残差に基づく有限要素法の数値解補正法の検討

Numerical solution of the Finite Element Method based on residuals considerations on the correction method

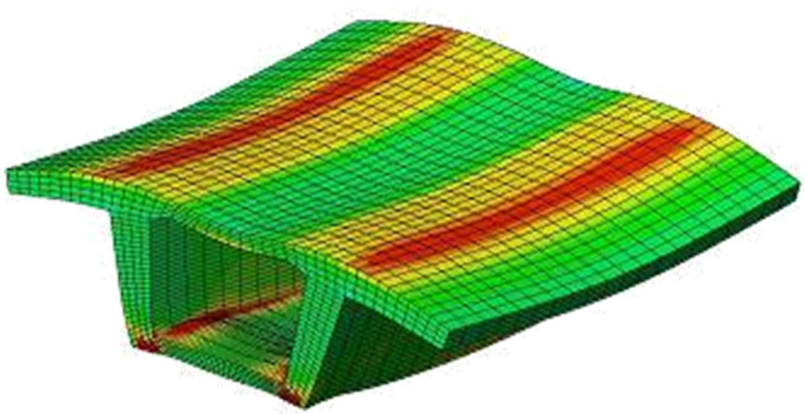
筑波大学 理工情報生命学術院
システム情報工学研究群
構造エネルギー工学学院プログラム

YU HUAIZHI

指導教員：山本亨輔 助教
松島亘志 教授
アランニャ クラウス デ カステロ 助教

背景

有限要素法
FEMとは微分方程式の数値解法
Finite Element Method



離散化

内積

$$u(x) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}(x)$$

連続関数　離散点の解（**数値解**）　**基底**（補間関数）

連立方程式化

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow [\mathrm{A}]\{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{b}\}$$

