一般化三変数板理論に基づいた高階Hermite適合要素の開発

Development of higher-order Hermite conforming elements based on generalised three-variable theory

システム情報工学研究群 構造エネルギー工学学位プログラム
主指導教官：**山本亨輔准教授**
副指導教官：**松島亘志教授, 庄司学教授**

酒井　真清

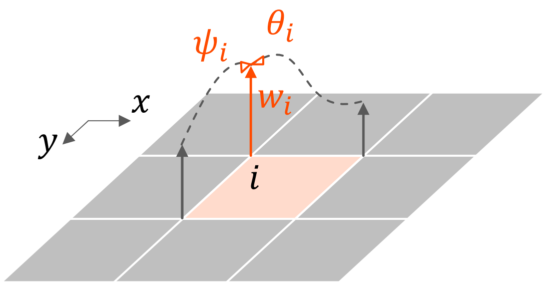
本研究は以下の投稿中の論文の内容を含む
Masaki Sakai and Kyosuke Yamamoto, “Derivation of Hermite family conforming quadrilateral elements and application to Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin plates”, Computational Mechanics

本研究の一部内容は下記として公表済みである
Masaki Sakai and Kyosuke Yamamoto, “Explicitly Hermitian Quadrilateral elements with completeness for bending Kirchhoff-Love plates”, Student Session Proceedings of The 42nd JSST Annual International Conference on Simulation Technology, Niigata, Aug, 2023, pp.50-53

研究背景

梁や板の
曲げ問題など

有限要素法で高階偏微分方程式を解く時, Hermite族要素を用いる



$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{4} w_i N_i(x,y)+\sum_{i=1}^{4} \theta_i G_i(x,y)+\sum_{i=1}^{4} \psi_i H_i(x,y)$$

$$\theta(x,y)=\frac{\partial w}{\partial x}=\sum_{i=1}^{4} w_i \frac{\partial N_i}{\partial x}+\sum_{i=1}^{4} \theta_i \frac{\partial G_i}{\partial x}+\sum_{i=1}^{4} \psi_i \frac{\partial H_i}{\partial x}$$

$$\psi(x,y)=\frac{\partial w}{\partial y}=\sum_{i=1}^{4} w_i \frac{\partial N_i}{\partial y}+\sum_{i=1}^{4} \theta_i \frac{\partial G_i}{\partial y}+\sum_{i=1}^{4} \psi_i \frac{\partial H_i}{\partial y}$$

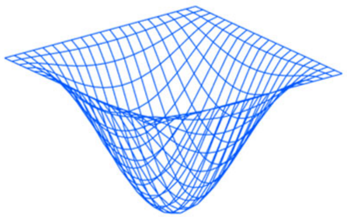
有限要素法｜FEM(finite element method)･･･一般性の高い偏微分方程式の数値解法。本研究では, 重み付き残差法(WRM)により, 有限要素式を導出
Hermite族要素は, Hermite補間関数を基底とする有限要素。2次元問題の場合, 1次元補間関数の組み合わせで2次元Hermite補間関数を作成する。

本研究での取り組み

2次元高階Hermite族適合有限要素の正規座標変換を実装

2次元空間における**高階偏微分方程式**を解く時に**四角形要素の形が自由**になった！

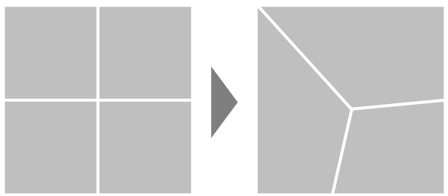
Hermite族要素は高階偏微分方程式を解くのに有効



板の曲げ問題
（4階偏微分）

$$D\nabla^4 w + q = 0$$

自由形状を正規座標変換が可能に，適合要素で精度維持



適合要素
×
正規座標

梁のつり合い式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q$$

荷重

たわみ

曲げ板のつり合い式

$$D\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) w + q = 0$$

面外荷重

たわみ

3

本研究の位置付け(先行研究および本研究の新規性)

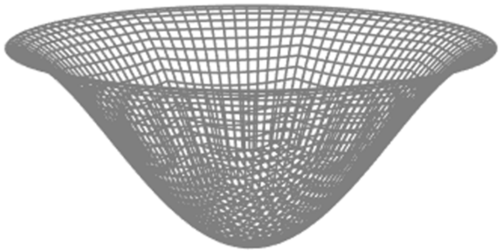
2次元高階Hermite族適合有限要素の正規座標変換を実装

2次元高階Hermite族適合要素(Bogner, 1965)
(高階適合要素は作ったが，正規座標変換をしていない)

