梁の曲げ応力とたわみ

Bending Stress and Deflection

構造力学 03

システム情報系 助教
山本亨輔
yamamoto_k@kz.tsukuba.ac.jp

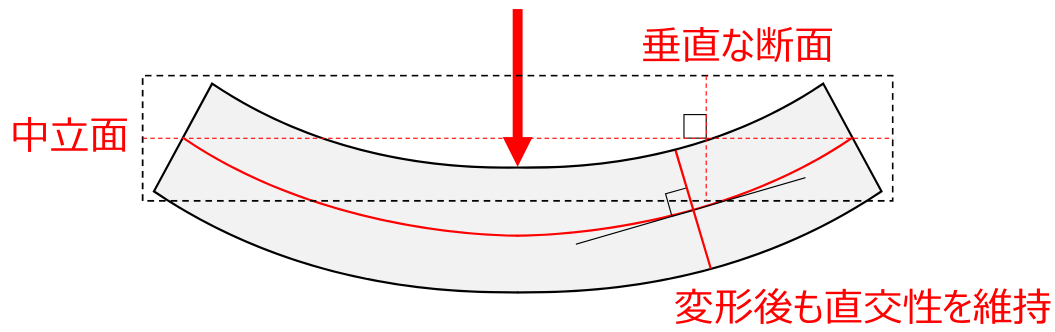
作成日：2018年3月17日
修正日：2018年10月11日

Structures that resist Bending
曲げに抵抗する構造

平面保持仮定から、梁の**たわみ**を求める

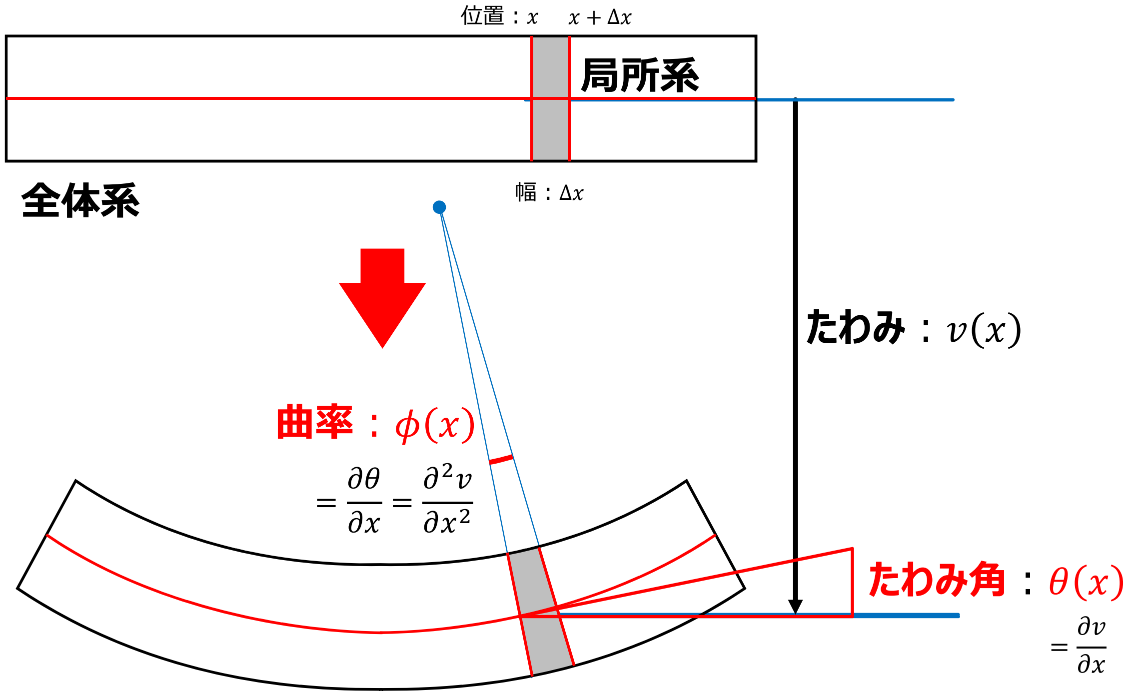
オイラー・ベルヌーイ
Euler-Bernoulli Hypothesis

- 変形前に中立面に対して垂直だった断面は、変形後も垂直



Euler Bernoulli Hypothesis
平面保持仮定

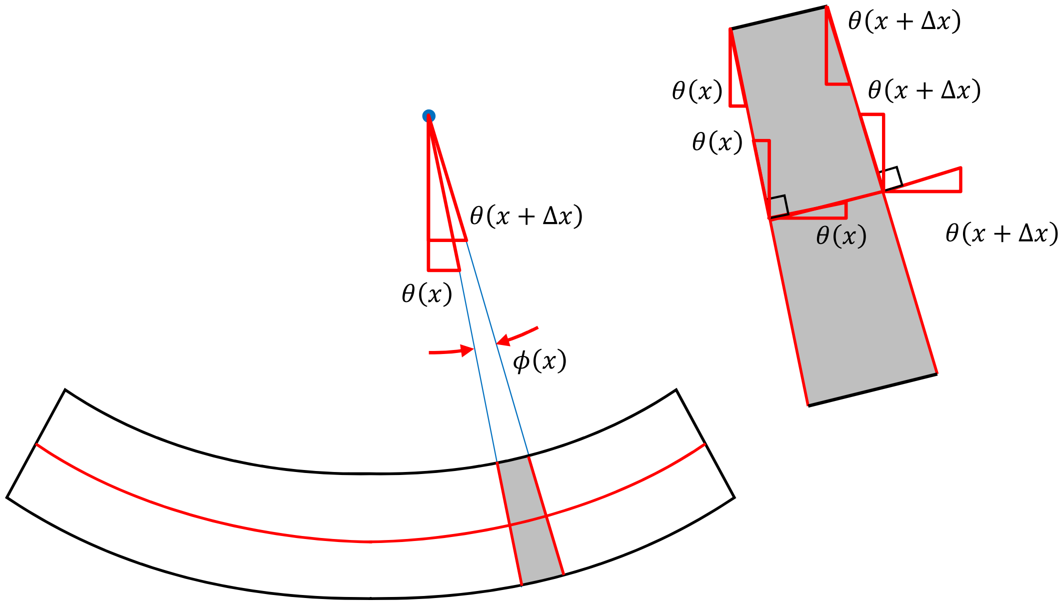
