筑波大学
University of Tsukuba

IMAGINE THE FUTURE.

応力・ひずみ・フックの法則

Stress, Strain and Hooke's Law

構造力学 01

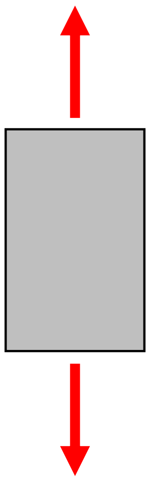
システム情報系 助教
山本亨輔
yamamoto_k@kz.tsukuba.ac.jp

作成日：2018年3月3日
修正日：2018年10月4日

The most important assumption
構造力学で最も大事な『仮定』

構造力学では、**フックの法則が成り立つことを仮定**する場合が非常に多い

- フックの法則　応力とひずみは比例する



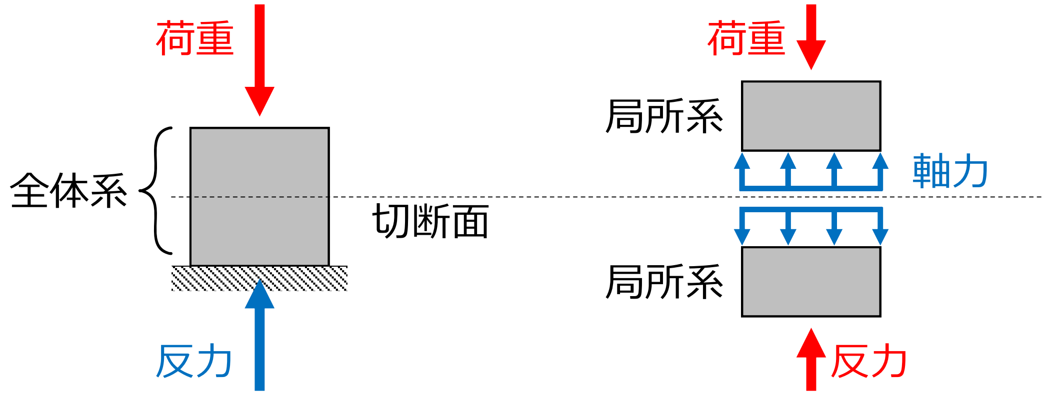
Classification of Forces
力の分類

外力

□ 全体系に働く力

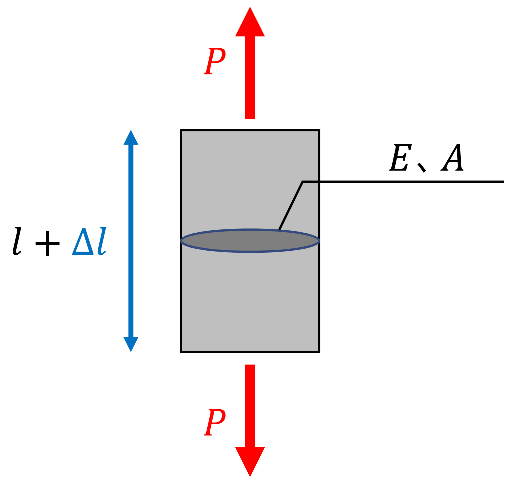
内力

□ 局所系に働く力



First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

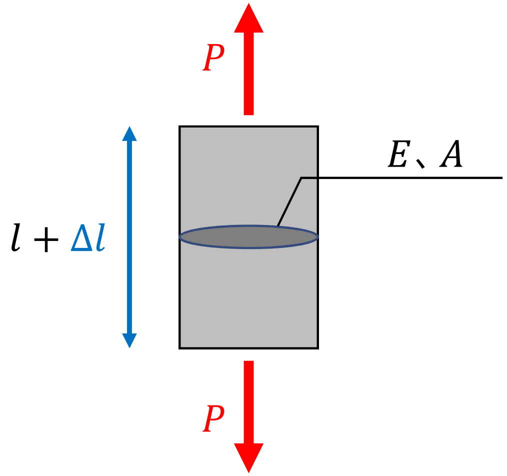
【例題】 棒材（ヤング率：E、断面積：A）に荷重 P が作用するとき、伸び Δl を求めよ。



