

筑波大学大学院博士課程
理工情報生命学術院
システム情報工学研究群修士論文

Hermite 型有限要素法を用いた 橋梁の静的挙動シミュレーション

須藤 大樹

修士（工学）

（構造エネルギー工学学位プログラム）

指導教員 山本亨輔

2023年 3月

概要

有限要素法 (FEM) で最も用いられる Lagrange 族 1 次要素は, 曲げ問題においてロッキング現象を生じやすく, 精度が著しく低下することがある. その対策として, 低減積分法や高次化が一般的である. 精度を改善する際に, 高次化する場合は, Serendipity 族六面体要素を用いるのが一般的であるが, モデル化の労力が大きい. 一方, Hermite 族要素は, 各節点の自由度として, 変位等の物理量とその一階導関数を与える. よって, 計算コストは増大するが, 節点配置は Lagrange 族 1 次要素同じであり, モデル作成の労力を増やすことなく高次化が可能である.

そこで, 本研究では, Kirchhoff-Love 板理論に基づく純 Hermite 族板要素および純 Hermite 族 Euler-Bernoulli 梁要素, Hermite 族六面体要素を定式化し, 固体の微小変形問題に適用する. 微小変形問題として, 補剛材を有する詳細橋梁構造モデルの曲げ問題を検証し, 計算結果から Hermite 型 FEM を評価する.

目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究背景, 研究目的	1
1.2	研究方法	2
第2章	Kirchhoff-Love 理論	3
2.1	面外変形 (曲げ変形)	3
2.2	面内変形 (伸縮変形)	5
第3章	Hermite 族要素	6
3.1	梁要素	6
3.2	板要素 (3 自由度)	7
3.3	板要素 (4 自由度)	8
3.4	ソリッド要素	8
第4章	検証	11
4.1	単純梁の曲げ問題	11
4.1.1	数値計算モデル	11
4.1.2	数値計算結果	11
4.2	平板の曲げ問題	12
4.2.1	数値計算モデル	12
4.2.2	数値計算結果	12
4.3	板の圧縮問題	13
4.3.1	数値計算モデル	13
4.3.2	数値計算結果	13
4.4	片持ち梁の曲げ問題	14
4.4.1	数値計算モデル	14
4.4.2	数値計算結果	14
第5章	座標変換マトリクス	15
5.1	梁要素の座標変換マトリクス	15
5.2	板要素の座標変換マトリクス	16
第6章	橋梁モデルへの適用	17
6.1	鋼桁の4点曲げ問題	17
6.1.1	数値計算モデル	17
6.1.2	数値計算結果	18
6.2	合成桁の4点曲げ問題	19
6.2.1	数値計算モデル	19
6.2.2	数値計算結果	20
6.3	詳細橋梁モデルの曲げ問題	22
6.3.1	数値計算モデル	22
6.3.2	数値計算結果	24
第7章	まとめと考察	27
	謝辞	28

参考文献.....	29
付録.....	30

図目次

図 4-1 単純梁の変形図.....	11
図 4-2 長さ方向の分割数と誤差の関係	11
図 4-3 平板の変形図	12
図 4-4 長さ方向の分割数と誤差の関係	12
図 4-5 板の圧縮変形図.....	13
図 4-6 幅方向の分割数と誤差の関係	13
図 4-7 片持ち梁の変形図	14
図 4-8 厚さ方向の分割数と誤差の関係	14
図 5-1 z 軸周りの回転座標変換.....	15
図 6-1 鋼桁の断面図	18
図 6-2 4点曲げの概略図.....	18
図 6-3 鋼桁の変形図	18
図 6-4 幅方向の分割数と代表点変位の関係	18
図 6-5 上フランジのたわみ曲線（鋼桁）	19
図 6-6 中立軸のたわみ曲線（鋼桁）	19
図 6-7 下フランジのたわみ曲線（鋼桁）	19
図 6-8 合成桁の断面図.....	20
図 6-9 合成桁の変形図.....	21
図 6-10 幅方向の分割数と代表点変位の関係	21
図 6-11 上フランジのたわみ曲線（合成桁）	21
図 6-12 中立軸のたわみ曲線（合成桁）	21
図 6-13 下フランジのたわみ曲線（合成桁）	21
図 6-14 詳細橋梁モデルの概要図[(x, z) 平面].....	23
図 6-15 詳細橋梁モデルの概要図[(y, z) 平面].....	23
図 6-16 詳細橋梁モデルの概要図[(x, y) 平面].....	24
図 6-17 詳細橋梁モデルの全体図	24
図 6-18 詳細橋梁モデルの変形図	25
図 6-19 詳細橋梁モデルの変形図[(y, z) 平面]（補剛材あり）	25
図 6-20 詳細橋梁モデルの変形図[(y, z) 平面]（補剛材なし）	25
図 6-21 主桁 1 のたわみ曲線	25
図 6-22 主桁 2 のたわみ曲線.....	25
図 6-23 主桁 3 のたわみ曲線.....	26
図 6-24 主桁 4 のたわみ曲線.....	26

表目次

表 4-1 単純梁の材料パラメータ	11
表 4-2 平板モデルの材料パラメータ	12
表 4-3 板モデルの材料パラメータ	13
表 4-4 片持ち梁の材料パラメータ	14
表 6-1 鋼桁モデルの材料パラメータ	17
表 6-2 コンクリート床版モデルの材料パラメータ	20
表 6-3 主桁モデル（詳細橋梁）の材料パラメータ	22
表 6-4 コンクリート床版（詳細橋梁）の材料パラメータ	22
表 6-5 補剛材（横構・対傾構）の材料パラメータ	23
表 6-6 補剛材（横桁・垂直補剛材・水平補剛材）の材料パラメータ	23

第1章 はじめに

1.1 研究背景, 研究目的

FEM (Finite Element Method : 有限要素法) は, 最も一般的な偏微分方程式の数値解法である. FEM では, 対象領域を線や三角形, 四面体等の要素と言われる微小領域に細かく分割して数値解を求める. 各要素内の物理量は, 離散点である節点に対して基底関数を用いて内挿することで表現される. よって, この基底関数の違い, つまり, 要素モデルの違いが FEM の数値計算結果に影響を及ぼす. 現在, 最も普及している 3 次元要素として, Lagrange 族 1 次要素がある. 例えば, Lagrange 族 1 次六面体要素は, 8 つの節点で構成され, モデル化が容易であるという利点がある. ただし, 要素分割数が少ない場合, 精度が悪化しやすい. 精度を改善する際に, 高次化する場合は, Serendipity 族六面体要素を用いるのが一般的である. この要素は 1 要素 20 個の節点で構成され, 精度は優れるがモデル化はやや困難である. 1 次要素の精度が悪化しやすい問題として, 固体の曲げ問題が挙げられる. これは, 内挿に線形近似を用いているために, 内部応力の分布を適切に表現できず, せん断ロックという現象を生じるためである. この現象は場合によっては極端な精度低下を引き起こす事がよく知られている. せん断ロックへの対策として, 低減積分法などの計算テクニックを用いる場合が多い.

1 次要素は, 高次要素より精度が劣り, 低減積分法といった計算テクニックが必要となる点, 高次要素の場合はモデル化がやや困難である点など, Lagrange 族要素にはそれぞれデメリットが存在する. これらのデメリットを解消するには, Lagrange 族 1 次要素と同じ節点構成でありながら, 高次基底関数が導入可能な要素が望ましい. その候補として, Hermite 族要素が挙げられる. Hermite 族要素は, 1 節点の自由度として, 変位等の物理量とその第一次導関数を与える. 節点の自由度が増えるので, 計算コストは増大するが, 基底関数が最低でも 3 次関数になるため, Lagrange 族要素と Serendipity 族要素の欠点を同時に克服出来る. この Hermite 族要素は, 一般的に 1 次元 Euler-Lagrange 梁要素¹⁾や 2 次元 Kirchhoff-Love 板要素^{2) 3) 4)}としてよく知られている. また, Lagrange 基底を用いる従来の Lagrange 型有限要素法と Hermite 基底を用いる Hermite 型有限要素法についての比較研究もすでに行われている. たとえば, 著者らは, それぞれの有限要素法を流体力学の分野である移流方程式へ適用し, 計算結果を比較⁵⁾した. 井出⁶⁾, 柴田⁷⁾らの研究においても同様の検討がなされている. これらの研究によると, Lagrange 型に比べ, Hermite 型は高精度かつ安定した数値計算であるとされる. さらに, 非線形問題である Euler 方程式へ適用した場合も同様の傾向が確認⁸⁾されている. 一方で, 現在, 3 次元 Hermite 族ソリッド要素はあまり普及しておらず, Lagrange 族ソリッド要素が用いられる場合が多い. 最近では, Andrew⁹⁾が新しい基底関数を提案するに留まっている. また, Kirchhoff-Love 板要素においては, 曲げを Hermite 基底で離散化するのに対して, 伸縮は Lagrange 基底を用いる場合が多い⁹⁾. 本研究では, このような要素を Lagrange-Hermite 混合族要素と呼ぶ. 混合族要素を用いる場合, I 主桁のように板要素を直角に接続する構造では, Hermite 基底と Lagrange 基底による離散化が同一線上に現れてしまうので, 変形後の要素形状に不整合が生じていると考えられる.

