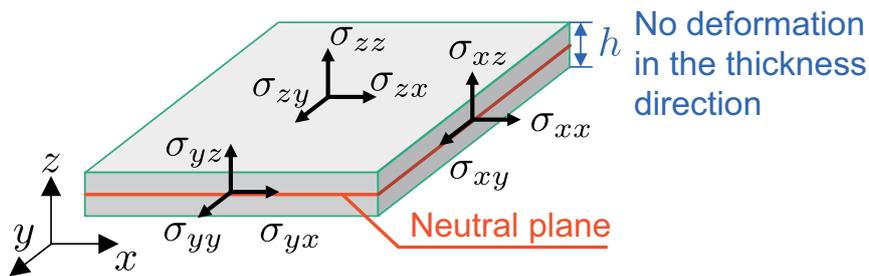


図 2.1: 板モデルおよび応力状態の概念図

$$\frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0 \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_{yz} = 0 \quad (2.3c)$$

ここで断面力およびモーメントは以下のように定義される.

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & N_{yy} & N_{xy} \end{bmatrix}^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T dz \quad (2.4a)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{yy} & M_{xy} \end{bmatrix}^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T dz \quad (2.4b)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} & Q_{yz} \end{bmatrix}^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T dz \quad (2.4c)$$

均質な板の構成方程式は次のように与えられる.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \mathbf{0} \\ \nu & 1 & & & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & & \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & \\ \mathbf{0} & & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

ここで E はヤング率, ν はポアソン比である. u_0, v_0 をそれぞれ板の中立面 ($z=0$) における x, y 方向の変位, w を z 方向の変位とする. このとき, せん断変形理論では変位を次のように定義する.

$$u(x, y, z) = u_0 + z\phi_x + g(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) \quad (2.6a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 + z\phi_y + g(z) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \quad (2.6b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.6c)$$

$g(z)$ はせん断変形の分布を仮定する関数である. Senthilnathan ら [27] は式 (2.7) の仮定を採用し, 式 (2.6) を式 (2.8) のように変形した.

$$w = w_b + w_s \quad (2.7a)$$

$$\phi_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (2.7b)$$

$$\phi_y = -\frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (2.7c)$$

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (2.8a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (2.8b)$$

$$w(x, y, z) = w_b + w_s \quad (2.8c)$$

w_b と w_s はそれぞれ曲げたわみおよびせん断たわみである。本研究では FSDT への適用を目指すため、 $g(z) = 0$ のケースについて定式化を行っている。 $g(z)$ の他の例に関しては Nguyen ら [33] を参照されたい。

ひずみ-変位関係式は式 (2.9) のように表される。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.9a)$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (2.9b)$$

式 (2.4) に式 (2.5), (2.9) を代入すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{yy} & N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\boldsymbol{\varepsilon}_0^T + z \boldsymbol{\varepsilon}_1^T) \mathbf{C}_b dz \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_b dz + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{C}_b dz \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{yy} & M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (\boldsymbol{\varepsilon}_0^T + z \boldsymbol{\varepsilon}_1^T) \mathbf{C}_b dz \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{C}_b dz + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{C}_b dz \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_s dz \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \end{aligned} \quad (2.10c)$$

\mathbf{C}_b および \mathbf{C}_s は \mathbf{C} の部分行列であり

$$\mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.11b)$$

本研究で扱っている板は均質な板であり $E(z)$ は定数であるため、式 (2.10) の積分は次のように計算できる。

$$\mathbf{A} = h\mathbf{C}_b, \mathbf{B} = \mathbf{O}, \mathbf{D} = \frac{h^3}{12}\mathbf{C}_b, \mathbf{D}_s = h\mathbf{C}_s \quad (2.12)$$

表記を簡素化するため以降、式 (2.13) のように記述する。

$$A = \mathbf{A}_{11}, D = \mathbf{D}_{11}, D_s = \mathbf{D}_{s11} \quad (2.13)$$

式 (2.10) より、式 (2.3) は次のように書ける。

$$D_s \nabla^2 w_s = 0 \quad (2.14a)$$

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_b - D_s \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad (2.14b)$$

$$-D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_b - D_s \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad (2.14c)$$

ここで $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. 式 (2.14b), (2.14c) をそれぞれ x と y で積分すると次式のようになる。

$$w_s = -\frac{D}{D_s} \nabla^2 w_b + F_1(y) \quad (2.15a)$$

$$w_s = -\frac{D}{D_s} \nabla^2 w_b + F_2(x) \quad (2.15b)$$

$F_1(y)$, $F_2(x)$ は積分定数である。式 (2.15a), (2.15b) は同一であるはずであるから

$$F_1(y) = F_2(x) = F_0 \quad (2.16)$$

F_0 は剛体運動を表すため省略する。式 (2.15) より

$$w_s = -\frac{D}{D_s} \nabla^2 w_b = \alpha \nabla^2 w_b \quad (2.17)$$

ゆえに式 (2.8) は次式のように表される。

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (2.18a)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (2.18b)$$

$$w(x, y, z) = w_b + \alpha \nabla^2 w_b \quad (2.18c)$$

仮想仕事式を考える．板の体積を V とすると板の弾性エネルギーは次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s \right\} d\Omega\end{aligned}\quad (2.19)$$

式 (2.19) に式 (2.10) を代入し，部分積分を用いて展開すると次式のような表現を得る．

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{\Omega} \left\{ \left(N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \left(Q_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \right) \delta v_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) (\delta w_0 + \alpha \nabla^2 \delta w_0) \right\} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \left\{ (N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u_0 + (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v_0 - (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) n_y \right) (\delta w_0 + \alpha \nabla^2 \delta w_0) \right\} d\Gamma\end{aligned}\quad (2.20)$$

Ω と Γ はそれぞれ板の中立面とその境界である． n_x と n_y は中立面 Ω に対する法線ベクトルの x , y 方向成分である式 (2.20) の計算の詳細は付録 A を参照されたい．また，面外方向荷重 $q(x, y)$ による仕事 W^{ext} は次式で与えられる．

$$\delta W^{ext} = - \int_{\Omega} q(x, y) (\delta w_0 + \alpha \nabla^2 \delta w_0) d\Omega\quad (2.21)$$

仮想仕事の原理より

$$\delta U - \delta W^{ext} = 0\quad (2.22)$$

式 (2.20), (2.21) および (2.22) より支配方程式は以下のようになる．

$$s \delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\quad (2.23a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0\quad (2.23b)$$

$$\delta w_b + \alpha \nabla^2 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q(x, y) = 0\quad (2.23c)$$

式 (2.10) より式 (2.23) は変位について書き直すことができる.

$$\delta u_0 : A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} A \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} A \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.24a)$$

$$\delta v_0 : \frac{1-\nu}{2} A \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.24b)$$

$$\delta w_b + \alpha \delta^2 \delta w_b : D \nabla^4 w_0 + q(x, y) = 0 \quad (2.24c)$$

ここで $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$. 式 (2.23), (2.24) を見ると GTVPT によって導かれた FSDT の支配方程式はよく目にする CPT のものと同一であることが分かる. ただし, FSDT においては $w = w_b + w_s$ であることに注意されたい. 言い換えると w_s を無視すれば CPT による解が求まる.