- 平面保持仮定は**幾何学的**に展開できる



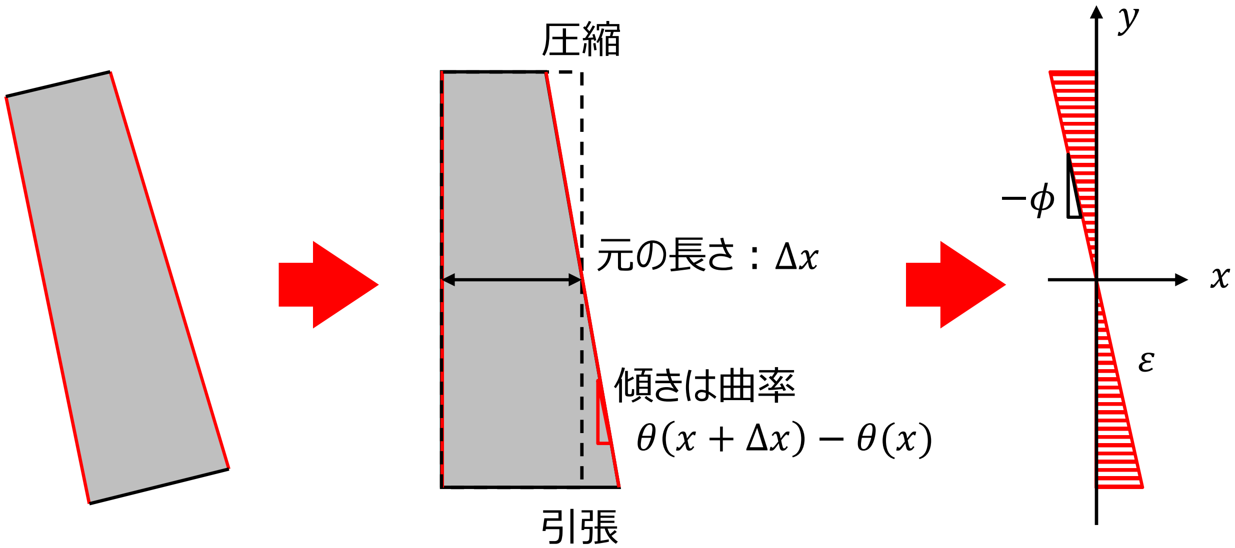
Curvature
曲率の幾何学的解説

☐ **曲率**は**たわみ角**の変化率

※ たわみ角・曲率をここでは「傾き」で表していることに注意！



Strain Distribution
ひずみ分布



ひずみ分布： $\varepsilon = \dfrac{\text{変形量}}{\Delta x} = -\dfrac{\big(\theta(x+\Delta x)-\theta(x)\big)\times y}{\Delta x}$

$$= -\frac{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)}{\Delta x} \times y \ = -\phi y$$