引用：https://www.jip-ts.co.jp/product_service/fem/

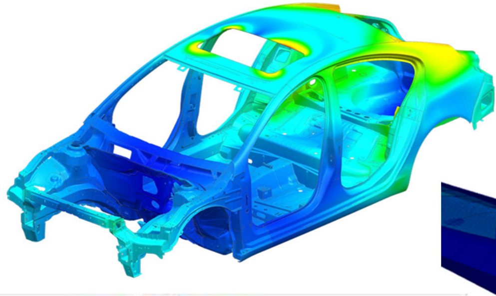
背景

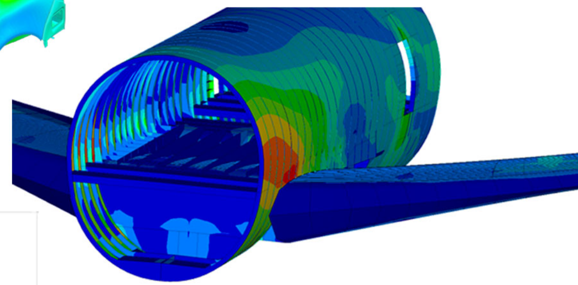
最小ポテンシャルエネルギー

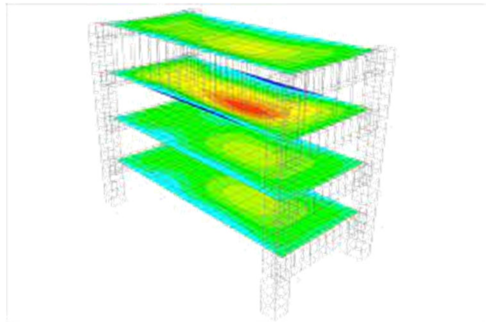
自動車

航空機

建築物





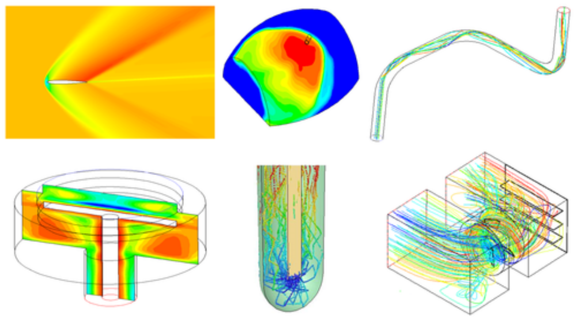


重み付き残差法

熱

流体

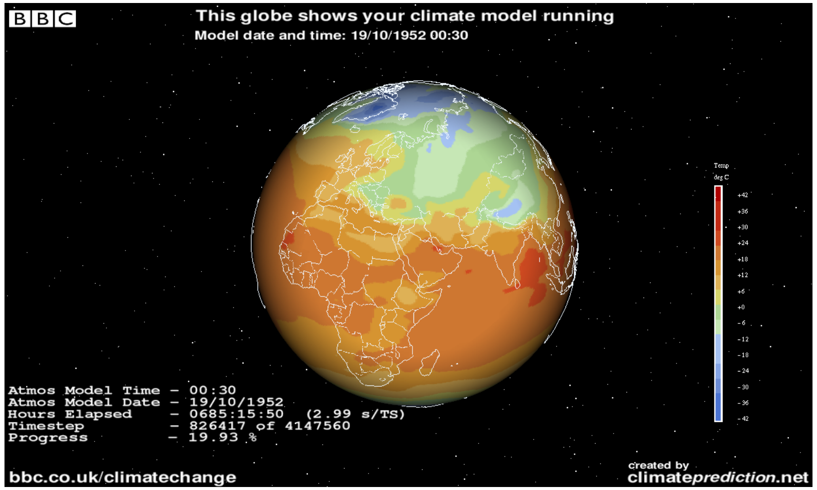
電磁場



引用：
https://www.plm.automation.siemens.com/global/ja/webinar/cae-vehicle-structural-analysis-process/69036
Altair for Aerospace: simulation modeling, design optimization, implicit, explicit, electromagnetic, multi-body dynamics
http://furui-kozo.com/analysis.html
https://www.rccm.co.jp/product/fluid/ansys-fluent/

背景

大規模計算

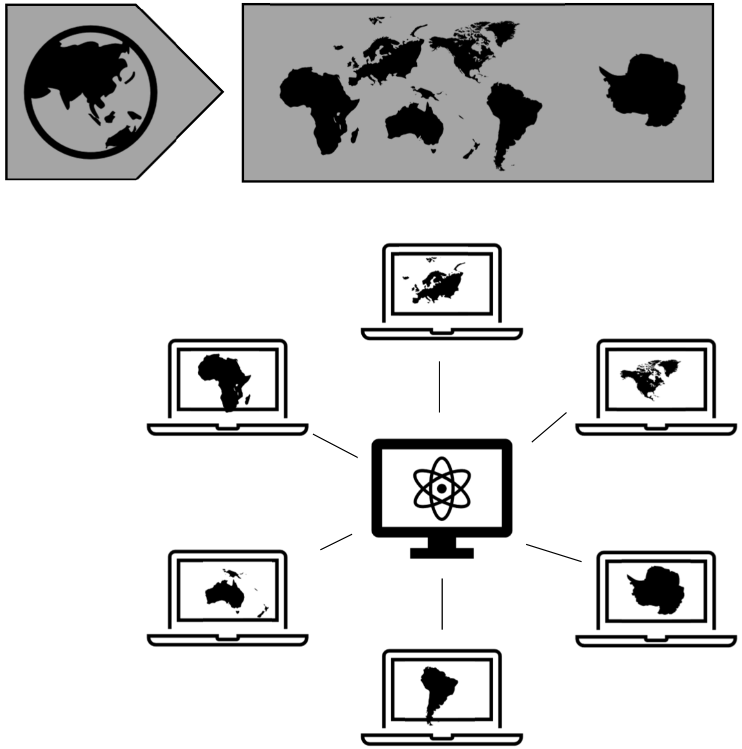


例：地球全体の降水シミュレーション

単一のパソコン

計算負荷が高い
効率性が低い

分散コンピューティング



効率性が高い

引用：https://zh.wikipedia.org/wiki/Climateprediction.net#/media/File:CPDN-Client.png