第3章 有限要素法

以降，記法簡略化のために $u_0 = u$, $v_0 = v$, $w_b = w$ のように表記する．ある板要素内における変位は次のように近似することができる．

$$u(x, y) = \mathbf{N}^{(m)}(x, y) \cdot \mathbf{u} \quad (3.1a)$$

$$v(x, y) = \mathbf{N}^{(m)}(x, y) \cdot \mathbf{v} \quad (3.1b)$$

$$w(x, y) = \mathbf{N}^{(b)}(x, y) \cdot \mathbf{w} \quad (3.1c)$$

$\mathbf{N}^{(m)}$, $\mathbf{N}^{(b)}$ はそれぞれ面内変形と面外変形に関する基底関数であり， \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} はそれぞれ x , y , z 方向の変位ベクトルである．式 (2.10), (3.1) より断面力およびモーメントは次式のように表す事ができる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} \text{ T} & & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} \text{ T} & & & & \\ \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} \text{ T} & \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} \text{ T} & & & & \\ & & -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x^2} \text{ T} & & & \\ & & -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y^2} \text{ T} & & & \\ & & -2\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x \partial y} \text{ T} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_L \mathbf{B}_L \mathbf{U} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} \text{ T} & & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} \text{ T} & & & & \\ \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} \text{ T} & \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} \text{ T} & & & & \\ & & -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x^2} \text{ T} & & & \\ & & -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y^2} \text{ T} & & & \\ & & -2\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x \partial y} \text{ T} & & & \end{bmatrix}, \mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

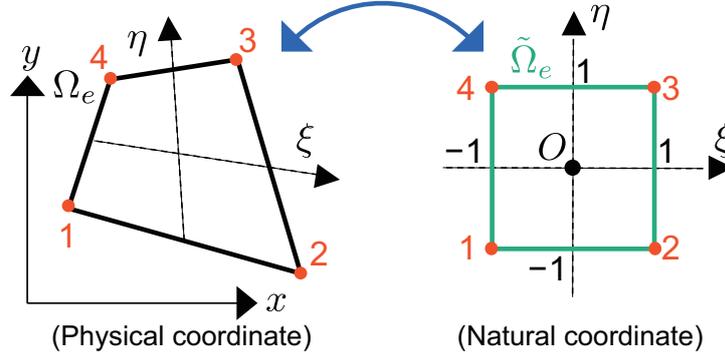


図 3.1: 物理座標と自然座標の変換

$$\mathbf{x}_e = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i^{(c)}(\xi, \eta) \mathbf{x}_i \quad (3.9)$$

ここで \mathbf{x}_e は要素内のある点の座標ベクトルであり, \mathbf{x}_i は i 番目の要素構成節点の座標ベクトルである. $\hat{N}_i^{(c)}(\xi, \eta)$ は 1 次の Lagrange 多項式の積である双線形補間関数であり, 次のように与えられている.

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^{(c)} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & \hat{N}_2^{(c)} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \hat{N}_3^{(c)} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & \hat{N}_4^{(c)} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

この変換を導入することにより, 物理座標系 x, y に関する導関数を自然座標系 ξ, η について書き直すことができる. 式 (3.2) の \mathbf{B}_L に含まれる導関数は $\bar{\mathbf{J}}_m$ または $\bar{\mathbf{J}}_b$ を変換マトリクスとして自然座標系 ξ, η について式 (3.11) のように表すことができる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}^{(m)}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}^{(m)}}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T = \bar{\mathbf{J}}_m \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.11a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}^{(b)}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}^{(b)}}{\partial \eta} & \frac{\partial^2 \hat{N}^{(b)}}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \hat{N}^{(b)}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 \hat{N}^{(b)}}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{J}}_b \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.11b)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{J}}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

本研究では面内変位, 面外変位はともに Hermite 補間によって内挿されるが面内変位に関する自由度は x, y 方向それぞれ 3 自由度で固定した. 面外変位に関する自由度は各要素で異なる.

3.1 P4要素

Beheshti [8] の命名規則に従い、節点の曲げ自由度が4である要素を P4 要素と呼ぶ。 i 番目の要素構成節点における面内変位と面外変位に対する一般化変位ベクトルをそれぞれ次のように定義する。

$$\mathbf{u}_i = \left[u_i \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} \right]^T \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{v}_i = \left[v_i \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \frac{\partial v}{\partial y_i} \right]^T \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{w}_i^{(4)} = \left[w_i \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \frac{\partial w}{\partial y_i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_i} \right]^T \quad (3.12c)$$

式 (3.1) と (3.12) の関係は次のように表される。

$$\mathbf{u} = \left[\mathbf{u}_1^T \quad \mathbf{u}_2^T \quad \mathbf{u}_3^T \quad \mathbf{u}_4^T \right]^T \quad (3.13)$$

\mathbf{v}_i , $\mathbf{w}_i^{(4)}$ についても同様である。

親空間 $\hat{\Omega}_e$ における変位は次のように近似できる。

$$u_e = \sum_{i=1}^4 \left(u_i \hat{N}_{i1}^{(m)} + \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \hat{N}_{i2}^{(m)} + \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \hat{N}_{i3}^{(m)} \right) \quad (3.14a)$$

$$v_e = \sum_{i=1}^4 \left(v_i \hat{N}_{i1}^{(m)} + \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \hat{N}_{i2}^{(m)} + \frac{\partial v}{\partial \eta_i} \hat{N}_{i3}^{(m)} \right) \quad (3.14b)$$

$$w_e = \sum_{i=1}^4 \left(w_i \hat{N}_{i1}^{(b,4)} + \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \hat{N}_{i2}^{(b,4)} + \frac{\partial w}{\partial \eta_i} \hat{N}_{i3}^{(b,4)} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta_i} \hat{N}_{i4}^{(b,4)} \right) \quad (3.14c)$$

$\hat{N}_{ij}^{(m)}$, $\hat{N}_{ij}^{(b,4)}$ は 1 変数 Hermite 多項式 $H^{(3)}(\xi)$, $H^{(3)}(\eta)$ の積である補間関数であり、次式のような関係である。

$$\hat{N}_{i1}^{(m)} = H_k^{(3)}(\xi) H_l^{(3)}(\eta) \quad (3.15a)$$

$$\hat{N}_{i2}^{(m)} = H_{k+1}^{(3)}(\xi) H_l^{(3)}(\eta) \quad (3.15b)$$

$$\hat{N}_{i3}^{(m)} = H_k^{(3)}(\xi) H_{l+1}^{(3)}(\eta) \quad (3.15c)$$

$$\{i, k, l\} = (1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 3, 3), (4, 1, 3)$$

$$\hat{N}_{i1}^{(b,4)} = H_k^{(3)}(\xi)H_l^{(3)}(\eta) \quad (3.16a)$$

$$\hat{N}_{i2}^{(b,4)} = H_{k+1}^{(3)}(\xi)H_l^{(3)}(\eta) \quad (3.16b)$$

$$\hat{N}_{i3}^{(b,4)} = H_k^{(3)}(\xi)H_{l+1}^{(3)}(\eta) \quad (3.16c)$$

$$\hat{N}_{i4}^{(b,4)} = H_{k+1}^{(3)}(\xi)H_{l+1}^{(3)}(\eta) \quad (3.16d)$$

$$\{i, k, l\} = (1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 3, 3), (4, 1, 3)$$

$H_i^{(3)}$ は次のような条件を満たす.

$$H_{2i-1}^{(3)}(\xi_i) = \delta_{ij} \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial H_{2i}^{(3)}(\xi_j)}{\partial \xi} = \delta_{ij} \quad (3.17b)$$

i, j は 1 または 2 の値をとり, δ_{ij} は Kronecker のデルタである. そのため $H_i^{(3)}(\xi)$ は式 (3.18) のように与えられる.

$$H_1^{(3)}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 2) \quad (3.18a)$$

$$H_2^{(3)}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 1) \quad (3.18b)$$

$$H_3^{(3)}(\xi) = -\frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 2) \quad (3.18c)$$

$$H_4^{(3)}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 1) \quad (3.18d)$$

この定式化は Beheshti [8] の P3 要素の定式化とよく似ているが, 式 (3.16d) が追加されていることに注意されたい.