軸方向のひずみ ε が
鉛直方向変位量 ϕ で表現できる！

中立面より上（$y > 0$）のとき、圧縮（$\varepsilon < 0$）
中立面より下（$y < 0$）のとき、引張（$\varepsilon > 0$）

※簡単のためy軸を下向きにすることも多い ➡ 汎用性が下がるのでここでは上向き：正

Mathematical Expression of Euler Bernoulli Hypothesis
平面保持仮定の数学的表現

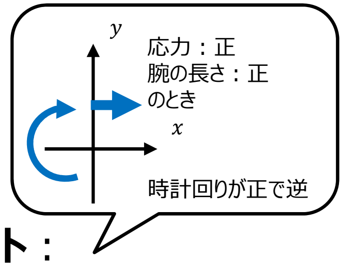
□ 平面保持仮定

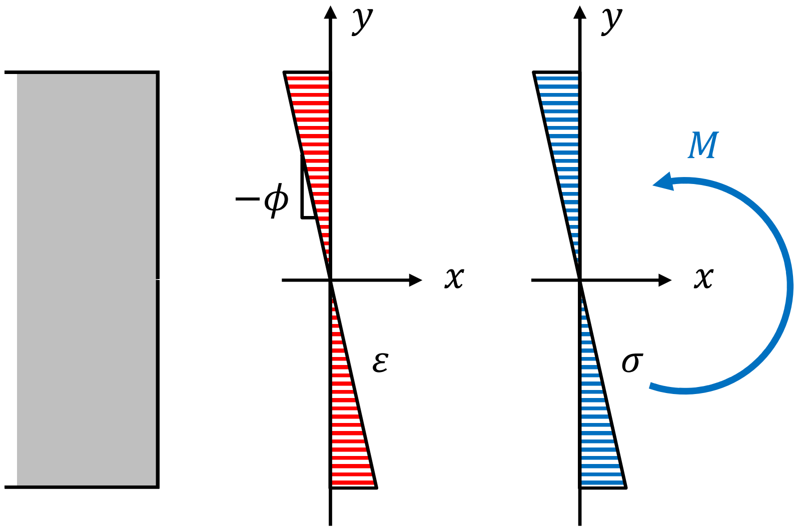
- □ 変形前に中立面に対して垂直だった断面は、変形後も垂直
- □ 数学的表現： $\varepsilon = -\phi y$

□ 平面保持仮定とフックの法則

- □ **曲げ応力** $\sigma = E\varepsilon = -E\phi y$

Bending Stress and Bending Moment
曲げ応力と曲げモーメント





$$\varepsilon = -\phi y$$

$$\sigma = E\varepsilon = -E\phi y$$

曲げモーメント：

$$M = -\int_S \sigma \cdot y \, dA = -\int_S (-E\phi y)\, y \, dA = E\phi \int_S y^2 \, dA = EI\phi$$