First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

1. **全体系の力のつりあい式**を求める。

$$P - P = 0$$



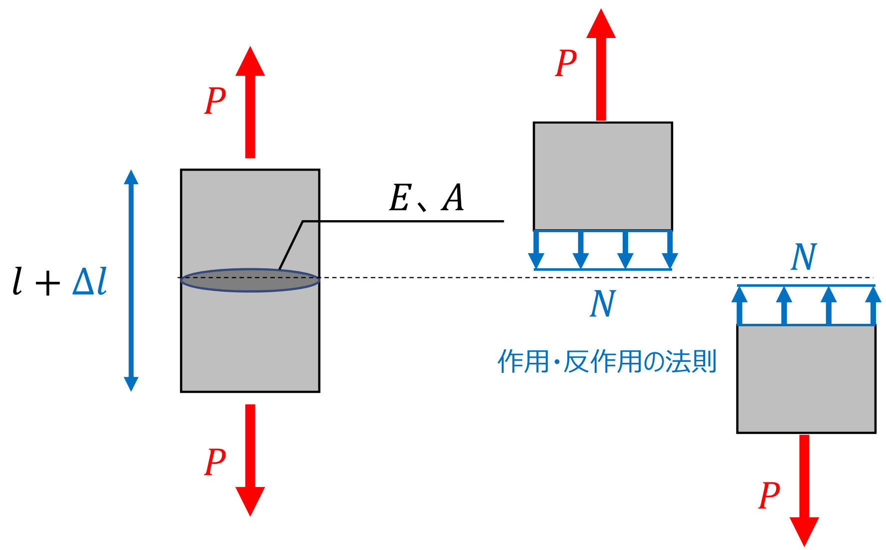
- □ 全体系の力なので『**外力**』
- □ 未知の**外力**が無いか確認

・・・この問題では無い

First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

2. **局所系の力のつりあい式**を求める。

□ 外力は確定済み ➡ **未知内力**は**切断面**に働く



上面の内力の和 (引張方向：正) ＝ **下面の内力の和** (引張方向：正)

$$P = N$$

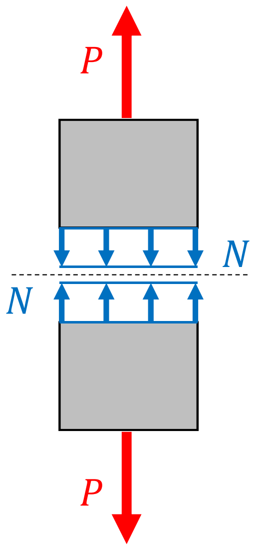
運動方程式が元なので
$P - N = 0$
が元の式（力のつりあい式）

$$N = P$$

この形式で書くと計算ミスが減る

First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

3. **応力を定義**する。



- 単位面積あたりの**内力**

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{N}{A}$$

- 応力の定義式は**力のつりあい式**と等価

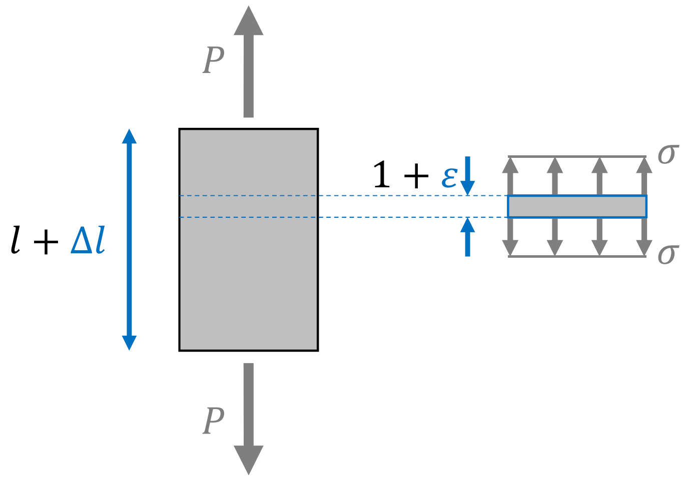
- **圧力**は『単位面積あたりの**外力**』

First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

3. **変形を定義**する。

- 元の長さに対する**変形量**の比

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



- **変形**のことを**ひずみ**という
- 変形量・・・ここでは『**伸び**』、他に**たわみ**や**ねじり角**など
- つまり『**変形**』と『**変形量**』は区別される