そこで, 本研究では, Lagrange 基底で定義されることが多い高次ソリッド要素と, Lagrange 基底と Hermite 基底を混合して定義されることが多い板要素を, Hermite 基底のみで定義する純 Hermite 族要素として定式化し, Hermite 族梁要素と共に 3 つの要素を用いて詳細橋梁構造をモデル化し, 曲げ問題を解くことで数値計算結果からその有用性について検証を行う.

1.2 研究方法

それぞれの Hermite 族要素を定式化し，微小変形問題に適用し，数値解を求めて，Hermite 型有限要素法の有効性を検証する．まず，それぞれの Hermite 族要素の妥当性を確かめるため，微小変形問題として梁や平板の曲げ問題を解き，計算結果を評価する．その後，橋梁モデルとして，Hermite 族要素と，Lagrange 族要素および Lagrange-Hermite 混合族要素で，それぞれモデル化された鋼桁と合成桁の 4 点曲げ問題を解き，計算結果を比較する．また，横構や対傾構などに Hermite 梁要素，鋼桁のウェブとフランジ，垂直補剛材などの補剛材に Hermite 族板要素，コンクリート床版に Hermite 族ソリッド要素をそれぞれ用いて詳細橋梁構造をモデル化し，曲げ問題を解くことによって，曲げ挙動の再現を試みる．

第2章 Kirchhoff-Love 理論

本研究では、Kirchhoff-Love 理論を有限要素解析に用いる。2.1 節では、面外変形（曲げ変形）について、2.2 節では、面内変形（伸縮変形）について説明する。

2.1 面外変形（曲げ変形）

Kirchhoff-Love Plate とは、次の 3 つの条件を満たす板である。

- 1) 変形前に中立面に対して垂直であった線分は、変形後も垂直を保つ。
- 2) 線分の長さが変形後も変化しない。
- 3) 中立面に平行な面に作用する法線応力は無視することができる。

これらの仮定から、平行変位は垂直変位の微分で表すことができる。 x , y , z 方向の変位は、

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y)$$

である。ここで、 w は中立面 ($z = 0$) の垂直方向の変位を示す。ひずみテンソルは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{z}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

Kirchhoff-Love 板理論では、 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ であり、ヤング率、ポアソン比をそれぞれ E , ν とすると、 $\varepsilon_z = 0$ となる。応力テンソルとひずみテンソルの成分は次のような関係がある。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

曲げモーメントテンソルは、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

x 方向, y 方向のせん断力を Q_x , Q_y , 荷重を q すると、平衡方程式は以下のように示される.

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

まとめると次のように書ける.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q\tag{6}$$

ここで曲げ剛性は $D(= Eh^3/12(1+\nu)(1-\nu))$ となる. すべての式を一つにまとめると、次のようになる.

$$\begin{aligned}D\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right. \\ \left. + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\} = q\end{aligned}\tag{7}$$

ω , S , R がそれぞれ重み, 表面積, 残差を表すとき, Galerkin 法は次のように書くことができる.

$$\int_S \omega R dS = 0\tag{8}$$

たわみ量 w を $w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{N}$ と近似したとき, 基底関数 N と式(7)を R に代入すると, 式(8)が成り立つ. また, 式(8)は次のように書き換えることができる.

$$\left[\int_S D(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_5) dA \right] \mathbf{w} = \int_S Nq dA\tag{9}$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \\ \mathbf{K}_2 &= \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \\ \mathbf{K}_3 &= 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x\partial y} \\ \mathbf{K}_4 &= \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \\ \mathbf{K}_5 &= \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{10}$$

剛性マトリックス \mathbf{K} , ベクトル \mathbf{w} , 外力ベクトル \mathbf{f} でまとめると, 連立方程式 $\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{f}$ が得られる. 以上の理論は, 主に板の曲げ問題, つまり, 面外変形について取り扱っている.

2.2 面内変形（伸縮変形）

この節では面内変形，つまり伸縮変形について述べる．伸縮変形を考慮すると，式(1)は次のように書ける．

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{11}$$

$$W(x, y, z) = w(x, y)$$

ここで， u_0, v_0 は中立面の x, y 方向の変位を表す．式(11)を用いると x, y 方向の内力は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{Et}{1-v^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + v \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ \frac{Et}{1-v^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + v \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ \frac{Et}{1+v} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

平板の面内問題に関する内力は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - P_x &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - P_y &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

P_x, P_y を x, y 方向の軸力である．

第3章 Hermite 族要素

この章では、Hermite 型有限要素法に用いる Hermite 族要素についてそれぞれの次元ごとに定式化する。

3.1 梁要素

正規化座標系を $-1 \leq \xi \leq 1$ とすると、1次元 Hermite 族要素の基底関数が満たすべき条件は次のようになる。

$$H_{2i-1}(\xi_j) = \delta_{ij} \frac{\partial H_{2i}}{\partial \xi}(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (14)$$

となり、ここで δ_{ij} はクロネツカーデルタであり、 i と j は共に 1 または 2 である。節点位置である ξ_i は、それぞれ $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$ となる。式(14)の条件を満たす基底関数は次の式(15)になる。

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 2) \\ H_2 &= \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 1) \\ H_3 &= \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 2) \\ H_4 &= \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 1) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、全体座標系 x におけるある 1 要素における 2 つの節点 x_1 , x_2 について考える。それらの節点における変位を u_1 , u_2 とし、たわみ角を θ_1, θ_2 とする。要素内の任意の変位は $u(x)$ と、たわみ角は $\theta(x) = du/dx$ とすると、それらは Hermite 基底関数を用いて次のように書ける。

$$u(x) = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{H}(\xi) \cdot \mathbf{u} \quad (16)$$

$$\theta(x) = \frac{du}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{H}}{d\xi} \cdot \mathbf{u}$$

\mathbf{N} は、全体座標系で定義された基底関数であり、 \mathbf{A} を補正行列とする。正規化された要素座標系で定義された Hermite 基底 $\mathbf{H}^T = \{H_1 H_2 H_3 H_4\}$ と要素を構成する節点での変位ベクトル $\mathbf{u}^T = [u_1 \ \theta_1 \ u_2 \ \theta_2]$ に対して、補正行列 \mathbf{A} は次のようになる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & \frac{dx}{d\xi} & \mathbf{I} & \\ 0 & & & \\ & & 1 & 0 \\ \mathbf{I} & & 0 & \frac{dx}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (17)$$

1次元の場合、 x の傾きといえる $dx/d\xi$ は、 $dx/d\xi = (x_2 - x_1)/2$ となる。

3.2 板要素 (3 自由度)

2次元関数 \mathbf{H} は以下のように求められる。

$$\mathbf{H}^T = \{\mathbf{H}_{(1)}^T \ \mathbf{H}_{(2)}^T \ \mathbf{H}_{(3)}^T \ \mathbf{H}_{(4)}^T\} \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{H}_k^T = \{H_{3k-2}, H_{3k-1}, H_{3k}\}$ とする。式 (15) で示されるエルミート基底関数を各次元で掛け合わせると、 \mathbf{H}_k^T の内容は次のようになる。

$$H_{3k-2}(\xi, \eta) = H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta)$$

$$H_{3k-1}(\xi, \eta) = H_{2i}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \quad (19)$$

$$H_{3k}(\xi, \eta) = H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j}(\eta)$$

ここで、 η は $-1 \leq \eta \leq 1$ であり、要素の正規化座標系である。 k, i, j の組み合わせは以下の通りである。

$$(k, i, j) = (1,1,1), (2,2,1), (3,2,2), (4,1,2) \quad (20)$$

z 方向の変位を $w(x, y)$ 、 x 方向と y 方向の回転角を $\theta_x(x, y)$ 、 $\theta_y(x, y)$ とした場合である。また、 $w(x, y)$ 、 $\theta_x(x, y)$ 、 $\theta_y(x, y)$ は次のようにエルミート基底関数で近似することができる。

$$w(x, y) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{H}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{w}$$

$$\theta_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \cdot \mathbf{w} \quad (21)$$

$$\theta_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \cdot \mathbf{w}$$

ここで、 $\mathbf{w}^T = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}]$ である。まとめると、その方程式を次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} \cdot \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

この式を計算すると、補正行列 \mathbf{A} が次のように書ける。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

四角形要素の節点の x 座標 x_1, x_2, x_3, x_4 と y 座標 y_1, y_2, y_3, y_4 を用いて, 補正行列 \mathbf{A} は以下のようになる. 節点 1 (x_1, y_1)の時のみを示す.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_2 - x_1)}{2} & \frac{(y_2 - y_1)}{2} \\ 0 & \frac{(x_4 - x_1)}{2} & \frac{(y_4 - y_1)}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

3.3 板要素 (4 自由度)

Alireza^[2] や Bogner^[9]は, 精度を向上するために, 自由度を増やすことを試みている. 本研究でも, w, θ_x, θ_y に加えて, θ_{xy} を加える.

$$\theta_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} w(x, y) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x \partial y} \cdot \mathbf{w} \quad (26)$$

Hermite 基底関数の自由度を 3 から 4 つに変更する場合,式(19)は次のようになる.

$$\begin{aligned} H_{4k-3}(\xi, \eta) &= H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \\ H_{4k-2}(\xi, \eta) &= H_{2i}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \\ H_{4k-1}(\xi, \eta) &= H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j}(\eta) \\ H_{4k}(\xi, \eta) &= H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \end{aligned} \quad (27)$$

3.4 ソリッド要素

次に, 3次元について説明する. まず, 3次元の Hermite 基底関数は次のように置く. ここでの基底関数は局所座標系におけるものである.

$$\mathbf{H}^T = \{\mathbf{H}_{(1)}^T \mathbf{H}_{(2)}^T \mathbf{H}_{(3)}^T \mathbf{H}_{(4)}^T \mathbf{H}_{(5)}^T \mathbf{H}_{(6)}^T \mathbf{H}_{(7)}^T \mathbf{H}_{(8)}^T\} \quad (28)$$

ここで $\mathbf{H}_{(m)}^T = \{H_{m1} H_{m2} H_{m3} H_{m4}\}^T$ とする.