ここで式 (3.11) の変換を考えると, 物理空間 Ω_e における変位の近似は以下のように表される.

$$u_e = \sum_{i=1}^4 \left(u_i N_{i1}^{(m)} + \frac{\partial u}{\partial x_i} N_{i2}^{(m)} + \frac{\partial u}{\partial y_i} N_{i3}^{(m)} \right) \quad (3.19a)$$

$$v_e = \sum_{i=1}^4 \left(v_i N_{i1}^{(m)} + \frac{\partial v}{\partial x_i} N_{i2}^{(m)} + \frac{\partial v}{\partial y_i} N_{i3}^{(m)} \right) \quad (3.19b)$$

$$w_e = \sum_{i=1}^4 \left(w_i N_{i1}^{(b,4)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} N_{i2}^{(b,4)} + \frac{\partial w}{\partial y_i} N_{i3}^{(b,4)} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_i} N_{i4}^{(b,4)} \right) \quad (3.19c)$$

$N_{ij}^{(m)}$ と $N_{ij}^{(b,4)}$ は物理空間 Ω_e における補間関数である. $\hat{N}_{ij}^{(m)}$, $\hat{N}_{ij}^{(b,4)}$ と $N_{ij}^{(m)}$, $N_{ij}^{(b,4)}$ の関係は次式のように書くことができる.

$$\mathbf{N}_i^{(m)} = \mathbf{A}_i^{(m)} \hat{\mathbf{N}}_i^{(m)} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{N}_i^{(b,4)} = \mathbf{A}_i^{(b,4)} \hat{\mathbf{N}}_i^{(b,4)} \quad (3.20b)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_i^{(m)} &= \left[N_{i1}^{(m)\text{T}} \quad N_{i2}^{(m)\text{T}} \quad N_{i3}^{(m)\text{T}} \right]^{\text{T}} \\
\hat{\mathbf{N}}_i^{(m)} &= \left[\hat{N}_{i1}^{(m)\text{T}} \quad \hat{N}_{i2}^{(m)\text{T}} \quad \hat{N}_{i3}^{(m)\text{T}} \right]^{\text{T}} \\
\mathbf{N}_i^{(b,4)} &= \left[N_{i1}^{(b,4)\text{T}} \quad N_{i2}^{(b,4)\text{T}} \quad N_{i3}^{(b,4)\text{T}} \quad N_{i4}^{(b,4)\text{T}} \right]^{\text{T}} \\
\hat{\mathbf{N}}_i^{(b,4)} &= \left[\hat{N}_{i1}^{(b,4)\text{T}} \quad \hat{N}_{i2}^{(b,4)\text{T}} \quad \hat{N}_{i3}^{(b,4)\text{T}} \quad \hat{N}_{i4}^{(b,4)\text{T}} \right]^{\text{T}} \\
\mathbf{A}_i^{(m)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi_i} & \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi_i} & \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i^{(b,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi_i} & \frac{\partial x}{\partial \eta_i} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_i \partial \eta_i} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi_i} & \frac{\partial y}{\partial \eta_i} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_i \partial \eta_i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} + \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

式 (3.1), (3.13) より, $\mathbf{N}^{(m)}$, $\mathbf{N}^{(b,4)}$ と $\mathbf{N}_i^{(m)}$, $\mathbf{N}_i^{(b,4)}$ の関係は以下のように表される.

$$\mathbf{N}^{(m)} = \left[\mathbf{N}_1^{(m)\text{T}} \quad \mathbf{N}_2^{(m)\text{T}} \quad \mathbf{N}_3^{(m)\text{T}} \quad \mathbf{N}_4^{(m)\text{T}} \right]^{\text{T}} \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{N}^{(b,4)} = \left[\mathbf{N}_1^{(b,4)\text{T}} \quad \mathbf{N}_2^{(b,4)\text{T}} \quad \mathbf{N}_3^{(b,4)\text{T}} \quad \mathbf{N}_4^{(b,4)\text{T}} \right]^{\text{T}} \quad (3.21b)$$

式 (3.20), (3.21) より

$$\mathbf{N}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(m)} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{(m)} & & \\ & & \mathbf{A}_3^{(m)} & \\ & & & \mathbf{A}_4^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_1^{(m)} \\ \hat{\mathbf{N}}_2^{(m)} \\ \hat{\mathbf{N}}_3^{(m)} \\ \hat{\mathbf{N}}_4^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{N}^{(b,4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(b,4)} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{(b,4)} & & \\ & & \mathbf{A}_3^{(b,4)} & \\ & & & \mathbf{A}_4^{(b,4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_1^{(b,4)} \\ \hat{\mathbf{N}}_2^{(b,4)} \\ \hat{\mathbf{N}}_3^{(b,4)} \\ \hat{\mathbf{N}}_4^{(b,4)} \end{bmatrix} \quad (3.22b)$$

式 (3.22) を式 (3.11) に代入すると \mathbf{B}_L の要素が求まる.

3.2 P9 要素

Beheshti [8] の命名規則に従い, 節点の曲げ自由度が 9 である要素を P9 要素と呼ぶ. i 番目の要素構成節点における面外変位に対する一般化変位ベクトルをそれぞれ次のように定義する.

$$\mathbf{w}_i^{(9)} = \left[w_i \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \frac{\partial w}{\partial y_i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2_i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2_i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_i} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y_i} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2_i} \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2_i} \right] \quad (3.23)$$

面内変位に関する定式化は P4 要素と同様であるため省略する.

親空間 $\hat{\Omega}_e$ における変位は次のように近似できる.

$$w_e = \sum_{i=1}^4 \left(w_i \hat{N}_{i1}^{(b,9)} + \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \hat{N}_{i2}^{(b,9)} + \frac{\partial w}{\partial \eta_i} \hat{N}_{i3}^{(b,9)} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_i^2} \hat{N}_{i4}^{(b,9)} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_i^2} \hat{N}_{i5}^{(b,9)} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta_i} \hat{N}_{i6}^{(b,9)} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta_i} \hat{N}_{i7}^{(b,9)} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta_i} \hat{N}_{i8}^{(b,9)} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta_i^2} \hat{N}_{i9}^{(b,9)} \right) \quad (3.24)$$

$\hat{N}_{ij}^{(b,9)}$ は 1 変数 Hermite 多項式 $H^{(5)}(\xi)$, $H^{(5)}(\eta)$ の積である補間関数であり, 次式のような関係である.

$$\hat{N}_{i1}^{(b,9)} = H_k^{(5)}(\xi) H_l^{(5)}(\eta) \quad (3.25a)$$

$$\hat{N}_{i2}^{(b,9)} = H_{k+1}^{(5)}(\xi) H_l^{(5)}(\eta) \quad (3.25b)$$

$$\hat{N}_{i3}^{(b,9)} = H_k^{(5)}(\xi) H_{l+1}^{(5)}(\eta) \quad (3.25c)$$

$$\hat{N}_{i4}^{(b,9)} = H_{k+2}^{(5)}(\xi) H_l^{(5)}(\eta) \quad (3.25d)$$

$$\hat{N}_{i5}^{(b,9)} = H_k^{(5)}(\xi) H_{l+2}^{(5)}(\eta) \quad (3.25e)$$

$$\hat{N}_{i6}^{(b,9)} = H_{k+1}^{(5)}(\xi) H_{l+1}^{(5)}(\eta) \quad (3.25f)$$

$$\hat{N}_{i7}^{(b,9)} = H_{k+2}^{(5)}(\xi) H_{l+1}^{(5)}(\eta) \quad (3.25g)$$

$$\hat{N}_{i8}^{(b,9)} = H_{k+1}^{(5)}(\xi) H_{l+2}^{(5)}(\eta) \quad (3.25h)$$

$$\hat{N}_{i9}^{(b,9)} = H_{k+2}^{(5)}(\xi) H_{l+2}^{(5)}(\eta) \quad (3.25i)$$

$$\{i, k, l\} = (1, 1, 1), (2, 4, 1), (3, 4, 4), (4, 1, 4)$$

$H_i^{(5)}$ は次のような条件を満たす.