First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

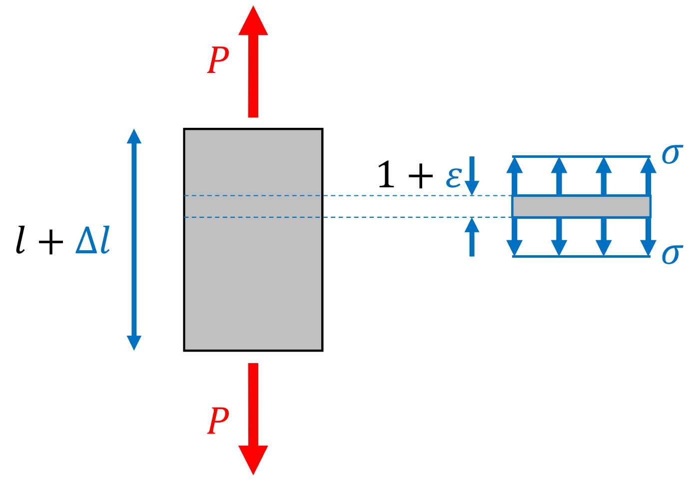
3. **フックの法則を仮定**する。

◻ **応力とひずみ**は比例する

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

超重要！暗記！

E：ヤング率（弾性係数）



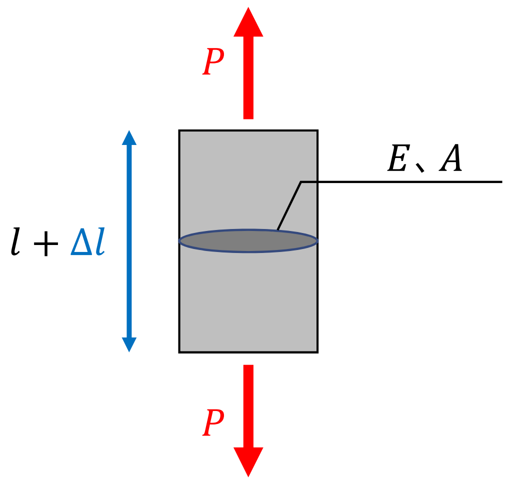
◻ 応力とひずみの定義式を代入 ➡ 解

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{N}{A}} \\ \boxed{\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}} \end{array}\right\} \quad \frac{P}{A} = \sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{Pl}{EA}}$$

First Example: Pure Tension of Rod
最初の例題『**棒材の引張**』

【例題】 棒材（ヤング率：E、断面積：A）に荷重 P が作用するとき、伸び Δl を求めよ。



【解答】

全体系の力のつりあい
$P - P = 0$

応力の定義式は
局所系の力のつりあい
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{N}{A}$$

ひずみの定義：
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

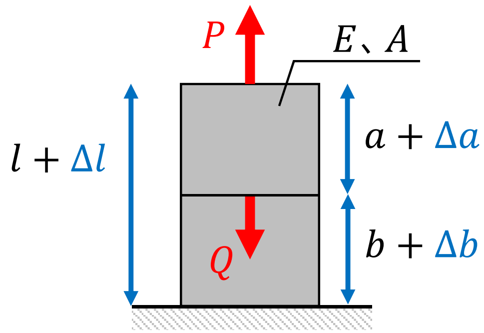
フックの法則より
$\sigma = E\varepsilon$

以上より、
$$\frac{P}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$$

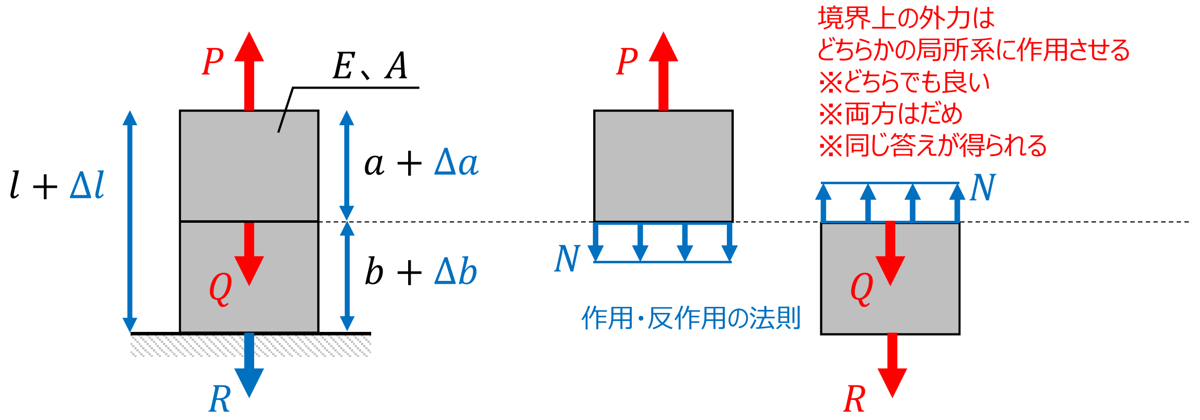
$$\boxed{\Delta l = \frac{Pl}{EA}}$$

Example: A Rod on which Multiple Loads Working
棒材の例題『複数の軸力が働く棒材』

【例題】 棒材（ヤング率：E、断面積：A）に荷重 P と Q が図のように作用するとき、全体の伸び Δl を求めよ。



Example: A Rod on which Multiple Loads Working
棒材の例題『複数の軸力が働く棒材』



全体系の力のつりあい

$$P-Q-R=0$$

$$R=P-Q$$

応力の定義（**局所系の力のつりあい**）

$$P=N \qquad N-Q=R$$

応力の式は
好きな方を使う

$$\sigma_a=\boxed{\frac{P}{A}}=\frac{N}{A} \qquad \sigma_b=\frac{N-Q}{A}=\boxed{\frac{R}{A}}$$