$m1, m2, m3, m4$ はそれぞれ $4m-3, 4m-2, 4m-1, 4m$ とおく. 3次元の基底関数は1次元の基底関数をそれぞれの次元で掛け合わせることによって定義される. $\mathbf{H}_{(m)}$ の成分は次のようになる.

$$\begin{aligned}
H_{4m-3}(\xi, \eta, \zeta) &= H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \cdot H_{2k-1}(\zeta) \\
H_{4m-2}(\xi, \eta, \zeta) &= H_{2i}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \cdot H_{2k-1}(\zeta) \\
H_{4m-1}(\xi, \eta, \zeta) &= H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j}(\eta) \cdot H_{2k-1}(\zeta) \\
H_{4m}(\xi, \eta, \zeta) &= H_{2i-1}(\xi) \cdot H_{2j-1}(\eta) \cdot H_{2k}(\zeta)
\end{aligned} \tag{29}$$

ξ, η, ζ は局所系正規化座標系であり、 $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ である。 m, k, i, j の組み合わせは次の式(30)のようになる。

$$\begin{aligned}
&(m, k, i, j) \\
&= (1,1,1,1), (2,1,1,2), (3,1,2,1), (4,1,2,2), \\
&(5,2,1,1), (6,2,1,2), (7,2,2,1), (8,2,2,2)
\end{aligned} \tag{30}$$

次に、全体座標系の基底関数 N について考える。 x 方向の変位、変位のそれぞれの方向の第1次導関数をそれぞれ $u(x, y, z)$, du/dx , du/dy , du/dz とする。 このとき、それらの関数は基底関数を用いて内挿することができ、次のように表すことができる。 今回、 x 方向の変位 u に適用した式(31)のみを示す。

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{H}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{u} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \cdot \mathbf{u} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \cdot \mathbf{u} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{31}$$

ここで、全体座標系における基底関数 \mathbf{N} は次のように置く。

$$\mathbf{N}^T = \{ \mathbf{N}_{(1)}^T \ \mathbf{N}_{(2)}^T \ \mathbf{N}_{(3)}^T \ \mathbf{N}_{(4)}^T \ \mathbf{N}_{(5)}^T \ \mathbf{N}_{(6)}^T \ \mathbf{N}_{(7)}^T \ \mathbf{N}_{(8)}^T \} \tag{32}$$

ここで $\mathbf{N}_{(m)}^T = \{ N_{4m-3} \ N_{4m-2} \ N_{4m-1} \ N_{4m} \}^T$ とする。 $m = 1 \sim 8$ である。 変位ベクトルは次のように定義している。

$$\mathbf{u}^T = \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \tag{33}$$

\mathbf{A} は補正行列である。 式を整理すると次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} \cdot \mathbf{u} \end{array} \right\} \tag{34}$$

この式を計算すると、補正行列 \mathbf{A} が次のように書ける。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{35}$$

この時、基底関数 $N_{(m)}$ は、 \mathbf{A} と局所座標系における基底関数 \mathbf{H} から、式(35)を用いると、次の

ように書ける. ここで $m1 = 4m - 3$, $m2 = 4m - 2$, $m3 = 4m - 1$, $m4 = 4m$ とし, \mathbf{N} , \mathbf{H} の (ξ, η, ζ) の表記は省略している.

$$\begin{Bmatrix} N_{m1}(\xi, \eta, \zeta) \\ N_{m2} \\ N_{m3} \\ N_{m4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{m1} \\ H_{m2} \\ H_{m3} \\ H_{m4} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ここで, 式(35)に用いられるそれぞれの傾き

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (37)$$

は, 次の式のように書ける. ただし, 節点 1 の時のみを示す.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x_5 - x_1)}{2} & \frac{(y_5 - y_1)}{2} & \frac{(z_5 - z_1)}{2} \\ \frac{(x_3 - x_1)}{2} & \frac{(y_3 - y_1)}{2} & \frac{(z_3 - y_1)}{2} \\ \frac{(x_2 - x_1)}{2} & \frac{(y_2 - y_1)}{2} & \frac{(z_2 - z_1)}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

第4章 検証

前章で定式化したそれぞれの Hermite 族要素について、曲げ問題と伸縮問題の微小変形問題を解き、妥当性を検証する。

4.1 単純梁の曲げ問題

4.1.1 数値計算モデル

今節では Hermite 族梁要素の妥当性を確かめるため、単純梁の曲げ問題について数値計算を行う。梁の中央に集中荷重が作用する条件にて、要素分割数を変えながら数値計算を行い、最大たわみについて理論解と比較する。材料パラメータは表 4-1 に示すとおりである。本条件における z 方向の最大たわみの理論解は $w = F * L^3 / 48EI = 0.125(mm)$ である。

表 4-1 単純梁の材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
L	長さ	mm	100
b	幅	mm	10
t	厚み	mm	10
I	断面 2 次モーメント	mm^4	833
F	集中荷重	N	1.00×10^9

4.1.2 数値計算結果

図 4-1 に、単純梁の変形図を示す。また、図 4-2 に厚さ方向の要素分割数とその時の誤差をまとめた。要素分割数を増やすと多少誤差が大きくなっていくものの、どんな要素分割数においても数値解と理論解がほぼ一致する結果となっている。これにより、Hermite 族梁要素は曲げ変形問題に用いることができることが分かる。

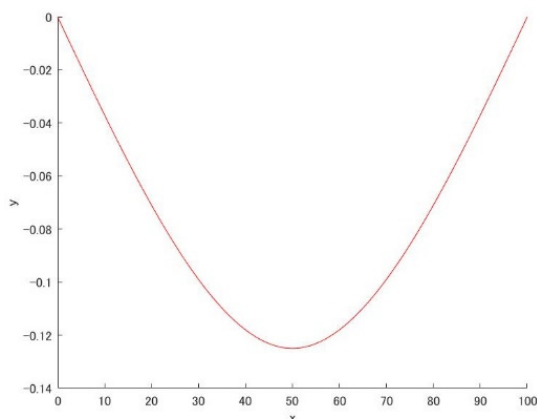


図 4-1 単純梁の変形図

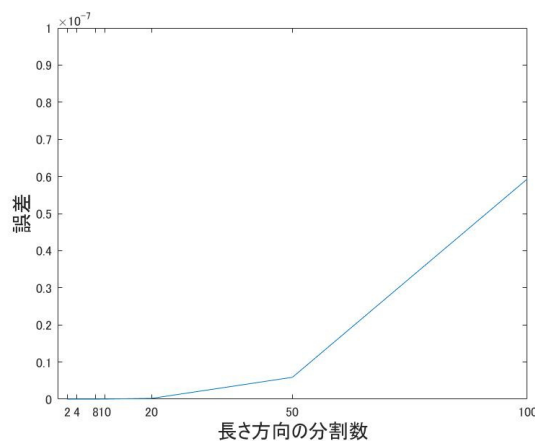


図 4-2 長さ方向の分割数と誤差の関係

4.2 平板の曲げ問題

4.2.1 数値計算モデル

今節では Hermite 族板要素の妥当性を確かめるため、平板の曲げ問題について数値計算を行う。また、板要素の自由度を増やした場合の精度向上を確かめるため、3 自由度要素と 4 自由度要素の 2 つの要素をそれぞれ数値計算に用いた。単純支持、平板の中央に集中荷重が作用する条件にて数値計算を行った。材料パラメータは表 4-2 に示す通りである。要素分割数を変えながら数値計算を行い、最大たわみについて理論解と比較する。本条件における z 方向の最大たわみの理論解は $w = 0.0116 * F_0 * L^2 / D = 0.1013(mm)$ である。

表 4-2 平板モデルの材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
ν	ポアソン比		0.3
L	一辺の長さ	mm	400
t	厚み	mm	10
D	曲げ耐性	$N \bullet mm$	1.83×10^7
F	集中荷重	MPa	100

4.2.2 数値計算結果

図 4-3 に、平板の変形図を示す。また、図 4-4 に、長さ方向の要素分割数とその時の誤差をまとめた。3 自由度要素において、 x 方向分割数、 y 方向分割数を均等分割していくと、誤差が小さくなるものの、理論解と小さくない誤差が生じている。一方、4 自由度要素は要素分割数を十分にとると、高精度な数値計算結果となっている。このことから、自由度を増やす操作によって、計算精度が向上することが分かった。今後の板要素による計算には 4 自由度要素を使用する。