$$H_{3i-2}^{(5)}(\xi_i) = \delta_{ij} \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial H_{3i-1}^{(5)}(\xi_j)}{\partial \xi} = \delta_{ij} \quad (3.26b)$$

$$\frac{\partial^2 H_{3i}^{(5)}(\xi_j)}{\partial \xi^2} = \delta_{ij} \quad (3.26c)$$

$H_i^{(5)}(\xi)$ は式 (3.27) のように与えられる.

$$H_1^{(5)} = -\frac{1}{16}(\xi - 1)^3(3\xi^2 + 9\xi + 8) \quad (3.27a)$$

$$H_2^{(5)} = \frac{1}{16}(\xi - 1)^3(\xi + 1)(3\xi + 5) \quad (3.27b)$$

$$H_3^{(5)} = -\frac{1}{16}(\xi - 1)^3(\xi + 1)^2 \quad (3.27c)$$

$$H_4^{(5)} = \frac{1}{16}(\xi + 1)^3(3\xi^2 - 9\xi + 8) \quad (3.27d)$$

$$H_5^{(5)} = -\frac{1}{16}(\xi + 1)^3(\xi - 1)(3\xi - 5) \quad (3.27e)$$

$$H_6^{(5)} = \frac{1}{16}(\xi + 1)^3(\xi - 1)^2 \quad (3.27f)$$

この定式化は Beheshti [8] の P6 要素の定式化とよく似ているが, 式 (3.25g), (3.25h), (3.25i) が追加されていることに注意されたい.

ここで式 (3.11) の変換を考えると, 物理空間 Ω_e における変位の近似は以下のように表される.

$$w_e = \sum_{i=1}^4 \left(w_i N_{i1}^{(b,9)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} N_{i2}^{(b,9)} + \frac{\partial w}{\partial y_i} N_{i3}^{(b,9)} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2_i} N_{i4}^{(b,9)} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2_i} N_{i5}^{(b,9)} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_i} N_{i6}^{(b,9)} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y_i} N_{i7}^{(b,9)} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y_i} N_{i8}^{(b,9)} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2_i} N_{i9}^{(b,9)} \right) \quad (3.28)$$

$N_{ij}^{(b,9)}$ は物理空間 Ω_e における補間関数である. $\hat{N}_{ij}^{(b,9)}$ と $N_{ij}^{(b,9)}$ の関係は次式のように書くことができる.

$$\mathbf{N}_i^{(b,9)} = \mathbf{A}_i^{(b,9)} \hat{\mathbf{N}}_i^{(b,9)} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{N}_i^{(b,9)} = \begin{bmatrix} N_{i1}^{(b,9)\text{T}} & N_{i2}^{(b,9)\text{T}} & N_{i3}^{(b,9)\text{T}} & N_{i4}^{(b,9)\text{T}} & N_{i5}^{(b,9)\text{T}} & N_{i6}^{(b,9)\text{T}} & N_{i7}^{(b,9)\text{T}} & N_{i8}^{(b,9)\text{T}} & N_{i9}^{(b,9)\text{T}} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{N}}_i^{(b,9)} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{i1}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i2}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i3}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i4}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i5}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i6}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i7}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i8}^{(b,9)\text{T}} & \hat{N}_{i9}^{(b,9)\text{T}} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_i^{(b,9)}$ は付録 C を参照されたい. 式 (3.1), (3.13) より $\mathbf{N}^{(b,9)}$ と $\mathbf{N}_i^{(b,9)}$ の関係は以下のように表される.

$$\mathbf{N}^{(b,9)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^{(b,9)\text{T}} & \mathbf{N}_2^{(b,9)\text{T}} & \mathbf{N}_3^{(b,9)\text{T}} & \mathbf{N}_4^{(b,9)\text{T}} \end{bmatrix}^{\text{T}} \quad (3.30)$$

式 (3.29), (3.30) より

$$\mathbf{N}^{(b,9)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(b,9)} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{(b,9)} & & \\ & & \mathbf{A}_3^{(b,9)} & \\ & & & \mathbf{A}_4^{(b,9)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_1^{(b,9)} \\ \hat{\mathbf{N}}_2^{(b,9)} \\ \hat{\mathbf{N}}_3^{(b,9)} \\ \hat{\mathbf{N}}_4^{(b,9)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

式 (3.22) を式 (3.11) に代入すると \mathbf{B}_L の要素が求まる.

第4章 数値シミュレーション

この章では本研究で導出した要素の性能を確かめる為に MATLAB 上で数値シミュレーションを行った。 $w = w_b$ の薄板の場合に関しては Beheshti [8] の結果と比較を行うために円板および正方形板の面外曲げ問題を扱った。 $w = w_b + \alpha \nabla^2 w_b$ の厚板 (FSDT) も同様に正方形板に関するテストを行った。 数値シミュレーションを通じてヤング率 $E = 200 \text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ という値を使用している。

4.1 薄い円板

この節では半径 $r = 0.4 \text{ m}$, 厚さ $t = 0.01 \text{ m}$ の薄い円板の面外変形問題を扱う。 円板の要素分割の例を図 4.1 に示す。 また, 円板の曲げ試験を行った際の変形概要を図 4.2 および図 4.3 に示す。

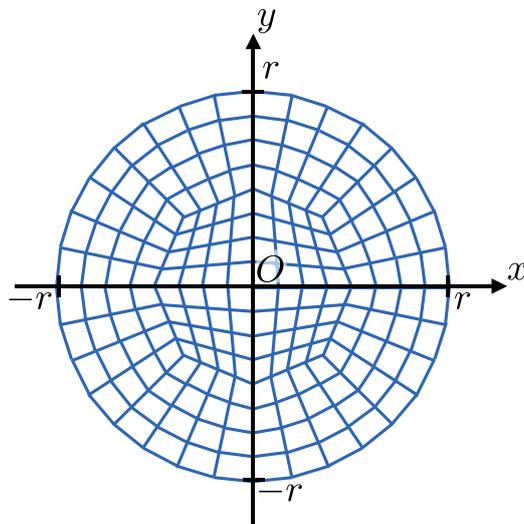
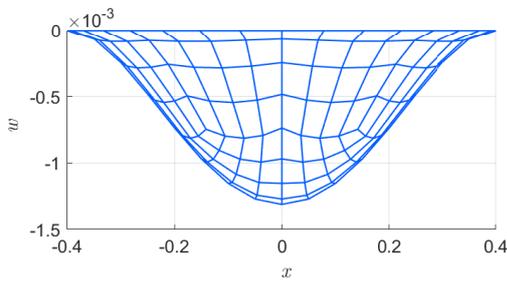
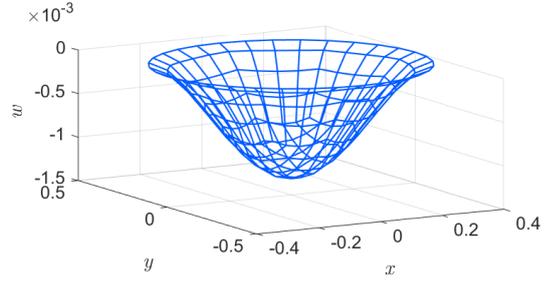