背景

時間部分項処理

重み付き残差法

WRM

Weighted Residual Method

陽解法	陰解法
安定性が**低い**	安定性が**高い**
並列計算への適用性が**高い**	並列計算への適用性が**低い**

安定性改善できると → **有限要素法で解ける問題増える**

モンテカルロ法による**修正** → **遺伝的アルゴリズム**を**適用**

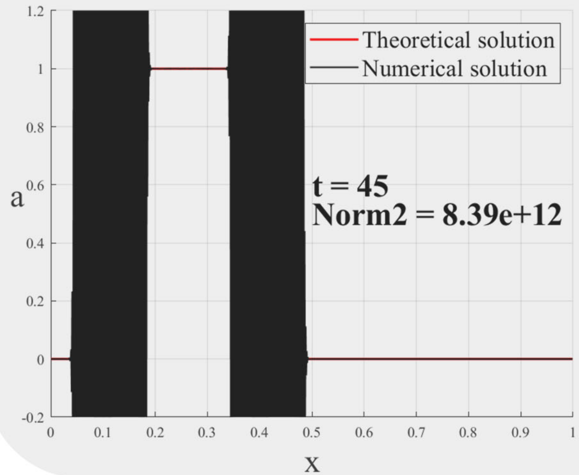
安定性に関する考察

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

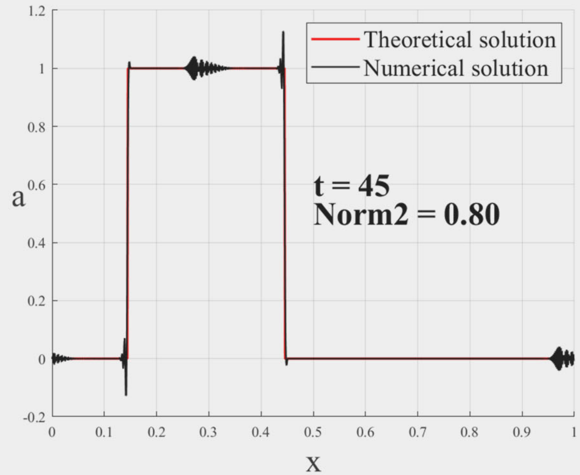
境界条件	周期境界条件
基底関数	一次ラグランジュ型
c：移流速度	1.00
L：計算領域	$0 \le x \le 1$
Δx：空間刻み幅	0.0001
Δt：時間刻み幅	0.0001

$$Norm2 = \sum_{i=1}^{K} \sqrt{(u_i - a_i)^2}$$

5時刻ステップ出力

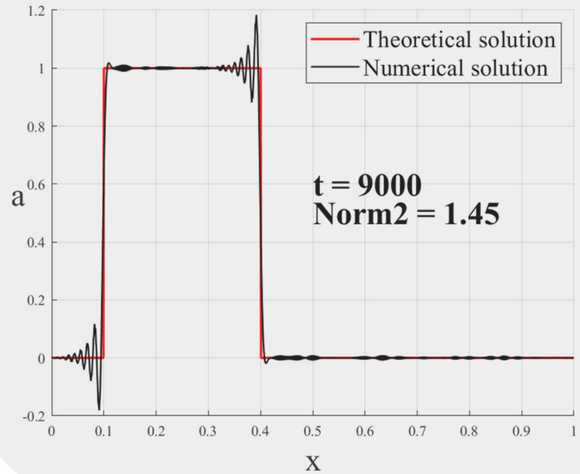


オイラー前進法



ルンゲ＝クッタ法

1000時刻ステップ出力



ルンゲ＝クッタ法

安定性に関する考察

近似解$\hat{u}(x)$を代入すると結果は**スカラ**（＝残差R）

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \hat{u}(x) = a_i\psi_i(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial t} + c\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial x} = R$$

残差Rを**重み付き残差**ϕRにして，**連立方程式化**

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}\left(\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial t} + c\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = \boxed{\int_0^L \boldsymbol{\phi} R\mathrm{d}x = 0}$$

重み付き残差の平均ゼロの仮定

$$\underbrace{\left[\int_0^L \psi_i\psi_j dx\right]}_{\boldsymbol{M}}\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \underbrace{\left[c\int_0^L \psi_i\frac{\partial \psi_j}{\partial x}dx\right]}_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

安定性に関する考察

重み付き残差法
WRM ➡ 『**重み付き残差平均**を**ゼロ**とする**数値解**の算出』
Weighted Residual Method

≠

『**残差**を**最小化**する**数値解**の算出』

理論上，最も良い数値解？ → 残差を改善する余地はある？

残差に関する考察

$$Residual = \sum |R_x|$$

$$\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial t} + c\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial x} = R$$

$$\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial t} = \frac{a(t+\Delta t,x)-a(t,x)}{\Delta t}\psi_i(x)$$