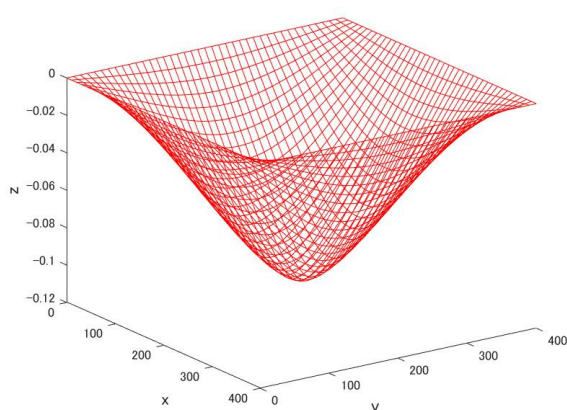


図 4-3 平板の変形図

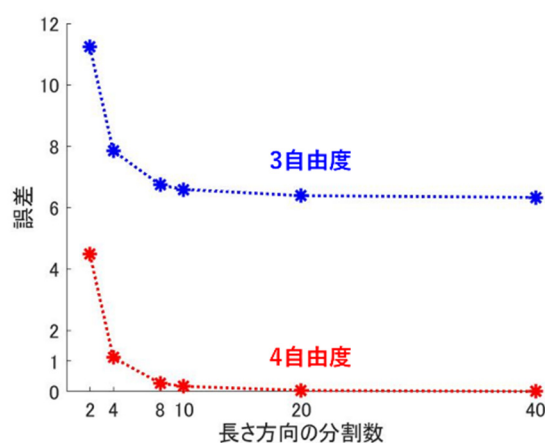


図 4-4 長さ方向の分割数と誤差の関係

4.3 板の圧縮問題

4.3.1 数値計算モデル

今節では、板の伸縮に対する Hermite 族要素の妥当性を検証する。本研究では鋼桁に実装し、ウェブ部分に生じる伸縮変形がフランジの曲げ変形に適切に伝達されるか確認する。表 4-3 に数値計算モデルの材料パラメータを示す。平板の曲げ問題と同様に、要素分割数を変えながら数値計算を行い、長さ方向の変位について理論解と比較する。数値解について、 $x = L$ における長さ方向の変位の平均を取った値を採用した。本条件における長さ方向の最大変位の理論解は、 $x = L$ で、 $u = FL/EA = 0.125(mm)$ である。

表 4-3 板モデルの材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
ν	ポアソン比		0.3
L	長さ	mm	400
b	幅	mm	20
t	厚み	mm	10
D	曲げ耐性	$N \cdot mm$	1.83×10^7
F	分布荷重	MPa	500

4.3.2 数値計算結果

図 4-5 に、板の変形図を示す。青い点は変形前の節点座標で、変形後の変位を 100 倍拡大して描画している。また、図 4-6 に、幅方向の要素分割数とその時の誤差をまとめた。 x 方向分割数、 y 方向分割数を均等分割していくと、誤差が徐々に収束していくことがわかる。これにより、Hermite 族板要素が伸縮問題についても利用できると思われる。

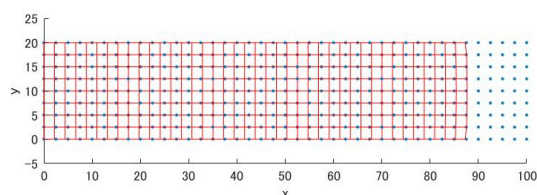


図 4-5 板の圧縮変形図

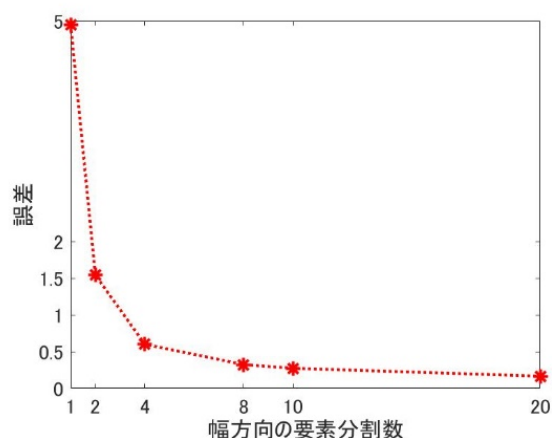


図 4-6 幅方向の分割数と誤差の関係

4.4 片持ち梁の曲げ問題

4.4.1 数値計算モデル

今節では、Hermite 族ソリッド要素の妥当性を確かめるため、片持ち梁の曲げ問題について数値計算を行う。表 4-4 に数値計算モデルの材料パラメータを示す。同様に、要素分割数を変えながら数値計算を行い、曲げ変位について理論解と比較する。本条件における曲げ変位の理論解は、 $\delta = FL^3/3EI = 4.762 \times 10^{-1}(mm)$ である。

表 4-4 片持ち梁の材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
ν	ポアソン比		0
L	長さ	mm	400
b	幅	mm	40
t	厚み	mm	40
I	断面 2 次モーメント	mm ⁴	213
F	分布荷重	N	1000

4.4.2 数値計算結果

図 4-7 に、片持ち梁の変形図を示す。青い点は変形前の節点座標で、変形後の変位を 100 倍拡大して描画している。また、図 4-8 に厚さ方向の要素分割数とその時の誤差をまとめた。x 方向分割数、y 方向分割数、z 方向分割数を均等分割していくと、誤差が徐々に収束していくことがわかる。これにより、Hermite 族ソリッド要素は曲げ変形問題に用いることができることが分かる。

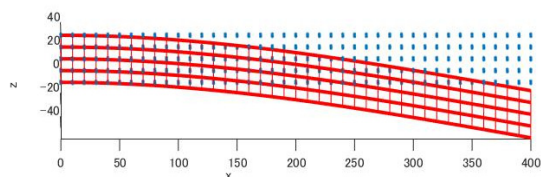


図 4-7 片持ち梁の変形図

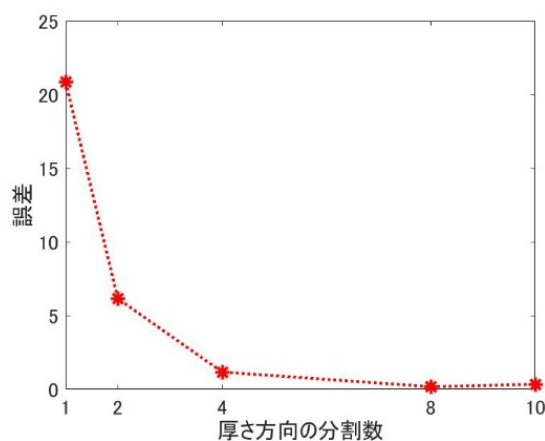


図 4-8 厚さ方向の分割数と誤差の関係

第5章 座標変換マトリクス

本研究では、検証に鋼桁と合成桁を用いるが、ウェブと呼ばれる部分は、局所座標系の軸が全体座標系から 90 度回転されている。また、梁要素によって再現される横構や対傾構は、様々な角度で接合されることが多い。そのため、梁要素と板要素について、局所座標系から全体座標に直す操作が必要である。この章では、その操作に用いる座標変換マトリクスを説明する。その説明には O.C.ツイエンキーヴィッツ^[10]や参考資料^[11]を引用している。

5.1 梁要素の座標変換マトリクス

全体座標系を x, y, z とし、局所座標系を ξ, η, ζ とする。全体座標系 (x, y, z) の単位ベクトル $\mathbf{e} = \{e_x, e_y, e_z\}^T$ とし、局所座標系 (ξ, η, ζ) の単位ベクトルを $\mathbf{e}' = \{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}^T$ とするとこれらの関係は座標変換マトリクス \mathbf{L} を用いると、次のようになる。

$$\mathbf{e}' = \mathbf{L}\mathbf{e} \quad (39)$$

梁要素の座標変換の場合、全体座標系の x 軸、 y 軸、 z 軸をそれぞれ回転軸として、回転操作を用いて座標変換を行う。 z 軸周りに θ だけ回転する回転座標変換マトリクス \mathbf{L}_z は次のようになる。

$$\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

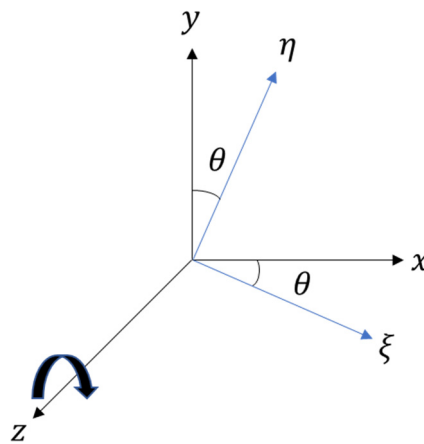


図 5-1 z 軸周りの回転座標変換

同様に、 y 軸周りの回転座標変換マトリクス \mathbf{L}_y 、 x 軸周りの回転座標変換マトリクス \mathbf{L}_x はそれぞれ次のようになる。

$$\mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

第6章 橋梁モデルへの適用

前章までで定式化, 検証した Hermite 族要素を実際の橋梁構造に適用し, 数値計算を行う. 6.1 節で鋼桁, 6.2 節では合成桁を対象とし, 解析する.

6.1 鋼桁の 4 点曲げ問題

6.1.1 数値計算モデル

今節では, Hermite 族板要素と Lagrange-Hermite 混合族板要素で, 鋼桁をモデル化し, 4 点曲げ試験について数値計算を行い, 精度を検証する. 板要素について, 前章の検証の中で精度の良かった 4 自由度要素を使用する. 計算モデルの鋼桁の断面図と 4 点曲げ試験の概略図を, それぞれ図 6-1 と図 6-2 に示す. 表 6-1 は鋼桁の材料パラメータである. 要素分割数を変更しながら数値計算を行っていく. また, 今回のモデルでは, 理論解を単純に求めることができず, 数値解との精度検証ができない. そのため, 汎用数値解析ソフトウェアである Abaqus の数値計算結果をもとに精度検証を行う. Abaqus において, 要素分割数(12 × 120 × 12)で数値計算を行った.