2次元高階Hermite族要素の正規座標変換(Beheshti, 2018)
(正規座標変換はしたが，高階適合要素は作っていない)

こういう任意形状のモデルが
解けない(**矩形要素のみ**)

正規座標変換しなければ
矩形要素しか扱う事ができない



モデル化可能！
但し，**精度**が低い

非適合要素は，性能が保証されるのは**矩形のみ**
適合要素は，たわみ角まで連続なので精度：高

※ **Hermite族要素**は，$w(x,y)$の数値解を節点のw, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial x$, …で近似的に表す要素
※ **Hrermite族適合要素**は，$\partial^2 w/\partial x \partial y$も数値解に含めて，連続性を保証した要素

任意形状が解けて，精度も良くなるはず！

[1] F. K. Bogner, R. L. Fox, and L. A. Schmit. The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae. In Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Airforce Inst. Of Tech. Wright Patterson AF Base, Ohio, 1965.

[2] Alireza Beheshti. Novel quadrilateral elements based on explicit hermite polynomials for bending of kirchhoff-love plates. Computational Mechanics, Vol. 62, pp. 1199-1211, 2018.

適合要素：要素間でたわみとたわみ角が連続
非適合要素：要素間でたわみが連続

本成果の応用先

2次元高階Hermite族有限要素を板構造の数値シミュレーションに適用

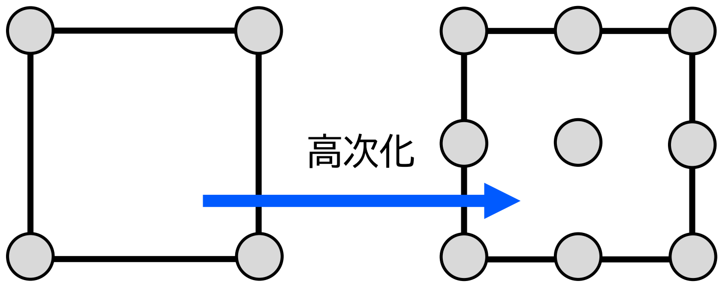
薄板	厚板
Kirchhoff-Love板理論 （せん断変形を無視）	せん断変形理論 （せん断変形を考慮）
電子基板・積層板など	土木・機械構造物など