図 4.1: 円板のメッシュ分割例

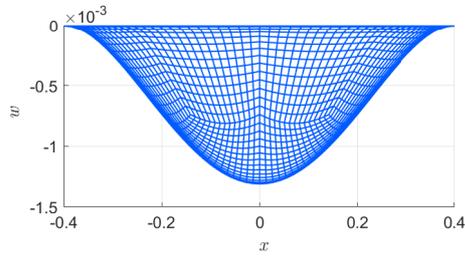


(a) y 軸方向

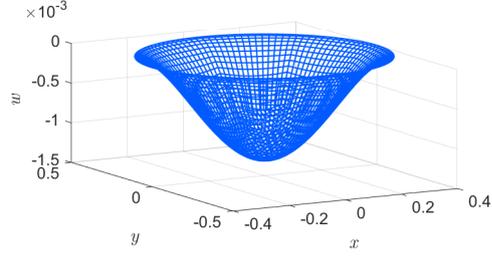


(b) 俯瞰

図 4.2: 円板を粗くメッシュ分割した際の変形図



(a) y 軸方向



(b) 俯瞰

図 4.3: 円板を細かくメッシュ分割した際の変形図

4.1.1 面外方向に等分布荷重を受ける固定された円板

この小節では円周が固定され等分布荷重を受ける円板の面外変形を考える．この円板は円周上で次式で表される境界条件 [35] を満たす．

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4.1a)$$

$$\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1b)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1c)$$

α は円の接線と x 軸のなす角であり，等分布荷重 q は $q = 0.06$ MPa に設定した．円板の中心におけるたわみの解析解 w_c は次のように計算できる [36]．

$$w_c = \frac{qr^4}{64D} = 1.3104 \text{ mm} \quad (4.2)$$

変形の様子を図 4.1 に示す．また，曲げ試験の結果を表 1 に示す．導出を行った P4, P9 要素はどちらも優秀な結果を与えている．要素形状が歪んでおり，基底関数に $H_i^{(3)}(\xi)$ を用いた場

表 4.1: Comparison of Central displacement of a clamped circular plate subjected to a uniform loading

Num. Elem.	P9		P6 [8]		P4		P3 [8]	
	disp. [mm]	error [%]						
$4 \times 3 \times 4 \times 4$	1.3131	0.20	1.3222	0.91	1.3486	2.92	1.2550	-4.23
$4 \times 3 \times 8 \times 8$	1.3120	0.12	1.3135	0.23	1.3216	0.85	1.2626	-3.65
$4 \times 3 \times 10 \times 10$	1.3121	0.13	1.3123	0.15	1.3180	0.58	1.2630	-3.62
$4 \times 3 \times 12 \times 12$	1.3116	0.09	1.3117	0.10	1.3159	0.42	1.2630	-3.61
$4 \times 3 \times 14 \times 14$	1.3113	0.07	1.3113	0.07	1.3146	0.32	1.2629	-3.62

表 4.2: Comparison of Central displacement of a simply supported circular plate subjected to a uniform loading

Num. Elem.	P9		P6 [8]		P4		P3 [8]	
	disp. [mm]	error [%]						
$4 \times 3 \times 4 \times 4$	1.1352	2.00	1.1255	1.12	1.1332	1.82	1.0943	-1.68
$4 \times 3 \times 8 \times 8$	1.1220	0.81	1.1176	0.41	1.1214	0.75	1.0774	-3.20
$4 \times 3 \times 10 \times 10$	1.1199	0.62	1.1164	0.30	1.1194	0.58	1.0745	-3.46
$4 \times 3 \times 12 \times 12$	1.1185	0.50	1.1157	0.24	1.1182	0.47	1.0725	-3.64
$4 \times 3 \times 14 \times 14$	1.1177	0.42	1.1152	0.20	1.1174	0.39	1.0712	-3.76

合, 適合要素である P4 要素は非適合要素 P3 より明らかに良い近似結果を示している。

4.1.2 面外方向に等分布荷重を受ける単純支持された円板

ここでは円周が単純支持され等分布荷重を受ける円板の面外変形を考える。この円板は円周上で式 (4.3) で表される境界条件 [35] を満たす。

$$w = \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4.3b)$$

等分布荷重 q は $q = 0.0125$ MPa である。この境界条件の場合, 円板の中心におけるたわみの解析解 w_c は次のように計算できる [36]。

$$w_c = \frac{qr^4(5 + \nu)}{64D(1 + \nu)} = 1.1130 \text{ mm} \quad (4.4)$$

結果を表 4.2 に示す。この条件下でも P4 要素, P9 要素は正確な近似解を提供していることを確認することができる。また 4.1.1 と同様に $H_i^{(3)}(\xi)$ を基底関数として用いた場合は適合要素が非適合要素よりも明確に良好な結果を示している。

表 4.3: Comparison of Central displacement of a simply supported circular plate subjected to a central point loading

Num. Elem.	P9		P6 [8]		P4		P3 [8]	
	disp. [mm]	error [%]						
4 × 3 × 4 × 4	1.2545	1.55	1.2466	0.91	1.2525	1.39	1.1947	-3.28
4 × 3 × 8 × 8	1.2432	0.64	1.2395	0.34	1.2425	0.58	1.1806	-4.43
4 × 3 × 10 × 10	1.2414	0.49	1.2384	0.25	1.2408	0.45	1.1780	-4.64
4 × 3 × 12 × 12	1.2403	0.40	1.2378	0.20	1.2398	0.36	1.1763	-4.78
4 × 3 × 14 × 14	1.2395	0.34	1.2373	0.16	1.2391	0.31	1.1751	-4.87

表 4.4: Comparison of Central displacement of a clamped square plate subjected to a uniform loading

Num. Elem.	P9		P6 [8]		P4		P3 [8]	
	disp. [mm]	error [%]						
4 × 4	1.7686	0.42	1.7570	-0.24	1.7680	0.39	1.6932	-3.86
8 × 8	1.7686	0.42	1.7670	0.27	1.7685	0.41	1.7144	-2.65
12 × 12	1.7686	0.42	1.7675	0.36	1.7686	0.42	1.7224	-2.20
16 × 16	1.7686	0.42	1.7680	0.39	1.7686	0.42	1.7254	-2.03
20 × 20	1.7686	0.42	1.7682	0.40	1.7686	0.42	1.7268	-1.95

4.1.3 面外方向に集中荷重を受ける単純支持された円板

この小節では円周が単純支持され中心に点荷重を受ける円板の曲げ試験を行っている。この円板は 4.1.2 と同様に、円周上において式 (4.3) で表される境界条件を満たす。集中荷重 p は $p = 2.8 \text{ kN}$ にした。円板の中心におけるたわみは式 (4.5) により計算される [36]。

$$w_c = \frac{pr^2(3 + \nu)}{16\pi D(1 + \nu)} = 1.2353 \text{ mm} \quad (4.5)$$

曲げ試験の結果を表 4.3 に示す。P4, P9 要素は点荷重に対しても正確に計算できることが見て取れる。

4.2 薄い正方形板

この節では辺長 $L = 0.4 \text{ m}$, 厚さ $t = 0.01 \text{ m}$ である正方形の板を扱う。メッシュ分割の例を図 4.4 に示す。また、正方形板の曲げ試験を行った際の変形の例を図 4.5 および図 4.6 に示す。

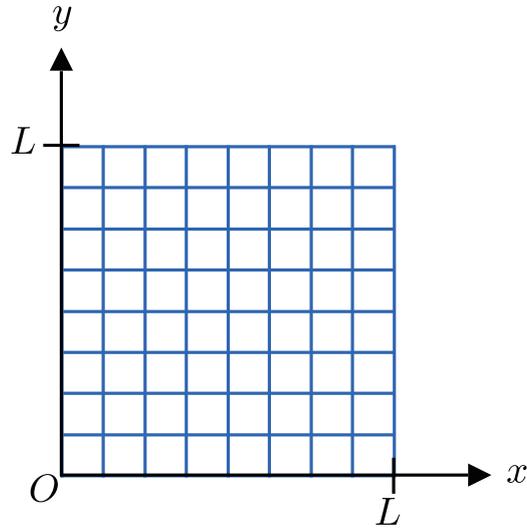


図 4.4: 正方形板のメッシュ分割例

4.2.1 面外方向に等分布荷重を受ける固定された正方形板

この小節では全ての辺が固定され、等分布荷重を受ける正方形板の面外変形を考える。境界条件は次式のように表される。

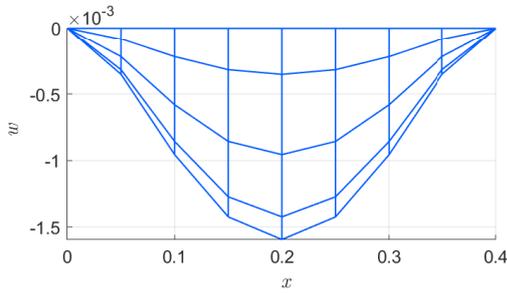
$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \Big|_{x=0,L} \quad (4.6a)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \Big|_{y=0,L} \quad (4.6b)$$