断面二次モーメント：

$$I = \int_S y^2 \, dA$$

Conclusion of the Hypothesis
平面保持仮定の結論

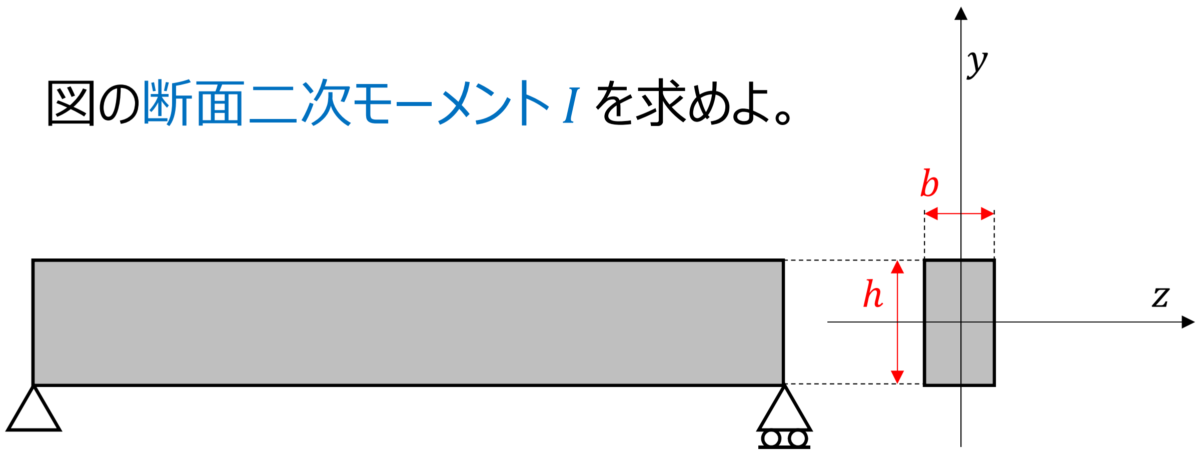
- **平面保持仮定**と**フックの法則**の組み合わせ

$$\varepsilon = -\phi y \quad \times \quad \sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = EI\phi}$$

- 断面二次モーメント I は**幾何学量**
  - 幾何学量・・・たとえば、他には**面積**や**体積**、**半径**や**直径**、**高さ**など
  - 断面二次モーメントは**梁の切断面の形状**によって決まる（**材料と無関係**）

Example: Moment of Inertia of Area
梁の例題『**断面二次モーメント**』

【例題】　図の断面二次モーメント I を求めよ。



【解答】

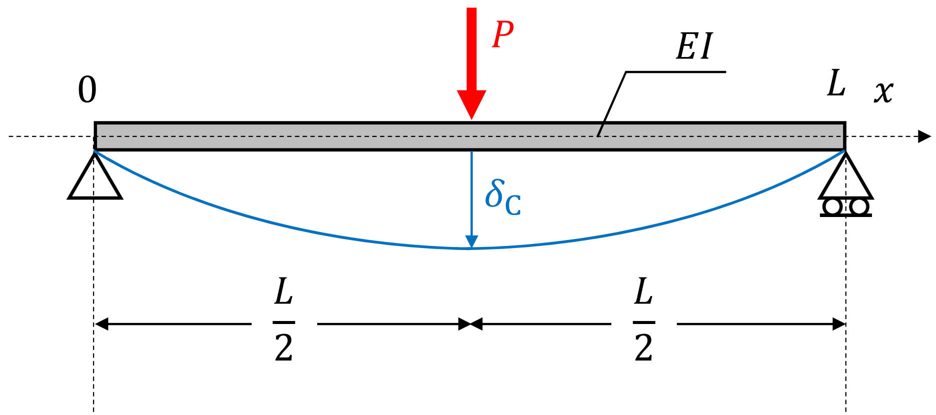
断面二次モーメント：

$$I = \int_S y^2\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\, \mathrm{d}z\ dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[y^2 z\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\ dy = b \times \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= b \times \left(\frac{h^3}{24} - \left(-\frac{h^3}{24}\right)\right) = \frac{bh^3}{12}$$