表 6-1 鋼桁モデルの材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
ν	ポアソン比		0
L	全長	mm	400
b	幅	mm	100
h	高さ	mm	100
t_f	フランジの厚み	mm	8
t_w	ウェブの厚み	mm	6
L_1, L_3	区間長さ 1,3	mm	50
L_2	区間長さ 2	mm	300
l_1, l_3	区間長さ 1,3	mm	150
l_2	区間長さ 2	mm	100
P	集中荷重	MPa	80×10^3

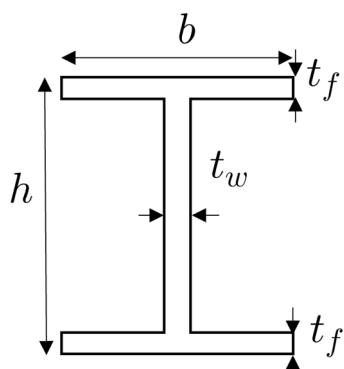


図 6-1 鋼桁の断面図

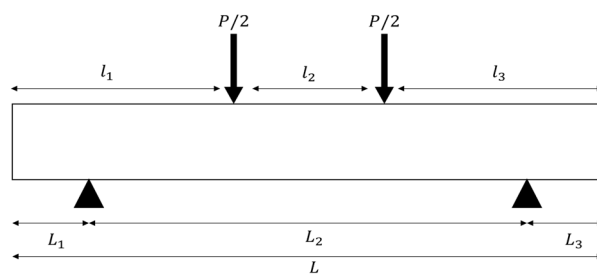


図 6-2 4点曲げの概略図

6.1.2 数値計算結果

鋼桁の変形図を図 6-3 に示す。青い点は変形前の節点座標で、変形後の変位を 100 倍拡大して描画している。上フランジが大きくたわみ、下フランジが滑らかにたわんでいる様子が確認でき、上からウェブを通して力が伝わっていることが分かる。また、図 6-4 に幅方向の要素分割数とその時の代表点変位をまとめた。代表点として、中立軸における下フランジの最大たわみの所の生じる点を採用している。各部分の細かい曲げ挙動を確認するため、上フランジ、中立軸、下フランジのたわみ曲線を図 6-5、図 6-6、図 6-7 にまとめた。Hermite 族要素を用いた結果も、Lagrange-Hermite 混合族要素を用いた結果も、 x 方向分割数、 y 方向分割数、 z 方向分割数を均等分割していくと、変位が一定の値に収束していくことがわかる。どちらの結果も Abaqus による結果より多少小さい値になっているが、上フランジ、中立軸、下フランジのたわみ曲線の形は概ね一致しており、適切に数値計算が行われたと分かる。また、Hermite 族要素を用いた結果の方が、Lagrange-Hermite 混合族要素を用いた結果より Abaqus の結果に近い値となった。Abaqus は様々な補正処理をブラックボックス化しているようだが、そういった補正処理を施さなかった場合の Lagrange-Hermite 混合族要素と比較し、Hermite 族要素は自動的に補正が行われていると考えられ、有用性が優れると考えられる。

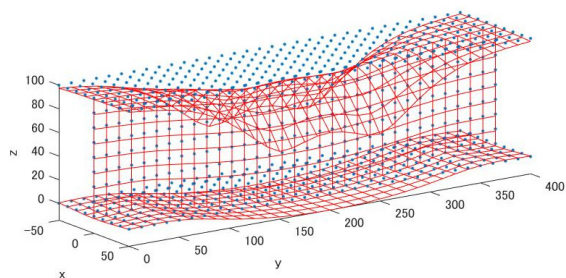


図 6-3 鋼桁の変形図

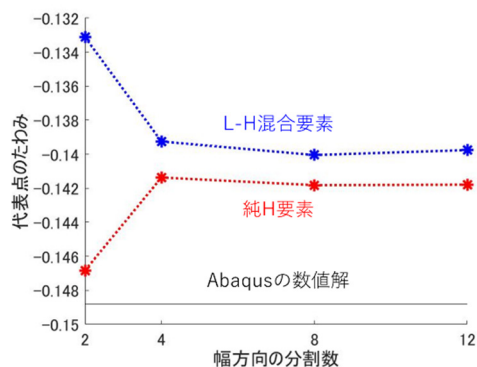


図 6-4 幅方向の分割数と代表点変位の関係

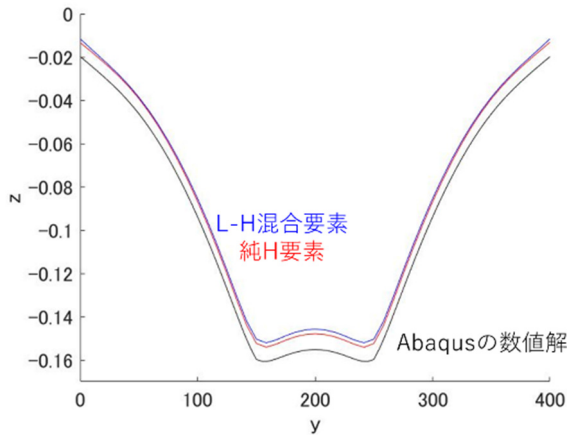


図 6-5 上フランジのたわみ曲線（鋼桁）

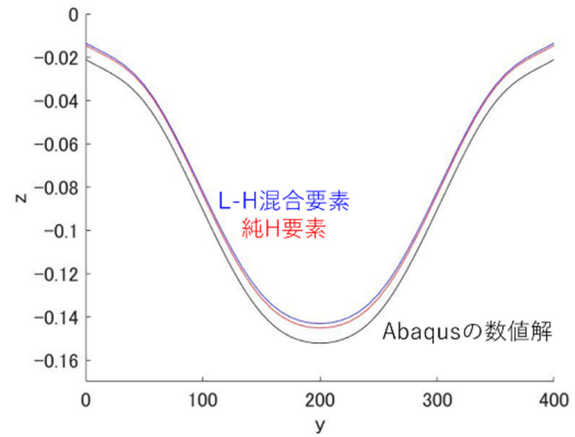


図 6-6 中立軸のたわみ曲線（鋼桁）

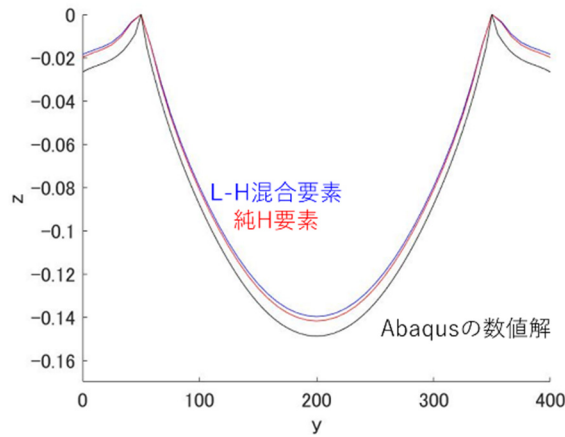


図 6-7 下フランジのたわみ曲線（鋼桁）

6.2 合成桁の4点曲げ問題

6.2.1 数値計算モデル

合成桁とは、鋼桁とコンクリート床版がずれ止めで接合された橋梁の上部構造の一種である。この節では、Hermite 族板要素に加え、Hermite 族ソリッド要素を用いて合成桁をモデル化し、4点曲げ問題試験について数値計算を行い、曲げ変形を表現できるか検証する。また、Hermite 族要素を用いたモデルと、Lagrange-Hermite 混合族板要素と Lagrange 族 1次ソリッド要素を組み合わせたモデルでそれぞれ数値計算を行い、精度を比較する。合成桁の断面図を図 6-8 に、合成桁の材料パラメータを表 6-2 に示す。鋼桁の材料パラメータは前節と同じとする。本研究では、簡単のため、ソリッド要素と板要素は剛結を仮定した。鋼桁の時と同様に、要素分割数を変更しながら数値計算を行い、Abaqus の数値計算結果と比較し、精度検証を行う。Abaqus において、ソリッド要素分割数(16 × 32 × 4)、板要素分割数(8 × 32 × 8)で数値計算を行った。

表 6-2 コンクリート床版モデルの材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	28×10^3
ν	ポアソン比		0.2
b_c	幅	mm	200
t_c	厚み	mm	50
F	集中荷重	MPa	80×10^3

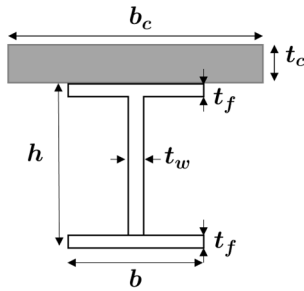


図 6-8 合成桁の断面図

6.2.2 数値計算結果

数値計算後の変形図を図 6-9 に示す。青い点は変形前の節点座標で、変形後の変位を 100 倍拡大して描画している。コンクリート床版がたわみ、下フランジが滑らかにたわんでいる。鋼桁と同様に、曲げ挙動を適切に表現することが出来た。また、図 6-10 に幅方向の要素分割数とその時の代表点変位をまとめた。代表点は、鋼桁の時と同様である。上フランジ、中立軸、下フランジのたわみ曲線を図 6-11、図 6-12、図 6-13 にまとめた。Hermite 族要素を用いた結果も、Lagrange-Hermite 混合族要素を用いた結果も、 x 方向分割数、 y 方向分割数、 z 方向分割数を均等分割していくと、変位がある程度収束していくが、完全な収束には至らなかった。どちらの結果も Abaqus による結果より小さい値になっており、鋼桁と同様の傾向が表れている。上フランジ、中立軸、下フランジのたわみ曲線の形は概ね一致しており、数値計算が適切に行われたと分かる。また、Hermite 族要素を用いた結果の方が、Lagrange-Hermite 混合族要素を用いた結果より Abaqus の結果に近い値になっている。Hermite 族板要素と同様に、Lagrange 族ソリッド要素と比較した Hermite 族ソリッド要素の有用性が確認できた。