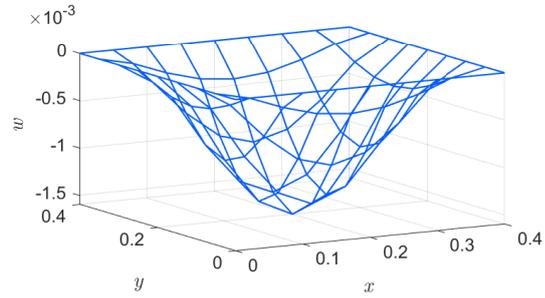
等分布荷重 q は $q = 1$ MPa に設定した。正方形板の中心におけるたわみの解析解 w_c は次式で表される。

$$w_c = 0.00126 \frac{qL^4}{D} = 1.7612 \text{ mm} \quad (4.7)$$

曲げ試験の結果は表 4.4 に示されている。本研究で導出した P4, P9 要素は解析解とよく一致し、収束も早いことが分かる。 $H_i^{(3)}(\xi)$ を変位の補間に採用している P3 要素と P4 要素を比較すると、適合要素である P4 要素の方が精度、収束の面において優れていることが確認できる。一方、 $H_i^{(5)}(\xi)$ を用いて変位を近似する P6, P9 要素では収束性については P9 要素の方が優れているが、精度については本研究で考慮した分割数の範囲では P6 要素の方が良い結果を示している。

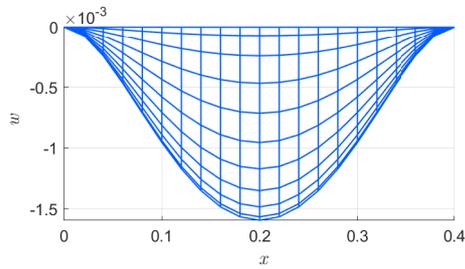


(a) y 軸方向

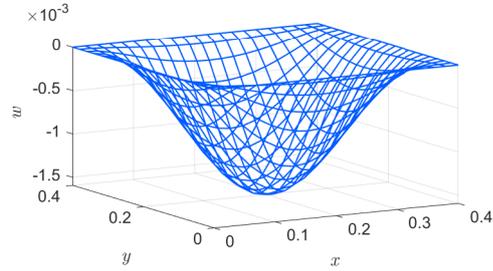


(b) 俯瞰

図 4.5: 正方形板を粗くメッシュ分割した際の変形図



(a) y 軸方向



(b) 俯瞰

図 4.6: 正方形板を細かくメッシュ分割した際の変形図

4.2.2 面外方向に等分布荷重を受ける単純支持された正方形板

ここでは全ての辺が単純支持され、等分布荷重を受ける正方形板の面外曲げ問題を扱っている。境界条件は式 (4.8) のように表される。

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \Big|_{x=0,L} \quad (4.8a)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \Big|_{y=0,L} \quad (4.8b)$$

等分布荷重 q は $q = 0.2 \text{ MPa}$ である。板のたわみの中心の解析解 w_c は次式で求められる [36]。

$$w_c = 0.00406 \frac{qL^4}{D} = 1.1350 \text{ mm} \quad (4.9)$$

曲げ試験の結果を表 4.5 に示す。P4 要素、P9 要素はこの境界条件下でも優れた近似解を提供している。 $H_i^{(3)}(\xi)$ を変位の補間に採用している P3 要素と P4 要素、 $H_i^{(5)}(\xi)$ を用いて変位を近似する P6 要素と P9 要素をそれぞれ比較すると、4.1.2 と同様な結果を示している。

表 4.5: Comparison of Central displacement of a simply supported square plate subjected to a uniform loading

	P9		P6 [8]		P4		P3 [8]	
	Num. Elem.	disp. [mm] error [%]						
4 × 4	1.1352	0.02	1.1334	-0.14	1.1356	0.13	1.0637	-6.28
8 × 8	1.1356	0.05	1.1350	0.00	1.1357	0.06	1.0776	-5.06
12 × 12	1.1356	0.06	1.1353	0.03	1.1356	0.06	1.0802	-4.83
16 × 16	1.1356	0.06	1.1355	0.04	1.1356	0.06	1.0811	-4.75
20 × 20	1.1356	0.06	1.1355	0.05	1.1356	0.06	1.0815	-4.71

表 4.6: Comparison of Central displacement of a simply supported square plate subjected to a central point loading

	P9		P6 [8]		P4		P3 [8]	
	Num. Elem.	disp. [mm] error [%]						
4 × 4	1.0121	-0.13	1.0075	-0.57	1.0021	-1.11	0.9424	-7.01
8 × 8	1.0131	-0.02	1.0118	-0.16	1.0106	-0.27	0.9618	-5.09
12 × 12	1.0133	-0.01	1.0127	-0.07	1.0122	-0.12	0.9658	-4.70
16 × 16	1.0134	-0.00	1.0130	-0.04	1.0127	-0.06	0.9673	-4.55
20 × 20	1.0134	0.00	1.0131	-0.02	1.0130	-0.04	0.9680	-4.48

4.2.3 面外方向に集中荷重を受ける単純支持された正方形板

この小節では全ての辺が単純支持され中心に点荷重を受ける正方形板の曲げ試験を行っている。この正方形板は 4.2.2 と同様に、式 (4.8) で表される境界条件を満たす。集中荷重 p は $p = 10 \text{ kN}$ にした。正方形板の中心におけるたわみは式 (4.10) により計算される [36]。

$$w_c = 0.01160 \frac{pL^2}{D} = 1.0134 \text{ mm} \quad (4.10)$$

結果は表 4.6 に示されている。表 4.6 から点荷重に対しても P4, P9 要素は正確に近似を行っていることが確認できる。P3 要素と P4 要素を比較すると、P3 要素は解析解に対して約 5% の相対誤差を含んでいるが、P4 要素の誤差はその 1/100 以下である。P6 要素と P9 要素はどちらも良い精度を示しているが、P9 要素は P6 要素に比べて収束が若干早い。

4.2.4 辺長比が大きな板要素で構成された正方形板

要素形状のいびつさが強い場合について各要素の性能を検証した。境界条件および荷重条件は 4.2.1 と同様であり、板の中心におけるたわみの解析解 w_c は式 (4.7) で計算される。 x 方