5

Hermite族要素の強み

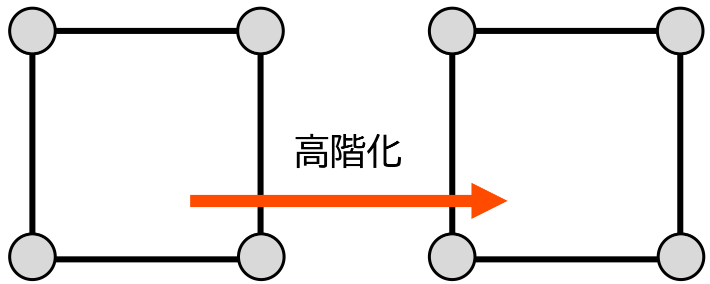
高次化(高階化)してもメッシュモデルが変化しない

Lagrange族要素



高次化により**要素構成節点数が増加**

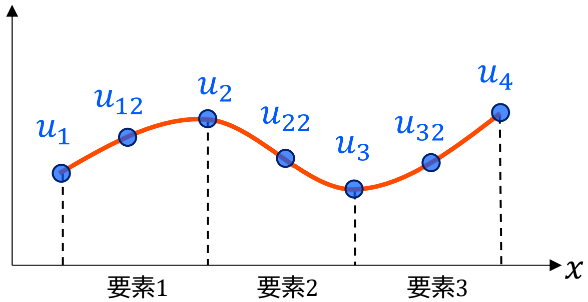
Hermite族要素

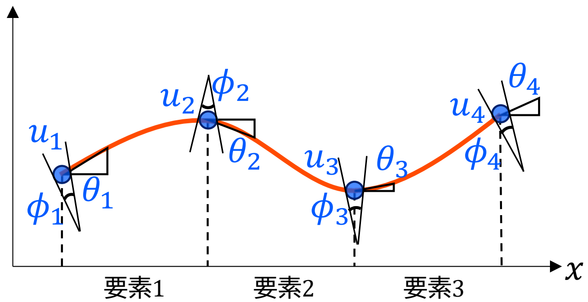


要素構成節点は変わらず, **節点の自由度が増加**

H族要素の高階化

従来の高次要素と同等の精度でモデル作成を省力化





Lagrange族要素

節点変位に基づいて近似解を作成
➡ 高次化するには要素構成節点数を増やす
➡ **高次化するとメッシュモデルは作り直し**

Hermite族要素

節点変位とその導関数に基づいて近似解を作成
➡ 高階化*するには導関数を増やすだけでよい
➡ **一次要素と同じメッシュモデルをそのまま使用**

＊Hermite族要素は**高階導関数**を節点自由度に含めることで高次の基底関数を導入するため，
本研究では，Hermite族要素を高次化することを**高階化**と呼んでいる
（コンセンサスを得ていない，また，英語では同じHigh-order）

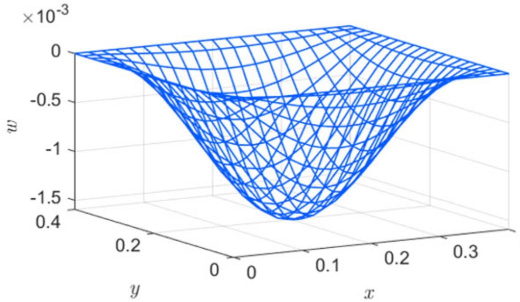
u_i：節点 i の変位

$$\theta_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_i} \qquad \phi_i = \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_i} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_i}$$

7

KL板の数値シミュレーション｜結果と考察（矩形モデル）

適合要素によりKirchhoff-Love板のたわみを計算



辺長=0.4m，板厚=0.01m
境界条件：四辺固定
解析解＝1.7686mm[36]

Num. Elem.	P9* 高階/適合*			P6 [8] 高階/非適合*			P4 一階/適合			P3 [8] 一階/非適合		
	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]
4×4	1.7686	0.42	0.07	1.7570	-0.24	0.07	1.7680	0.39	0.05	1.6932	-3.86	0.06
8×8	1.7686	0.42	0.28	1.7670	0.27	0.24	1.7685	0.41	0.19	1.7144	-2.65	0.21
12×12	1.7686	0.42	0.62	1.7675	0.36	0.55	1.7686	0.42	0.43	1.7224	-2.20	0.48
16×16	1.7686	0.42	1.19	1.7680	0.39	0.99	1.7686	0.42	0.75	1.7254	-2.03	0.91
20×20	1.7686	0.42	1.97	1.7682	0.40	1.65	1.7686	0.42	1.24	1.7268	-1.95	1.32

P6（高階/非適合）が最高精度 ➡ 解析解の有効桁数の問題

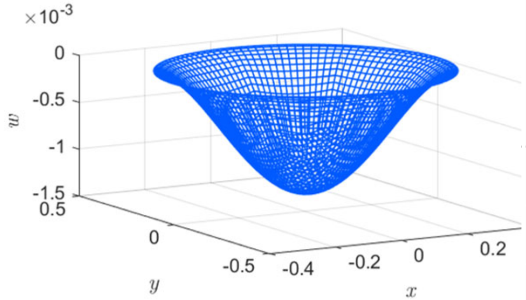
（おそらく，**適合要素**を**高階化**すれば精度は上がり続ける）

[8] Alireza Beheshti. Novel quadrilateral elements based on explicit hermite polynomials for bending of kirchhoff–love plates. Computational Mechanics, Vol. 62, pp. 1199–1211, 2018.
[36] Stephen Timoshenko, Sergius Woinowsky-Krieger, et al. Theory of plates and shells, Vol. 2. McGraw-hill, New York, 1959.