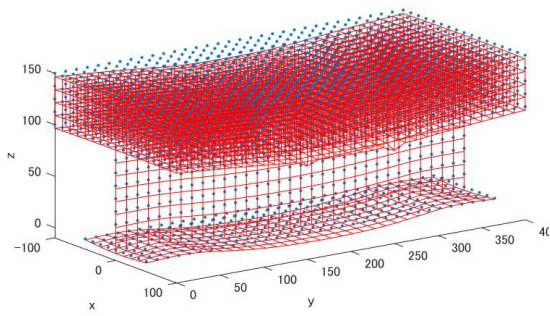


図 6-9 合成桁の変形図

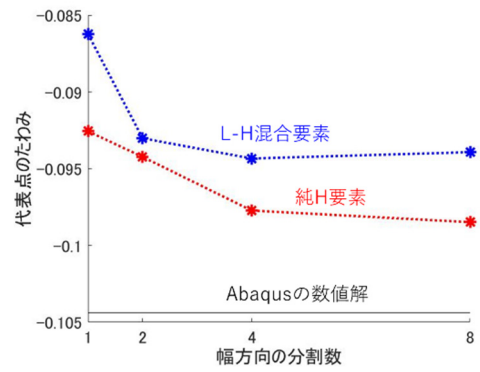


図 6-10 幅方向の分割数と代表点変位の関係

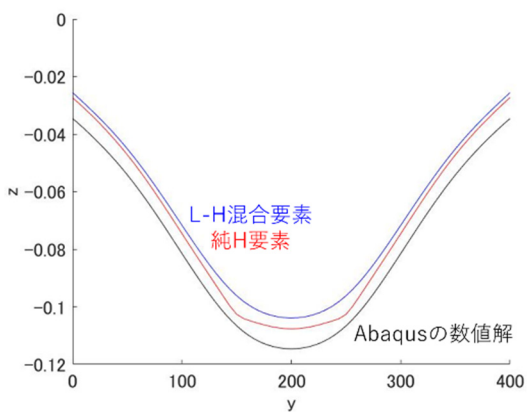


図 6-11 上フランジのたわみ曲線 (合成桁)

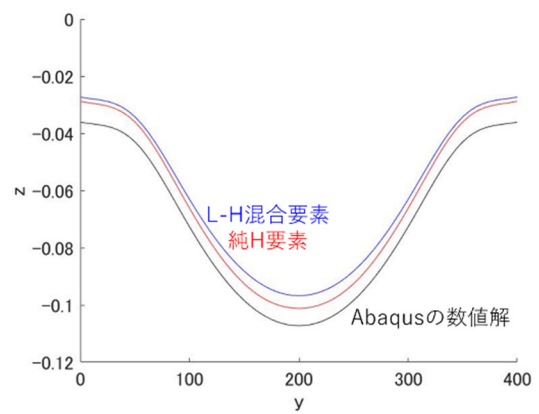


図 6-12 中立軸のたわみ曲線 (合成桁)

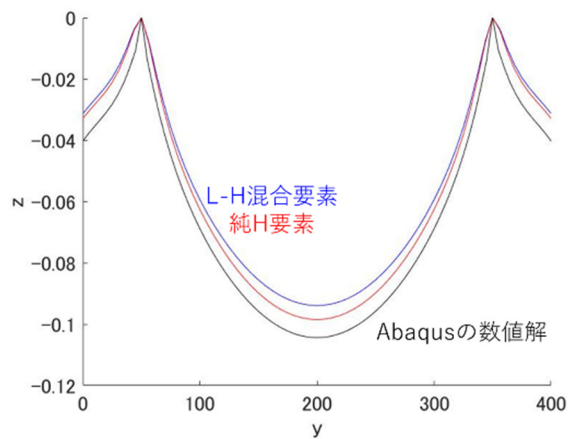


図 6-13 下フランジのたわみ曲線 (合成桁)

6.3 詳細橋梁モデルの曲げ問題

6.3.1 数値計算モデル

この章では、前章で曲げ問題を適用した鋼桁、合成桁モデルに、梁要素を加えた詳細橋梁モデルを作成し、曲げ変形を再現できるかどうか検証する。4本の主桁の上にコンクリート床版を設置し、梁要素、板要素を用いて表現した横構や対傾構、垂直・鉛直補剛材などの補剛材を鋼桁中に導入する。各モデルの材料パラメータを表 6-3、表 6-4、表 6-5、表 6-6 に示す。鋼桁、コンクリート床版の材料パラメータは前章とヤング率、ポアソン比を同様とする。また、前節と同じ添え字の記号については、同じ位置の材料パラメータを表すものとする。図 6-14、図 6-15、図 6-16 に、詳細橋梁モデルの概要図を、図 6-17 に、全体図を示す。概要図において、主桁・横桁を黒色、垂直・鉛直補剛材を青色、横構・対傾構を赤色で描画している。本モデルは、原らの著書を参考に、実際の橋梁に各材料パラメータをできるだけ近づけたモデルとなっている¹²⁾。本研究では、補剛材ありのモデルと補剛材なしのモデルで、同条件において曲げ試験を行い、計算結果を比較する。両モデル共に、板要素分割数(14×8×6)で数値計算を行った。

表 6-3 主桁モデル（詳細橋梁）の材料パラメータ

記号	名前	単位	量
L	全長	mm	300000
b	幅	mm	500
h	高さ	mm	1900
t_f	フランジの厚み	mm	36
t_w	ウェブの厚み	mm	9
L_1, L_3	区間長さ 1,3	mm	37500
L_2	区間長さ 2	mm	225000
l_1, l_3	区間長さ 1,3	mm	112500
l_2	区間長さ 2	mm	75000
P	集中荷重	MPa	80×10^9

表 6-4 コンクリート床版（詳細橋梁）の材料パラメータ

記号	名前	単位	量
b_c	幅	mm	9200
t_c	厚み	mm	60

表 6-5 補剛材（横構・対傾構）の材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
b	幅	mm	40
t	厚み	mm	40
I	断面 2 次モーメント	mm^4	2.13×10^5
l_1	区間長さ 1	mm	950
l_2	区間長さ 2	mm	1200
l_3	区間長さ 3	mm	2400
l_4	区間長さ 4	mm	37500
l_5	区間長さ 5	mm	75000

表 6-6 補剛材（横桁・垂直補剛材・水平補剛材）の材料パラメータ

記号	名前	単位	量
E	ヤング率	MPa	200×10^3
t	厚み	mm	9
l_1	区間長さ 1	mm	37500
l_2	区間長さ 2	mm	75000
l_3	区間長さ 3	mm	475
l_4	区間長さ 4	mm	1425
l_5	区間長さ 5	mm	9500
l_6	区間長さ 6	mm	475

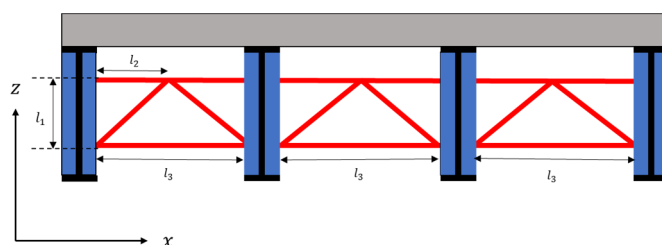


図 6-14 詳細橋梁モデルの概要図[(x, z)平面]

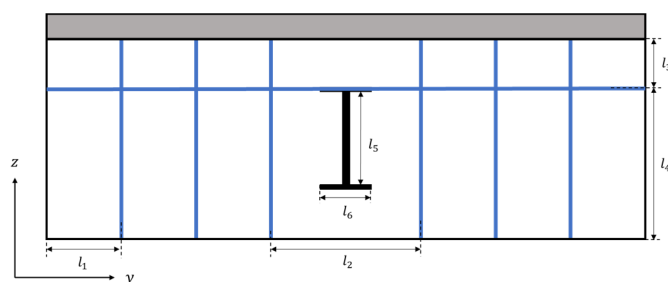


図 6-15 詳細橋梁モデルの概要図[(y, z)平面]

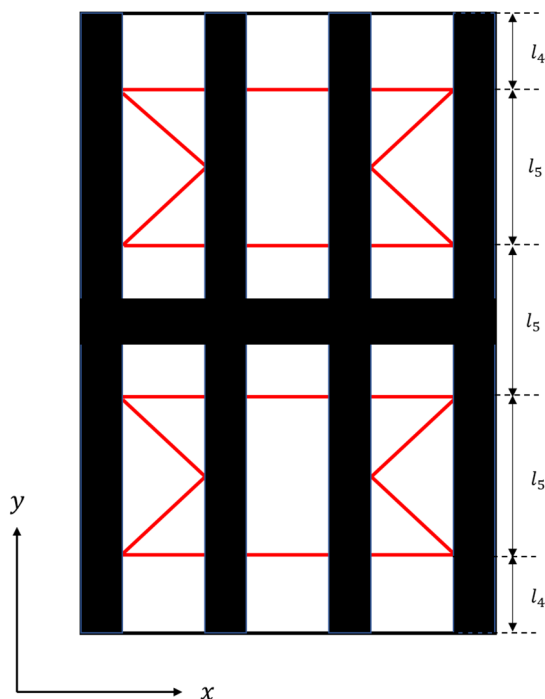


図 6-16 詳細橋梁モデルの概要図[(x, y)平面]