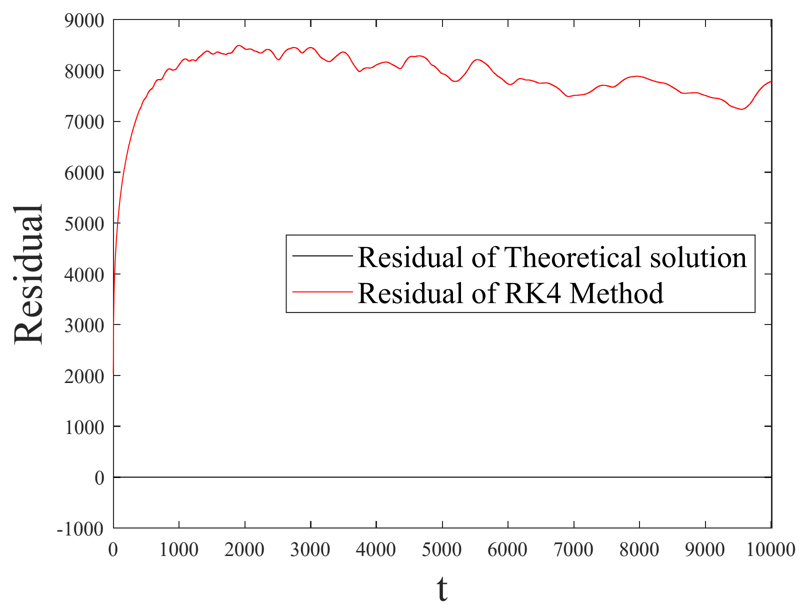
前進差分法

$$c\frac{\partial(a_i\psi_i(x))}{\partial x} = c\frac{a(t,x)-a(t,x-\Delta x)}{\Delta x}\frac{\psi_i(x)}{\partial x}$$

後退差分法

$$\frac{a(t+\Delta t,x)-a(t,x)}{\Delta t}\psi_i(x) + c\frac{a(t,x)-a(t,x-\Delta x)}{\Delta x}\frac{\psi_i(x)}{\partial x} = R$$