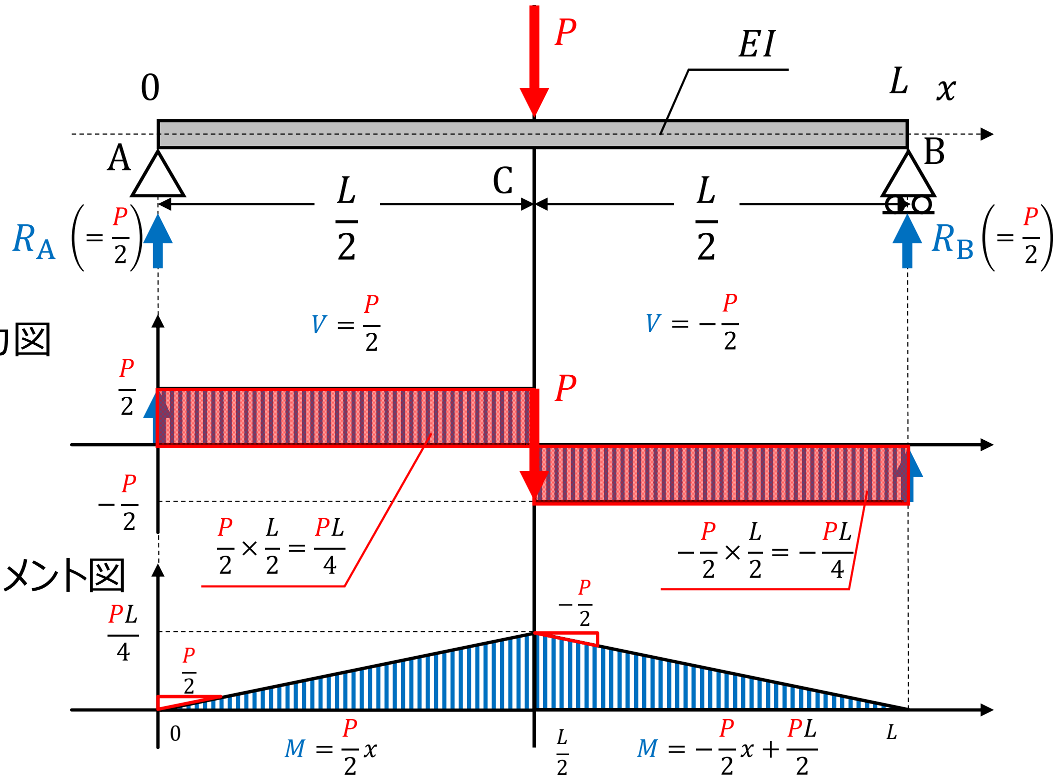
Example: Deflection of a Beam
梁の例題『**梁のたわみ**』