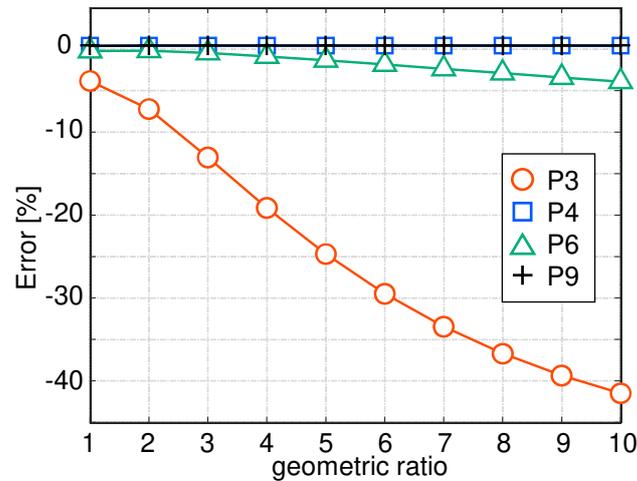


図 4.7: 辺長比-相対誤差関係図

向の要素分割数を 4 で固定し， y 方向の要素分割数を増やすことで要素の辺長比を変化させた．図 4.7 に要素の辺長比と各要素で計算される板の中心のたわみの解析解との相対誤差の関係を示す．このグラフから適合要素と非適合要素の間に明確な差があることが読み取れる．まず，P3 要素の解析解との相対誤差の大きさは辺長比が大きくなるほど増加し，最終的に辺長比が 10 に達したとき，42%もの誤差を生んでいる．P6 要素も P3 要素程ではないが，辺長比が大きくなるにつれ誤差が増大している．それと比較して，適合要素である P4 要素と P9 要素は辺長比が大きくなっても誤差が非常に小さい．これらの結果から P4,P9 要素は橋梁の床版などの非常に長大な構造物のモデル化に活用することができると思われる．

4.3 厚い正方形板

この節ではせん断変形を考慮する必要のある比較的厚い板について扱う．4.1 および 4.2 では CPT に基づいたモデルを使用していたため $w = w_b$ であったが，ここでは FSDT に基づいたモデルを扱うため $w = w_b + \alpha \nabla^2 w_b$ となる．板のメッシュ分割や辺の長さは 4.2 と同じである．

4.3.1 面外方向に等分布荷重を受ける固定された正方形板

ここではせん断変形を考慮した場合に，4.2.1 と同様に全ての辺を固定した板に等分布荷重を加えた場合の挙動を調べている．せん断変形を考慮のため， z 方向の変位 w は $w = w_b + \alpha \nabla^2 w_b$

となるから境界条件を次式のように与える.

$$w = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} = 0|_{x=0,L} \quad (4.11a)$$

$$w = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} = 0|_{y=0,L} \quad (4.11b)$$

異なる板厚に対して P6 要素 [8], P9 要素を使用して計算された正方形板中心のたわみと厳密解 [37] を比較した結果を表 4.7(a) に示す. 表 4.7 において数値解と厳密解の比較は無次元たわみ \bar{w} によって行う. \bar{w} は次のように計算される.

$$\bar{w} = w / \frac{qL^4}{100D} \quad (4.12)$$

表 4.7(a) を見ると, P6 要素と P9 要素はどちらもどんな板厚に対しても優れた精度を示している. 特にせん断変形を考慮しているのにも関わらず, 板厚がとても小さい場合でも精度を保っていることからせん断ロッキングが発生していないことが確認できる.

4.3.2 面外方向に等分布荷重を受ける単純支持された正方形板

この小節ではせん断変形を考慮した場合, 4.2.2 と同様に四辺が単純支持された正方形板に等分布荷重を加えた場合の挙動を調べている. 境界条件は次式のように与える.

$$w = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} = 0|_{x=0,L} \quad (4.13a)$$

$$w = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} = 0|_{y=0,L} \quad (4.13b)$$

結果を表 4.7(b) に示す. このケースでもせん断ロッキングは発生していない. また, P6 要素, P9 要素の提供する近似解は厳密解とよく一致している.

表 4.7: Comparison of Central displacement of thick square plate subjected to a uniform loading

L/t	(a) 固定			(b) 単純支持		
	P9	P6	exact [37]	P9	P6	exact [37]
10	0.1496	0.1491	0.1499	0.4261	0.4257	0.4273
10^2	0.1268	0.1267	0.1267	0.4064	0.4064	0.4064
10^3	0.1265	0.1265	0.1265	0.4062	0.4062	0.4062
10^4	0.1265	0.1265	0.1265	0.4062	0.4062	0.4062
10^5	0.1265	0.1265	0.1265	0.4062	0.4062	0.4062

第5章 結論

本研究では補間に Hermite 多項式を明示的に用いた 2 つの四辺形適合板要素, P4 要素, P9 要素を開発した. 開発した P4 要素, P9 要素の性能を検証するために MATLAB 上で数値シミュレーションを行った. 本研究では Hermite 型四辺形適合要素により, CPT および FSDT に基づく板の力学的挙動の分析を行おうとしたため, 計算コスト削減の観点から板のたわみの支配方程式は GTVPT に基づいて導出された. 数値シミュレーションの結果から P4 要素, P9 要素はせん断変形を無視した CPT モデルの解析において優れた性能を示すことが確認された. また, 要素形状の歪みや極端な辺長比にたいしても頑健性があることが証明された. せん断変形を考慮する FSDT モデルについて, P4 要素, P9 要素は板厚の大小に関わらず正確な近似結果を提供していることからロッキングを起こさない要素であることが判明している. これらの結果は, 本研究で開発した P4 要素と P9 要素がせん断変形を考慮するかどうかや要素形状にかかわらず, ロバストな近似を提供することを確認するものである.

謝辞

大学4年から修士2年までの3年間にわたって研究全般において多大な指導を頂いた主指導教官の山本亨輔先生に深謝いたします。また、副指導教官の松島巨志先生にはゼミにおいて様々な意見を頂き、副指導教官の庄司学先生には研究計画の確認や修学に関する助言を頂いたことに感謝の意を表します。そして、日頃ともに研究を行ったフロンティア工学研究グループの皆さんと生活を支えてくださった家族に心からのお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] Ray W. Clough and James L. Tocher. Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending. In *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Vol. 42, pp. 515–545, Ohio, 1965.
- [2] J. H. Argyris, I. Fried, and D. W. Scharpf. The tuba family of plate elements for the matrix displacement method. *The Aeronautical Journal*, Vol. 72, No. 692, p. 701 – 709, 1968.
- [3] Jean-Louis Batoz and Mabrouk Ben Tahar. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, No. 11, pp. 1655–1677, 1982.
- [4] J. L. Batoz, K. J. Bathe, and L. W. Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 1771–1812, 1980.
- [5] Robert J Melosh. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 7, pp. 1631–1637, 1963.
- [6] F. K. Bogner, R. L. Fox, and L. A. Schmit. The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae. In *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Airforce Inst. Of Tech.* Wright Patterson AF Base, Ohio, 1965.
- [7] Olek C Zienkiewicz and Robert L Taylor. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier, 2005.
- [8] Alireza Beheshti. Novel quadrilateral elements based on explicit hermite polynomials for bending of kirchhoff–love plates. *Computational Mechanics*, Vol. 62, pp. 1199–1211, 2018.
- [9] Alireza Beheshti. A finite element formulation for kirchhoff plates in strain-gradient elasticity. *European Journal of Computational Mechanics*, pp. 123–146, 2019.
- [10] M Bacciocchi, N Fantuzzi, and AJM Ferreira. Conforming and nonconforming laminated finite element kirchhoff nanoplates in bending using strain gradient theory. *Computers & Structures*, Vol. 239, p. 106322, 2020.

- [11] Michele Bacciocchi and Nicholas Fantuzzi. On the mapping procedure based on higher-order hermite polynomials for laminated thin plates with arbitrary domains in gradient elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2023.
- [12] M Bacciocchi, N Fantuzzi, and AJM Ferreira. Static finite element analysis of thin laminated strain gradient nanoplates in hygro-thermal environment. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 33, pp. 969–992, 2021.
- [13] S Eisenträger, J Kiendl, Georgios Michaloudis, Robert Duy, and Y Vetyukov. Stability analysis of plates using cut bogner-fox-schmit elements. *Computers & Structures*, Vol. 270, p. 106854, 2022.
- [14] Eric Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. 1945.
- [15] RD0044 Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. 1951.
- [16] Alexander Tessler and Thomas JR Hughes. An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 39, No. 3, pp. 311–335, 1983.
- [17] Thomas JR Hughes and TEi Tezduyar. Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. 1981.
- [18] Klaus-Jürgen Bathe and Eduardo N Dvorkin. A four-node plate bending element based on mindlin/reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 2, pp. 367–383, 1985.
- [19] Klaus-Jürgen Bathe and Eduardo N Dvorkin. A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 22, No. 3, pp. 697–722, 1986.
- [20] OC Zienkiewicz, RL Taylor, and JM0253 Too. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, No. 2, pp. 275–290, 1971.
- [21] Thomas JR Hughes, Martin Cohen, and Medhat Haroun. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and design*, Vol. 46, No. 1, pp. 203–222, 1978.
- [22] JN Reddy and CF0559 Liu. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International journal of engineering science*, Vol. 23, No. 3, pp. 319–330, 1985.