*節点の面外自由度が9である要素をP9要素と呼んでいる
*P9要素は曲率まで連続
*P6要素はたわみ角までは連続だが曲率は非連続

KL板の数値シミュレーション｜結果と考察(非矩形モデル)

非矩形要素モデルの曲げ問題も高階/適合要素の精度が優れる



半径=0.4m, 板厚=0.01m
境界条件:円周固定
解析解＝1.3113mm[36]

Num. Elem.	P9* 高階/適合*			P6 [8] 高階/非適合*			P4 一階/適合			P3 [8] 一階/非適合		
	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]	Disp. [mm]	Error [%]	Time [s]
4×3×4×4	1.3131	0.20	0.88	1.3222	0.91	0.75	1.3468	2.92	0.62	1.2550	-4.23	0.68
4×3×8×8	1.3220	0.12	4.67	1.3135	0.23	3.69	1.3216	0.85	2.88	1.2626	-3.65	3.04
4×3×10×10	1.3121	0.13	8.33	1.3123	0.15	6.41	1.3180	0.58	4.95	1.2630	-3.62	5.24
4×3×12×12	1.3116	0.09	14.1	1.3117	0.10	10.3	1.3159	0.42	8.00	1.2630	-3.61	8.22
4×3×14×14	1.3113	0.07	21.7	1.3113	0.07	15.9	1.3146	0.32	12.0	1.2629	-3.62	12.0

P6➡P9やP3➡P4のように適合要素化により顕著に精度改善

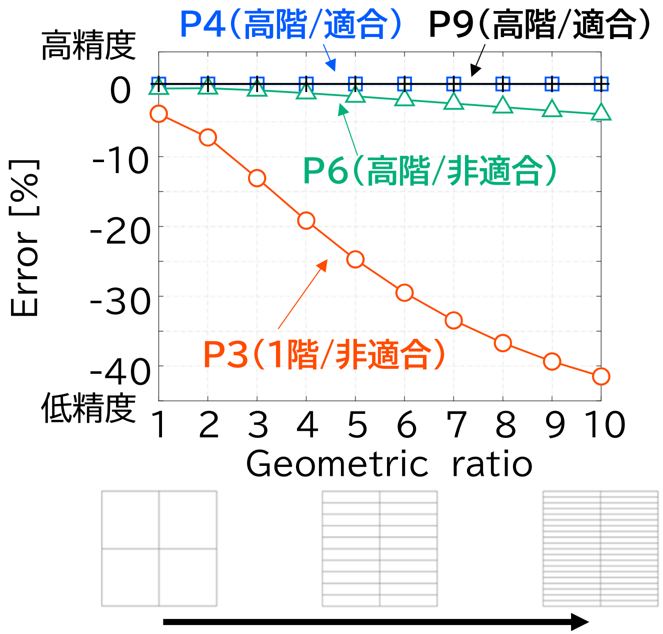
(適合要素は, 非矩形要素モデルを使う時に真価を発揮する)

[8] Alireza Beheshti. Novel quadrilateral elements based on explicit hermite polynomials for bending of kirchhoff-love plates. Computational Mechanics, Vol. 62, pp. 1199-1211, 2018.
[36] Stephen Timoshenko, Sergius Woinowsky-Krieger, et al. Theory of plates and shells, Vol. 2. McGraw-hill, New York, 1959.

要素の辺長比を変えた結果

期待以上に

要素の辺長比を極端にしても矩形なら**適合要素**は**精度維持**



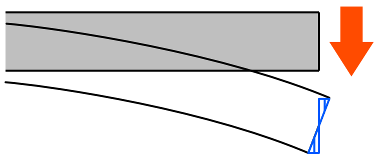
	P9 高階/適合	P6 高階/非適合	P4 高階/適合	P3 一階/非適合
矩形モデル	◎	○	◎	×
歪なモデル	◎	◎	○	×
利点	常に高精度 収束も早い	精度が他より高い	計算速度と精度を 両立可能	計算速度
欠点	境界条件が複雑 計算負荷:大	境界条件が複雑	境界条件が やや複雑	境界条件が やや複雑

P4は性能のバランスが取れている

10

H族要素×厚板　**厚板**は解が増えるのでHermite族要素を適用すると計算コストが急激に増加する可能性

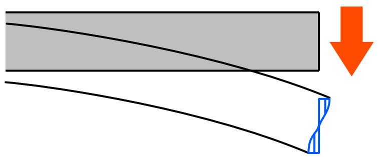
せん断変形理論も3変数で表現可能（KL板と同じ）



u, v（伸縮）の線形分布

FSDT

薄板➡せん断ロッキング



u, v（伸縮）の非線形分布

HSDT

非線形分布は色々

独立変数は5個・・・$u, v, w, \beta_x, \beta_y$

$$w = \underbrace{w_b}_{\text{曲げ}} + \underbrace{w_s}_{\text{せん断}}$$

RPT

（独立変数：4）

u, v, w_b, w_s

$$w_s = f(w_b)$$

GTVPT [33]

（独立変数：3）

u, v, w_b

[33] Tuan N Nguyen, Tuan D Ngo, and H Nguyen-Xuan. A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and isogeometric implementation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 326, pp. 376–401, **2017**.