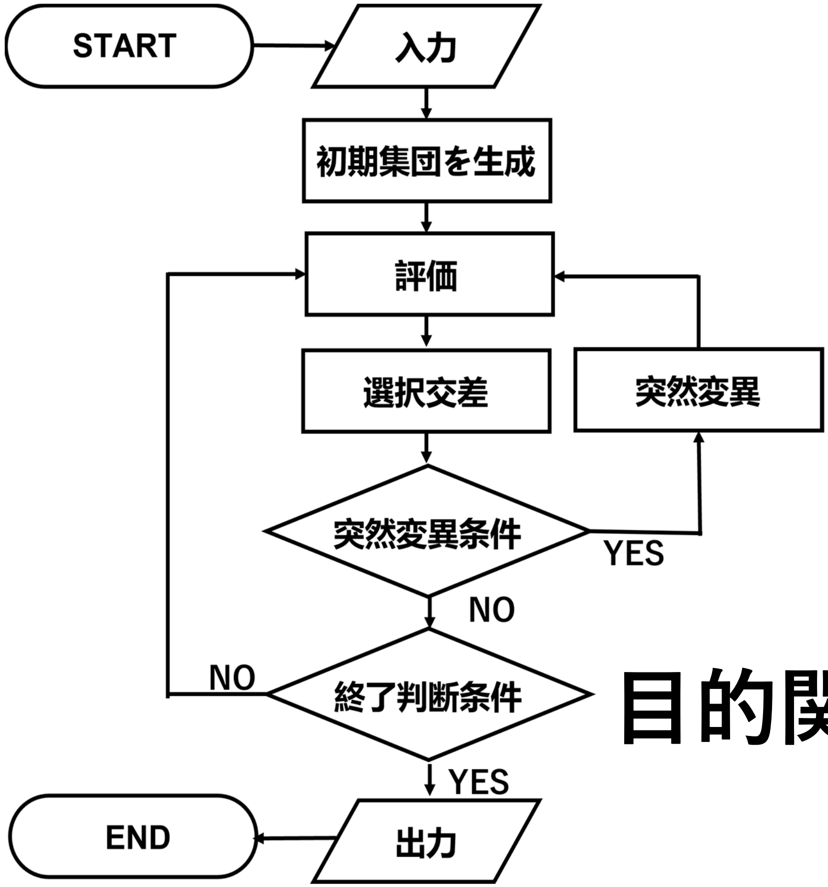
改善余地がある



理論解：各時刻においても残差値が**ゼロ**
ルンゲ＝クッタ法：常に残差が存在

遺伝的アルゴリズム（GA）

遺伝的アルゴリズムは，生物進化の 原理に着想を得た確率的探索アルゴリズム



修正 $\boxed{\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\gamma}}$

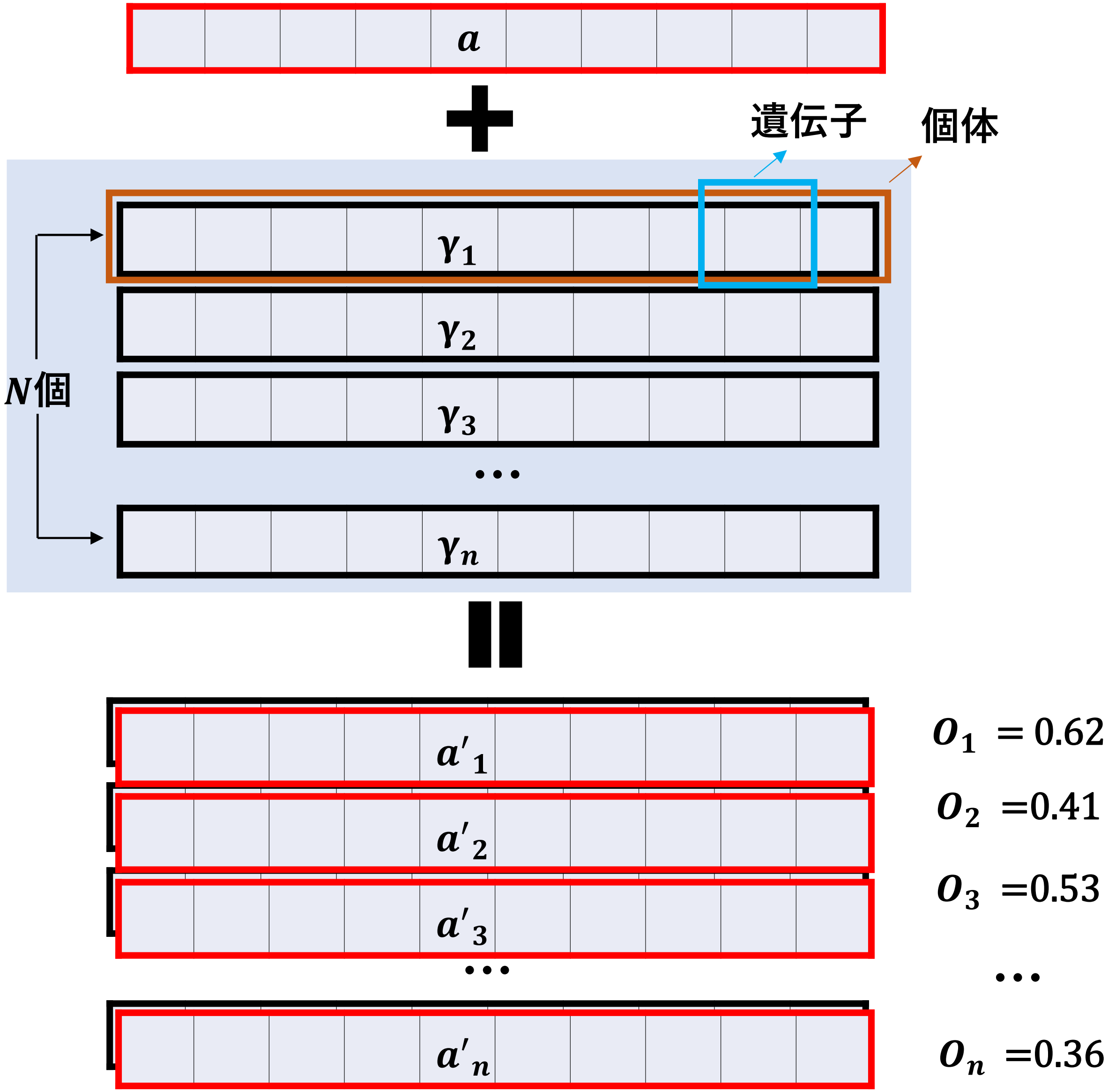
修正後の値　数値解　修正ベクトル

$\boldsymbol{a}'$を残差式に代入すると残差R'得られる

$$\boxed{\frac{\partial(a'_i\psi_i(x))}{\partial t} + c\frac{\partial(a'_i\psi_i(x))}{\partial x} = R'}$$

残差Rを目的関数に代入すると適応度が得られる

目的関数 $$O = \frac{1}{\|R'\|_2} = \frac{1}{\sqrt{R'^2_1 + R'^2_2 + R'^2_3 + \cdots + R'^2_K}}$$