【例題】 梁（ヤング率：E、断面二次モーメント：I）に荷重 P が作用するとき、梁中央に生じるたわみ δ_C を求めよ。



Example: Deflection of a Beam
梁の例題『**梁のたわみ**』

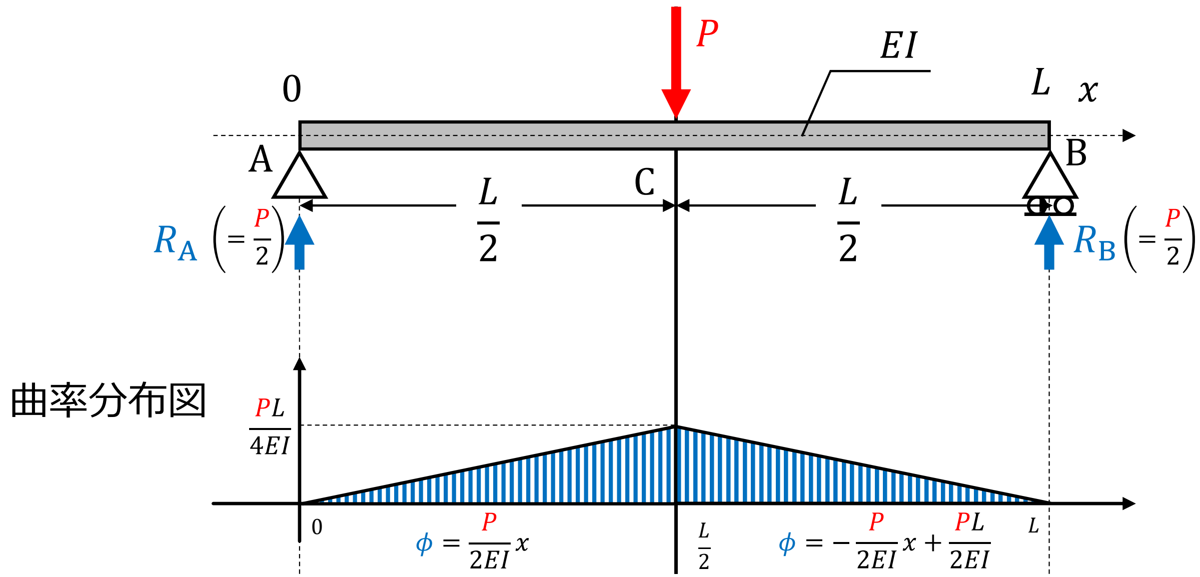
1. 内力（**せん断力·曲げモーメント**）を求める



Example: Deflection of a Beam
梁の例題『**梁のたわみ**』

2.　平面保持仮定の式を用いて曲率を求める

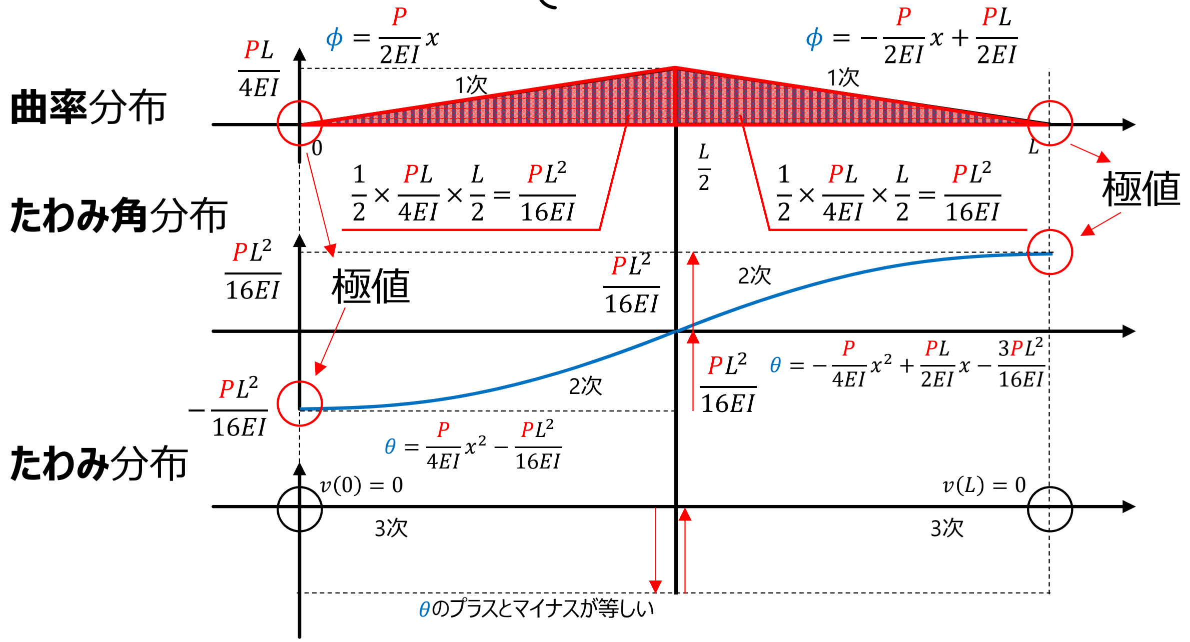
$$M = EI\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{M}{EI}$$



Example: Deflection of a Beam
梁の例題『**梁のたわみ**』

3.　曲率を2階積分してたわみを求める

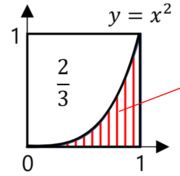
□ 境界条件を用いる：
$$\begin{cases} v(0) = v(L) = 0 \\ x = L/2\text{で}\theta\text{、}v\text{は連続} \end{cases}$$



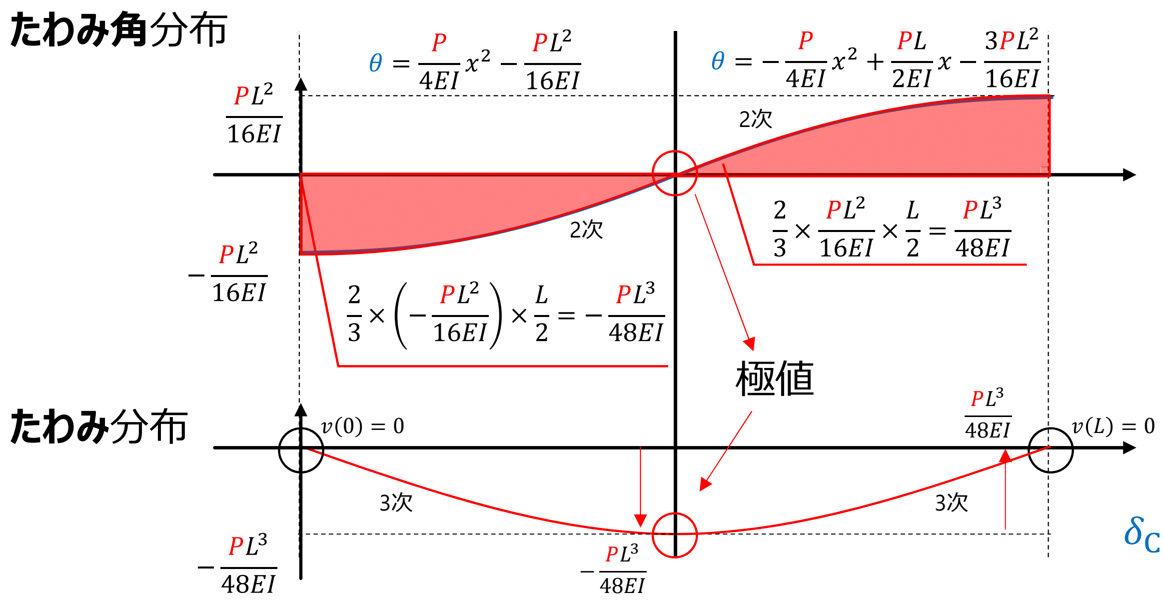
Example: Deflection of a Beam
梁の例題『**梁のたわみ**』