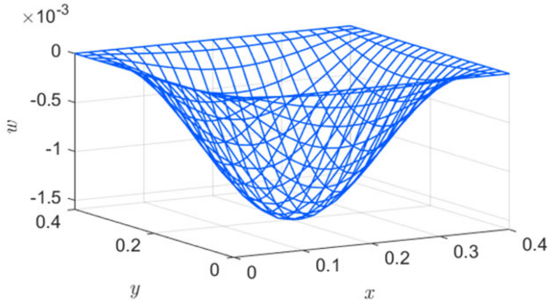
FSDT: First-order Shear Deformation Theory
HSDT: Higer-order Shear Deformation Theory
RPT: Refine Plate Theory
GTVPT: Generalised Three Variable Theory

Hermite族要素の数値解の例

$$\begin{matrix} u & u_x & u_y \\ v & v_x & v_y \\ w & w_x & w_y \\ \beta_x & \beta_{x_x} & \beta_{x_y} \\ \beta_y & \beta_{y_x} & \beta_{y_y} \end{matrix}$$

厚板の数値シミュレーション｜結果と考察(矩形モデル)

アスペクト比(板厚比)にかかわらず同じ要素モデルで解ける



境界条件:四辺固定

L/t	P9*	P6	Nguyen[33]	Exact[37]
	高階/適合*	高階/非適合*	IGA	
10	0.1474	0.1469	0.1473	0.1499
10^2	0.1267	0.1267	0.1267	0.1267
10^3	0.1265	0.1265	0.1265	0.1265
10^4	0.1265	0.1265	0.1265	0.1265
10^5	0.1265	0.1265	0.1265	0.1265

厚板の精度は先行研究と同等以上である
板厚が小さくてもせん断ロッキングは発生しない

[8] Alireza Beheshti. Novel quadrilateral elements based on explicit hermite polynomials for bending of kirchhoff-love plates. Computational Mechanics, Vol. 62, pp. 1199-1211, 2018.
[33]] Tuan N Nguyen, Tuan D Ngo, and H Nguyen-Xuan. A novel three-variable shear deformation plate formulation: Theory and isogeometric implementation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 326, pp. 376-401, 2017.
[37] Olgierd C Zienkiewicz, Zhongnian Xu, Ling Fu Zeng, Alf Samuelsson, and Nils-ErikWiberg. Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements: Part i_a simple quadrilateral. InternationalJournal for Numericl Methods in Engineering, Vol. 36, No. 18, pp. 3043-3056, 1993.

IGA:Iso-Geometric Analysis

12

まとめ

実施事項

- 2次元高階Hermite族適合有限要素の正規座標変換を実装
- 2次元高階Hermite族適合有限要素を板構造の数値シミュレーションに適用

結果・考察

- 矩形、非矩形モデルにおいて適合要素は優れた結果を示す
- 厚板に関しては先行研究と同等以上の結果が得られた

何に便利か

- 複雑な形状を持つ構造のシミュレーション
- 長大構造物のシミュレーション

	P9	P6	P4	P3
	高階/適合	高階/非適合	高階/適合	一階/非適合
矩形モデル	◎	○	◎	×
歪なモデル	◎	◎	○	×
利点	常に高精度 収束も早い	精度が他より高い	計算速度と精度を 両立可能	計算速度
欠点	計算負荷:大	計算時間:やや大		低精度

ご清聴ありがとうございました

13

本研究の位置づけ

	Bogner et al. (1965)	Beheshti (2018)	Beheshti (2020)	Bacciochi et al. (2020)	Bacciochi et al. (2023)	本研究
非適合要素の検討	○	○	○	○	○	○
適合要素の検討	○	△	○	○	○	○
明示的なHermite多項式の使用	○	○	○	×	×	○
要素が矩形に限られない	×	○	×	○	×	○
せん断変形の考慮	×	×	×	×	×	○

[6] Bogner et al. (1965)
[8] Beheshti (2018)
[9] Beheshti (2020)
[10] Bacciocchi et al. (2020)
[11] Bacciocchi & Fantuzzi (2023)