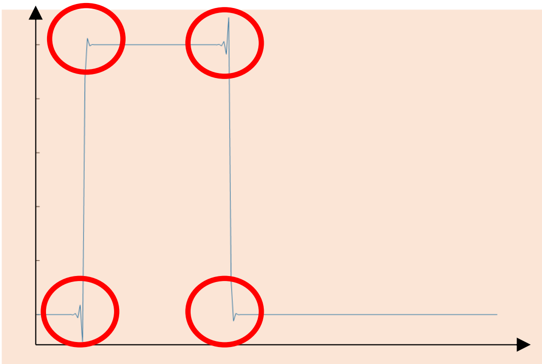


正規化による個体の選択率が決まる

$$P_i = \frac{O_i}{\sum_1^N O_i}$$

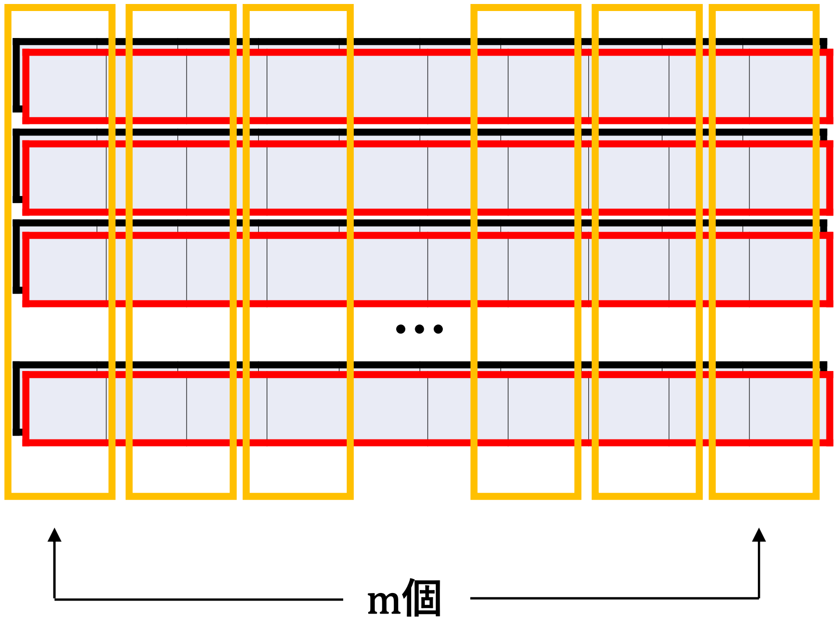
適応度($fitness$)が高ければ選択される確率が高い

遺伝的アルゴリズム（GA）



残差が全領域に発生するではない

閾値を**超える**　**生成**
閾値を**超えない**　**ゼロ**



個体をm個　遺伝子グループに**分割**
選択をそれぞれ**グループ**ごとに行う

他の遺伝子の影響を**抑える**
ゼロ部分の計算を**省略**

数値解修正プロセス

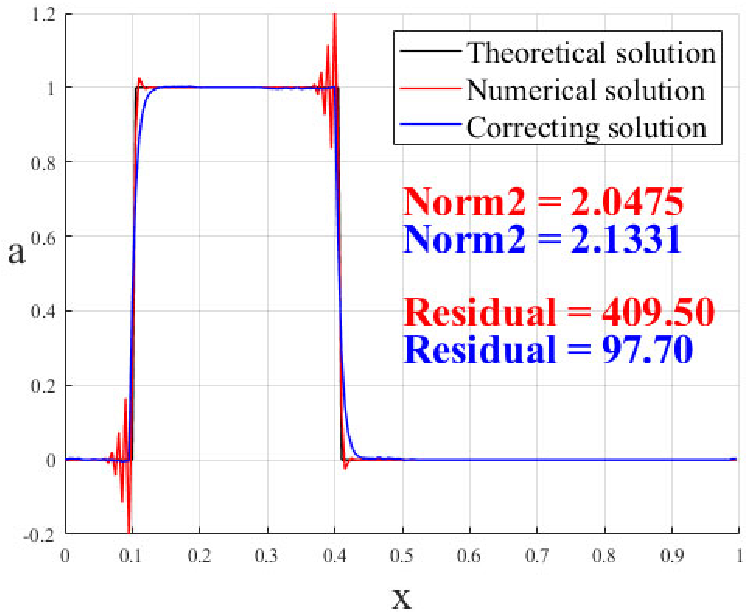
数値解計算条件

修正時刻	1st STEP
基底関数	一次ラグランジュ型
c：移流速度	1.00
L：計算領域	$0 \leq x \leq 1$
Δx：空間刻み幅	0.0050
Δt：時間刻み幅	0.0050

考察

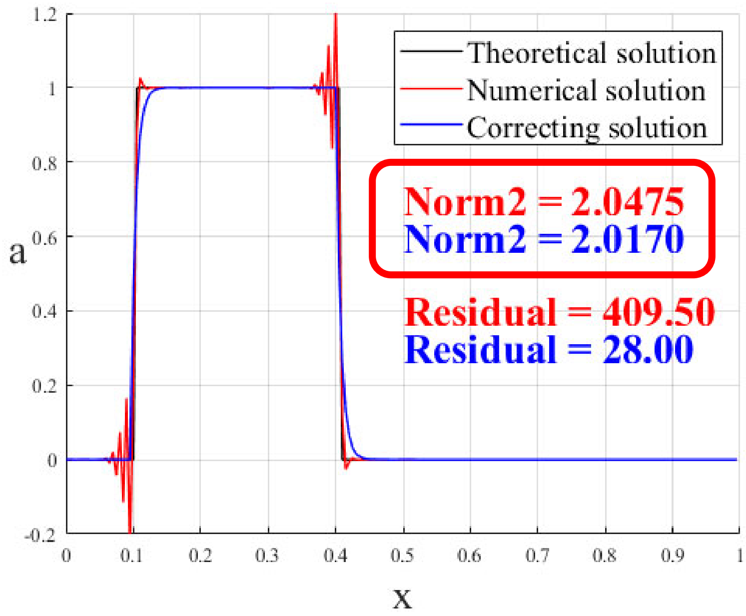
1. Residualを目的関数を減らした
2. 100分割について，40分割より理論解に近づいた
3. 40分割について，理論解から離れている数値になった
4. まだ効率的には改善余地がある。