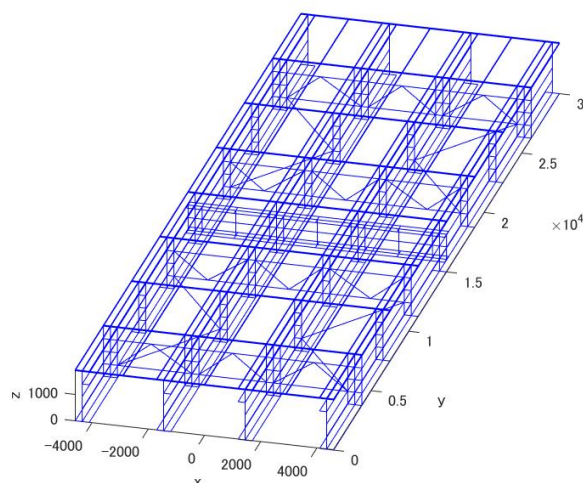


図 6-17 詳細橋梁モデルの全体図

6.3.2 数値計算結果

数値計算後の変形図を図 6-18 に示す. 青い点は変形前の節点座標で, 変形後の変位を 10000 倍拡大して描画している. 上から下の部材へと荷重が伝わり, 下フランジが滑らかにたわんでいる様子が確認できる. また, (y, z)平面の詳細橋梁モデルの変形図を図 6-19, 図 6-20 にまとめた. 主桁の端を見ると, 下フランジが異常に反りあがっており, 完全な曲げ挙動の再現に至っているとは言い難い. 前節のモデルに比べ, 部材長が伸び, 様々な部材が追加されたことにより, 一つの要素がより歪な形となり, 計算条件が厳しくなったと推測される. 計算方法や境界条件を細かく設定することにより, 曲げ挙動の再現が改善できると考えられる. また, 4 本の主桁を x 軸方向に沿って 1~4 と番号を付け, それぞれの上フランジ, 中立軸, 下フランジのたわみ曲線を図 6-21, 図 6-22, 図 6-23, 図 6-24 にまとめた. 赤色のたわみ曲線が補剛材ありのモデル, 青色のたわみ曲線が補剛材なしのモデルである. 全ての主桁において, 補剛材によりたわみが抑えられていることが確認できた.

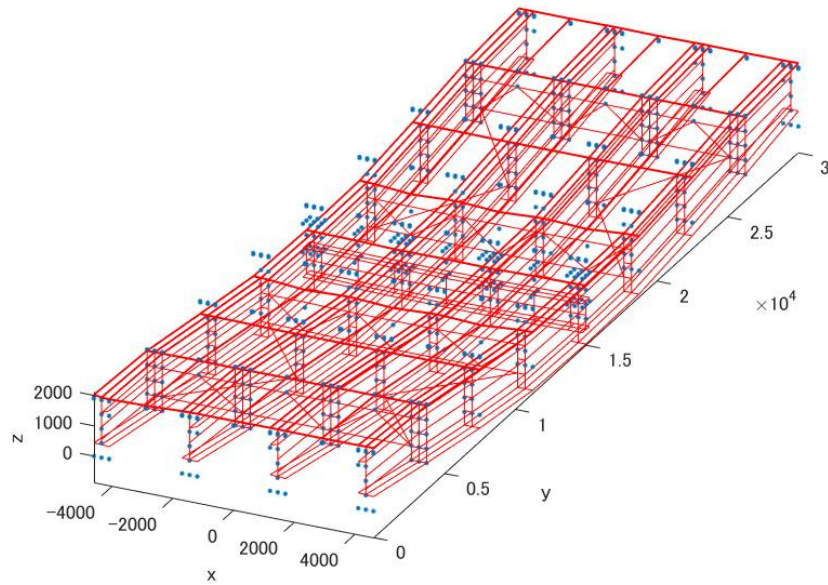


図 6-18 詳細橋梁モデルの変形図

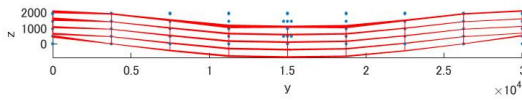


図 6-19 詳細橋梁モデルの変形図[(y, z)平面] (補剛材あり)

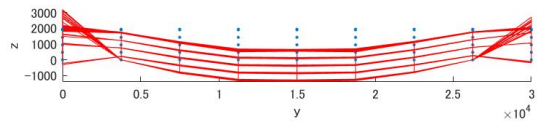


図 6-20 詳細橋梁モデルの変形図[(y, z)平面] (補剛材なし)

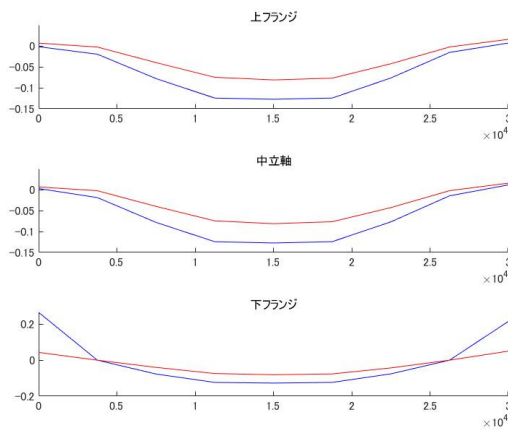


図 6-21 主桁 1 のたわみ曲線

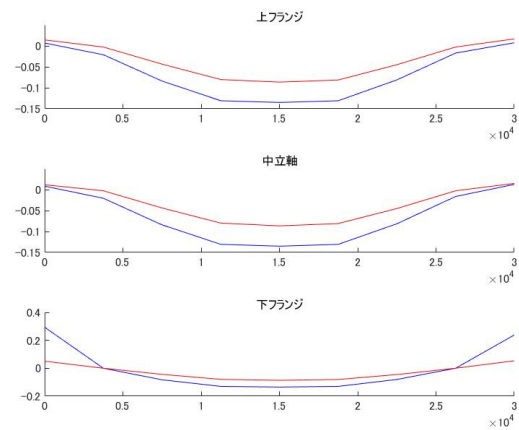


図 6-22 主桁 2 のたわみ曲線

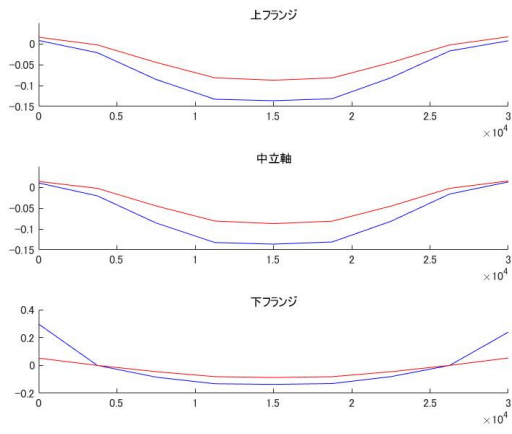


図 6-23 主桁 3 のたわみ曲線

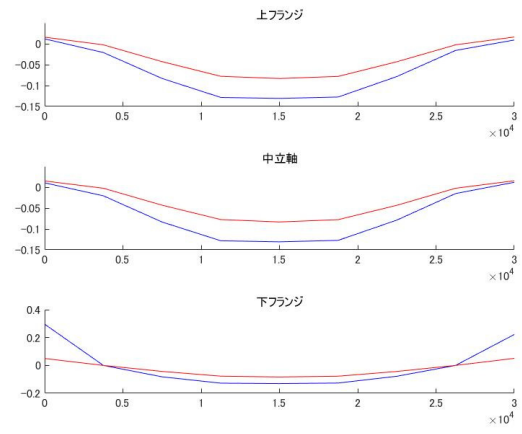


図 6-24 主桁 4 のたわみ曲線

第7章 まとめと考察

本研究では、Hermite 族要素について板要素とソリッド要素を定式化し、その妥当性について検証し、鋼桁と合成桁に実装した。また、梁要素と合わせて 3 つの要素を用いて詳細橋梁モデルを作成し、曲げ挙動の再現を試みた。結果より、次のような知見を得られた。

- 1, Hermite 族 Kirchhoff-Love 板要素の 1 節点 4 自由度モデルは 3 自由度モデルと比べ、曲げ問題の計算精度が優れる。
- 2, Hermite 族 Kirchhoff-Love 板要素は、十分な要素分割数を確保すれば、伸縮問題の計算精度が良い。
- 3, Hermite 族ソリッド要素は、十分な要素分割数を確保すれば、曲げ問題の計算精度が優れる。
- 4, Hermite 族板要素と Hermite 族ソリッド要素を鋼桁と合成桁に実装することが出来た。また、従来の Lagrange-Hermite 混合族要素と比べ、計算精度が改善された。
- 5, Hermite 族板要素でモデル化した鋼桁の曲げ変位は、Abaqus の数値計算結果より小さい値となり、完全に一致しなかった。Hermite 族板要素と Hermite 族ソリッド要素でモデル化した合成桁の曲げ変位に関しても同様の傾向を確認した。
- 6, Hermite 族梁要素, Hermite 族板要素, Hermite 族ソリッド要素をそれぞれ用いて詳細橋梁構造をモデル化し、曲げ挙動の再現を試みたが、完全な再現とは言い難く、改善の余地がある。