- [23] Metin Aydogdu. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, Vol. 89, No. 1, pp. 94–101, 2009.
- [24] H Nguyen-Xuan, Chien H Thai, and T Nguyen-Thoi. Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 558–574, 2013.
- [25] Hoang X Nguyen, Tuan N Nguyen, Magd Abdel-Wahab, Stéphane PA Bordas, Hung Nguyen-Xuan, and Thuc P Vo. A refined quasi-3d isogeometric analysis for functionally graded microplates based on the modified couple stress theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 313, pp. 904–940, 2017.
- [26] M Touratier. An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, Vol. 29, No. 8, pp. 901–916, 1991.
- [27] NR Senthilnathan, SP Lim, KH Lee, and ST Chow. Buckling of shear-deformable plates. *AIAA journal*, Vol. 25, No. 9, pp. 1268–1271, 1987.
- [28] Rameshchandra P Shimpi. Refined plate theory and its variants. *AIAA journal*, Vol. 40, No. 1, pp. 137–146, 2002.
- [29] Huu-Tai Thai and Dong-Ho Choi. Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18-19, pp. 8310–8323, 2013.
- [30] Huu-Tai Thai, Minwo Park, and Dong-Ho Choi. A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 73, pp. 40–52, 2013.
- [31] M Endo and N Kimura. An alternative formulation of the boundary value problem for the timoshenko beam and mindlin plate. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 1-2, pp. 355–373, 2007.
- [32] Ivo Senjanović, Nikola Vladimir, and Marko Tomić. An advanced theory of moderately thick plate vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 7, pp. 1868–1880, 2013.
- [33] Tuan N Nguyen, Tuan D Ngo, and H Nguyen-Xuan. A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and isogeometric implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 326, pp. 376–401, 2017.
- [34] Thomas JR Hughes, John A Cottrell, and Yuri Bazilevs. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 194, No. 39-41, pp. 4135–4195, 2005.

- [35] MW Chernuka, GR Cowper, Garry M Lindberg, and Mervyn D Olson. Finite element analysis of plates with curved edges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 49–65, 1972.
- [36] Stephen Timoshenko, Sergius Woinowsky-Krieger, et al. *Theory of plates and shells*, Vol. 2. McGraw-hill, New York, 1959.
- [37] Olgierd C Zienkiewicz, Zhongnian Xu, Ling Fu Zeng, Alf Samuelsson, and Nils-Erik Wiberg. Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements: Part i—a simple quadrilateral. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 18, pp. 3043–3056, 1993.

付録A 仮想仕事

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \left(N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right) \right\} d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \right) \delta v_0 \right\} d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Gamma} \{ (N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u_0 + (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v_0 \} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{A.1a}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Gamma} \left\{ n_x \left(M_{xx} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) + n_y \left(M_{xy} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right) \right\} d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) \delta w_b d\Omega \\
 & \quad - \int_{\Gamma} \left\{ \left(n_x \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + n_y \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \right) \delta w_b \right. \\
 & \quad \left. - (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} - (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \frac{\partial \delta w_b}{\partial y} \right\} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{A.1b}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(Q_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial \nabla^2 \delta w_b}{\partial x} + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \frac{\partial \nabla^2 \delta w_b}{\partial y} \right\} d\Omega \\
 &= -\alpha \int_{\Omega} \nabla^2 \delta w_b \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) d\Omega \\
 & \quad + \alpha \int_{\Gamma} \left\{ n_x \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + n_y \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \right\} \nabla^2 \delta w_b d\Gamma
 \end{aligned} \tag{A.1c}$$

付録B 弱形式化

$$\int_{\Omega} \omega_1 R_1 d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} N_{xy} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \omega_1 (n_x N_{xx} + n_y N_{xy}) d\Gamma \quad (\text{B.1a})$$

$$\int_{\Omega} \omega_2 R_2 d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} N_{yy} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \omega_2 (n_x N_{xy} + n_y N_{yy}) d\Gamma \quad (\text{B.1b})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_3 R_3 d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} M_{xx} + 2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} M_{xy} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} M_{yy} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \omega_3 q(x, y) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \omega_3 \left\{ n_x \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + n_y \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \right\} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \left\{ n_x \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} M_{xy} \right) + n_y \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial y} M_{xy} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} M_{yy} \right) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.1c})$$

式 (3.5) より

$$\begin{aligned} &\omega_1^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^{(m)} R_1 d\Omega \\ &= -\omega_1^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} N_{xy} \right) d\Omega + \omega_1^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{(m)} (n_x N_{xx} + n_y N_{xy}) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.2a})$$

$$\begin{aligned} &\omega_2^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^{(m)} R_2 d\Omega \\ &= -\omega_2^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial \mathbf{N}^{(m)}}{\partial y} N_{yy} \right) d\Omega + \omega_2^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{(m)} (n_x N_{xy} + n_y N_{yy}) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.2b})$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \omega_3^T \mathbf{N}^{(b)} R_3 d\Omega \\ &= \omega_3^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x^2} M_{xx} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x \partial y} M_{xy} + \frac{\partial^2 \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y^2} M_{yy} \right) d\Omega + \omega_3^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^{(b)} q(x, y) d\Omega \\ &+ \omega_3^T \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{N}^{(b)} \left(n_x \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + n_y \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ &\left. - \left(n_x \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y} M_{xy} \right) + n_y \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{(b)}}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \mathbf{N}^{(b)}}{\partial y} M_{yy} \right) \right) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.2c})$$

付録C P9要素の変換マトリクス

$$\mathbf{A}_i^{(b,9)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi_i} & \frac{\partial x}{\partial \eta_i} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2_i} & \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2_i} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta_i} & \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^2 \partial \eta_i} \\
 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi_i} & \frac{\partial y}{\partial \eta_i} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2_i} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2_i} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta_i} & \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^2 \partial \eta_i} \\
 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_i^2 & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_i^2 & \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta_i} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \\
 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_i^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_i^2 & \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \\
 0 & 0 & 0 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} & \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} + \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta_i} + \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta_i} \right) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\right)^2 \frac{\partial y}{\partial \eta_i} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\right)^2 \frac{\partial x}{\partial \eta_i} + 2 \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}
 0 \\
 \frac{\partial^3 y}{\partial \xi \partial \eta^2_i} \\
 \frac{\partial^3 y}{\partial \xi \partial \eta^2_i} \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2_i} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \\
 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2_i} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta_i} + \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta_i} \right) \\
 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_i}\right)^2 \frac{\partial y}{\partial \xi_i} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \\
 \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_i}\right)^2 \frac{\partial x}{\partial \xi_i} + 2 \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \eta_i} \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \\ \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \\ 2\left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^2 \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 x}{\partial \xi \partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \\ 2\left(\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^2 \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 y}{\partial \xi \partial \eta^2} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ 2\left(\frac{\partial^3 x}{\partial \xi^2 \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^2 \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 x}{\partial \xi \partial \eta^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 y}{\partial \xi \partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\ 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 4 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + 4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + 4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + 4 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + 4 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$