3.　曲率を2階積分してたわみを求める（続き）

◘ 放物線の積分



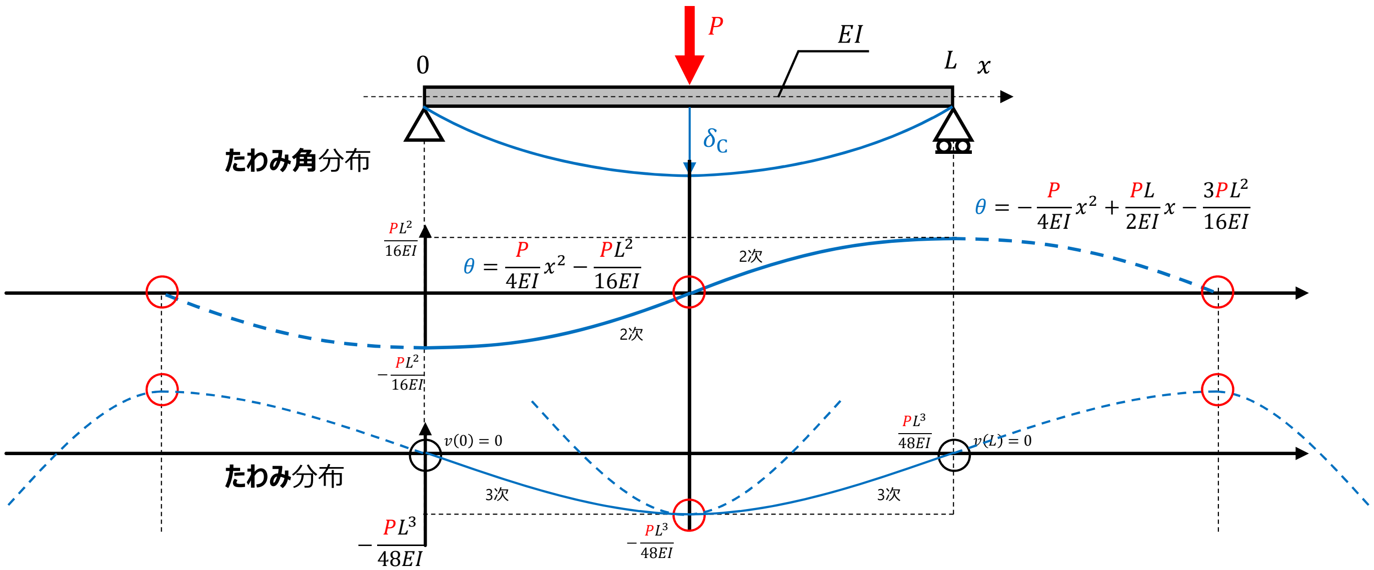
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



$$\delta_C = \frac{PL^3}{48EI}$$

Example: Deflection of a Beam
梁の例題『**梁のたわみ**』

□ 問題の答え $\delta_{\mathrm{C}} = \dfrac{PL^3}{48EI}$



$$v(x) = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{PL^2}{16EI}x$$

$$v(x) = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{PL}{4EI}x^2 - \frac{3PL^2}{16EI}x + \frac{PL^3}{48EI}$$

筑波大学
University of Tsukuba

IMAGINE
THE
FUTURE.