40分割



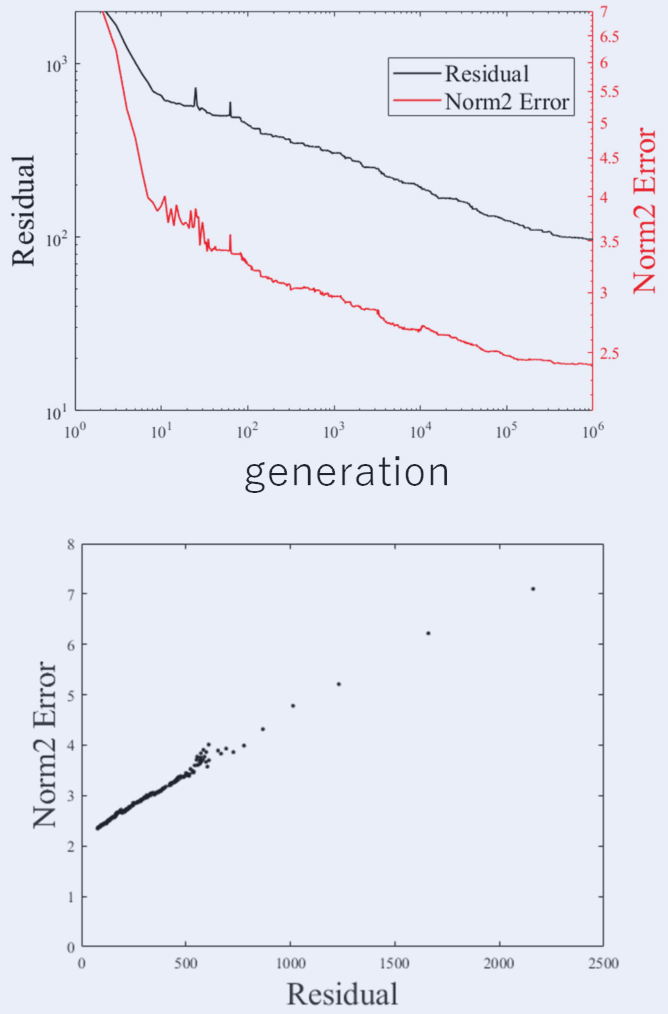
10^6世代目

100分割

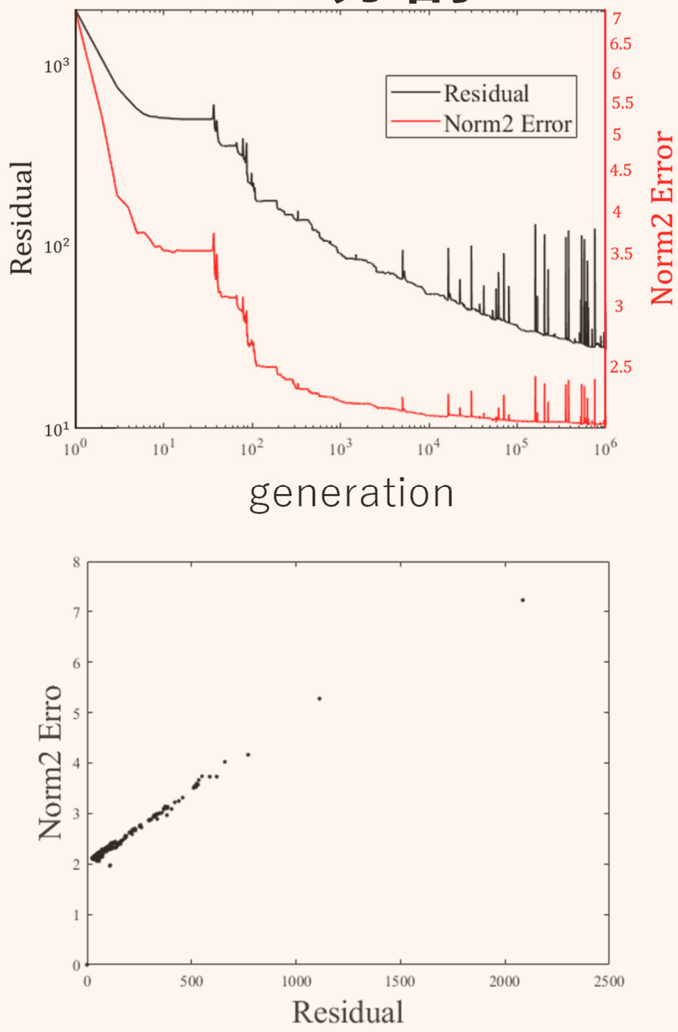


結果と考察

40分割



100分割



100分割修正効率が40分割より高い

残差と2ーノルム誤差と**比例関係**を持つ

残差に基づく修正が**可能**

まとめ

確認した結果と得られる知見

1） 重み付き残差法数値解に残差が残る
2） ルンゲ＝クッタ法は前進オイラー 法より高い精度を持つ
3） 遺伝的アルゴリズムにより，残差に基づく重み付き残差法数値解の修正が可能
4） 修正済み数値解の 2 －ノルム誤差と残差には比例関係がある.

残る課題

1）分割数の変更
40と100以外の分割パターンに関する研究を行う.
2）最適化アルゴリズムの変更
差分進化（Differential evolution）の検討を行う.
3）目的関数のデザイン
より適切な目的関数を開発する必要がある

ご清聴ありがとうございました