本研究では、既存の様々な要素と Hermite 族要素との比較には至っておらず、今後、精度や計算時間について詳細に比較検討する必要がある。また、実際の曲げ問題を解くためには座屈等の現象も考慮する必要がある。大変形問題への拡張が必須である。今後は大変形問題への拡張や、実験と数値計算の比較に加え、より複雑な構造物への適用、Hermite 族要素の利点が活かせるような構造モデルの開発等について検討していく。

謝辞

本研究で、丁寧なご指導を頂きました山本亨輔先生に深謝いたします。特に、研究だけでなく、発表資料作り等のたくさんのご指導を丁寧にご教授頂きました。

また、松島先生は合同ゼミにおいてたくさんのご指導を頂きました。

最後に、日ごろお世話になったフロ研ゼミの学生のみなさんに感謝を申し上げます。

参考文献

- 1) 村上翔 : 車両振動へのカルマンフィルタ適用による VBI システム同定の可能性に関する数値的検討, 修士論文, 2021
- 2) Alireza Beheshti: Novel quadrilateral elements based on explicit Hermite polynomials for bending of Kirchhoff–Love plates, *Computational Mechanics* 62:1199–1211, 2018
- 3) P. M. F. NIELSEN, I. J. LE GRICE, B. H. SMAILL, AND P. J. HUNTER : Mathematical model of geometry and fibrous structure of the heart, The American Physiological Society, 1991
- 4) Maatthew J. Gonzales and all: A three-dimensional finite element model of human atrial anatomy: New methods for cubic Hermite meshes with extraordinary vertices, *Medical Image Analysis* 17(2013) 525-537
- 5) 須藤大樹, 山本亨輔, : Hermite 型有限要素法を用いた移流方程式と Euler 方程式の数値解析, 土木学会全国大会第 76 回年次学術講演会, 2021
- 6) 井出康之, 登坂宣好 : CIP-有限要素法による非定常費圧縮粘性流れ問題の近似解析, 日本機械学会論文集(B 編), 論文 No. 96-1389
- 7) 柴田悦太郎, 楨原孝文, 棚橋隆彦 : CIP 有限要素法を用いた正方形キャビティ内自然解析, 日本機械学会論文集(B 編), 論文 No. 98-16
- 8) Andrew Gillette : Hermite and Bernstein Style Basis Functions for Cubic Serendipity Spaces on Squares and Cubes 2012
- 9) 有限要素法ハンドブック : 鷺津久一郎 [ほか] 共編 培風館 1981-1983
- 10) マトリックス有限要素法 II: O.C.ツイエンキーヴィッツ, R.L テイラー 訳者代表 矢川元基 科学技術出版社 1996
- 11) 平面シェル要素を用いたシェル構造の弾塑性解析 : 藤井大地 近畿大学論議資料
- 12) 鋼構造学 : 原隆, 山口隆司, 北原武嗣, 和多田康男 株式会社コロナ社 2007

付録

付録 A 補正行列 A

式(38)と同様に数値計算に用いた節点ごとの補正行列 \mathbf{A} を示す。Hermite 族板要素を用いた時の、節点 2~4 の補正行列を以下にまとめる。

節点 2 における補正行列 \mathbf{A}_2

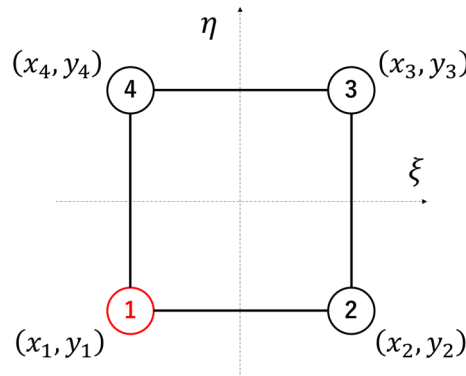
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_2 - x_1)}{2} & \frac{(y_2 - y_1)}{2} \\ 0 & \frac{(x_3 - x_2)}{2} & \frac{(y_3 - y_2)}{2} \end{bmatrix}$$

節点 3 における補正行列 \mathbf{A}_3

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_3 - x_4)}{2} & \frac{(y_3 - y_4)}{2} \\ 0 & \frac{(x_3 - x_2)}{2} & \frac{(y_3 - y_2)}{2} \end{bmatrix}$$

節点 4 における補正行列 \mathbf{A}_4

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_3 - x_4)}{2} & \frac{(y_3 - y_4)}{2} \\ 0 & \frac{(x_4 - x_1)}{2} & \frac{(y_4 - y_1)}{2} \end{bmatrix}$$



付録 A-1 板要素の節点 1 における座標と節点の対応関係

次に Hermite 族ソリッド要素を用いた時の、節点 2~8 の補正行列を以下にまとめる。

節点 2 における補正行列 \mathbf{A}_2

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_6 - x_2)}{2} & \frac{(y_6 - y_2)}{2} & \frac{(z_6 - z_2)}{2} \\ 0 & \frac{(x_4 - x_2)}{2} & \frac{(y_4 - y_2)}{2} & \frac{(z_4 - z_2)}{2} \\ 0 & \frac{(x_2 - x_1)}{2} & \frac{(y_2 - y_1)}{2} & \frac{(z_2 - z_1)}{2} \end{bmatrix}$$

節点 3 における補正行列 \mathbf{A}_3

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_7 - x_3)}{2} & \frac{(y_7 - y_3)}{2} & \frac{(z_7 - z_3)}{2} \\ 0 & \frac{(x_3 - x_1)}{2} & \frac{(y_3 - y_1)}{2} & \frac{(z_3 - z_1)}{2} \\ 0 & \frac{(x_4 - x_3)}{2} & \frac{(y_4 - y_3)}{2} & \frac{(z_4 - z_3)}{2} \end{bmatrix}$$

節点 4 における補正行列 \mathbf{A}_4

節点 5 における補正行列 \mathbf{A}_5

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_8 - x_4)}{2} & \frac{(y_8 - y_4)}{2} & \frac{(z_8 - z_4)}{2} \\ 0 & \frac{(x_4 - x_2)}{2} & \frac{(y_4 - y_2)}{2} & \frac{(z_4 - z_2)}{2} \\ 0 & \frac{(x_4 - x_3)}{2} & \frac{(y_4 - y_3)}{2} & \frac{(z_4 - z_3)}{2} \end{bmatrix}$$

節点 6 における補正行列 \mathbf{A}_6

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_6 - x_2)}{2} & \frac{(y_6 - y_2)}{2} & \frac{(z_6 - z_2)}{2} \\ 0 & \frac{(x_8 - x_6)}{2} & \frac{(y_8 - y_6)}{2} & \frac{(z_8 - z_6)}{2} \\ 0 & \frac{(x_6 - x_5)}{2} & \frac{(y_6 - y_5)}{2} & \frac{(z_6 - z_5)}{2} \end{bmatrix}$$

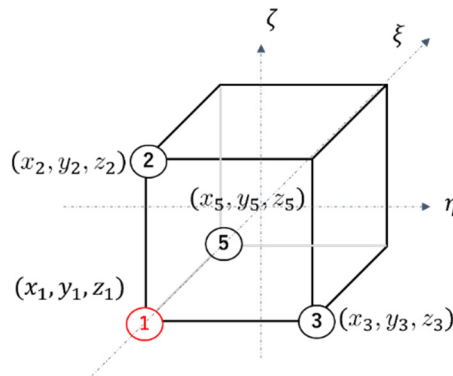
節点 8 における補正行列 \mathbf{A}_8

$$\mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_8 - x_4)}{2} & \frac{(y_8 - y_4)}{2} & \frac{(z_8 - z_4)}{2} \\ 0 & \frac{(x_8 - x_6)}{2} & \frac{(y_8 - y_6)}{2} & \frac{(z_8 - z_6)}{2} \\ 0 & \frac{(x_8 - x_7)}{2} & \frac{(y_8 - y_7)}{2} & \frac{(z_8 - z_7)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_5 - x_1)}{2} & \frac{(y_5 - y_1)}{2} & \frac{(z_5 - z_1)}{2} \\ 0 & \frac{(x_7 - x_5)}{2} & \frac{(y_7 - y_5)}{2} & \frac{(z_7 - z_5)}{2} \\ 0 & \frac{(x_6 - x_5)}{2} & \frac{(y_6 - y_5)}{2} & \frac{(z_6 - z_5)}{2} \end{bmatrix}$$

節点 7 における補正行列 \mathbf{A}_7

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x_7 - x_3)}{2} & \frac{(y_7 - y_3)}{2} & \frac{(z_7 - z_3)}{2} \\ 0 & \frac{(x_7 - x_5)}{2} & \frac{(y_7 - y_5)}{2} & \frac{(z_7 - z_5)}{2} \\ 0 & \frac{(x_8 - x_7)}{2} & \frac{(y_8 - y_7)}{2} & \frac{(z_8 - z_7)}{2} \end{bmatrix}$$



付録 A-2 ソリッド要素の節点 1 における座標と節点の対応関係