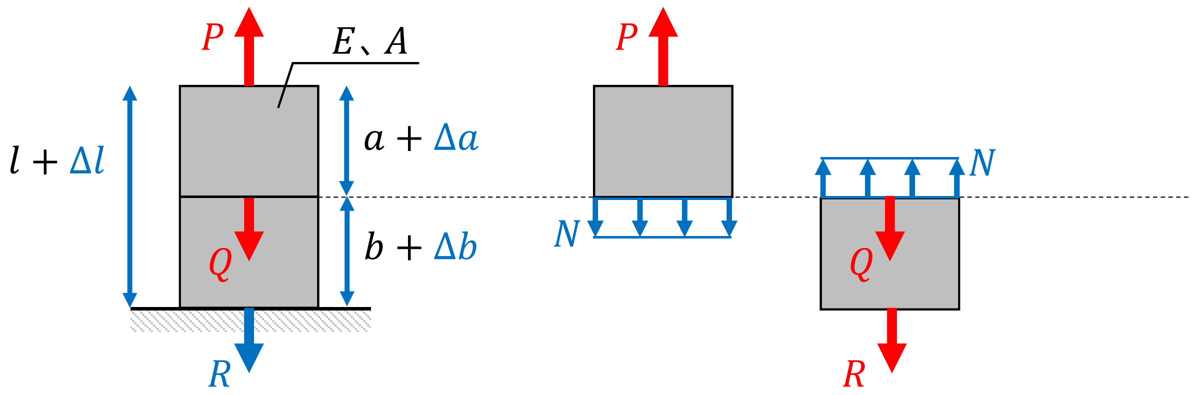
上面＝下面
（引張方向：正）
÷
断面積
＝
応力

フックの法則：$\sigma=E\varepsilon$

$$\sigma_a=E\varepsilon_a \qquad \sigma_b=E\varepsilon_b$$

$$\frac{P}{A}=E\frac{\Delta a}{a} \qquad \frac{R}{A}=\frac{P-Q}{A}=E\frac{\Delta b}{b}$$

Example: A Rod on which Multiple Loads Working
棒材の例題『複数の軸力が働く棒材』



解答のポイント

① **定義**と**フックの法則**だけ使えば解ける
※ノリでは解かない（**上級者**向け！）

② プラスとマイナスは要注意
※一番、**計算ミスの元**になりやすい
※**引張：正**で統一してパターン化する

③ そして、**素早く**解く！
※丁寧に長い時間をかけてもダメ！
※試験でも実務でも**時間制限**がある
※このレベルなら、**2分**で解けるように
※**反復練習**×**3**が必要

$$\frac{P}{A}=E\frac{\Delta a}{a}$$

$$\frac{R}{A}=\frac{P-Q}{A}=E\frac{\Delta b}{b}$$

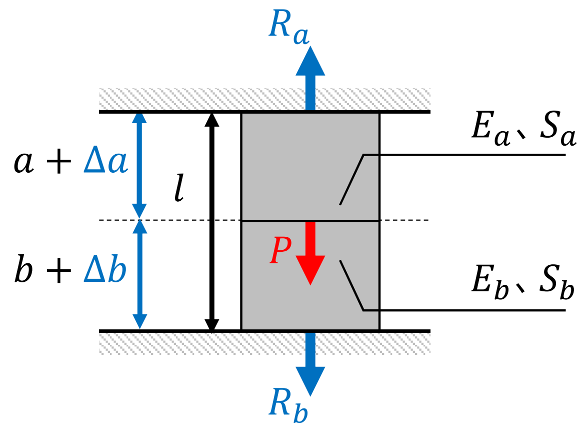
$$\Delta a=\frac{Pa}{EA}$$

$$\Delta b=\frac{(P-Q)b}{EA}$$

$$\boxed{\Delta l=\Delta a+\Delta b=\frac{Pa+(P-Q)b}{EA}}$$

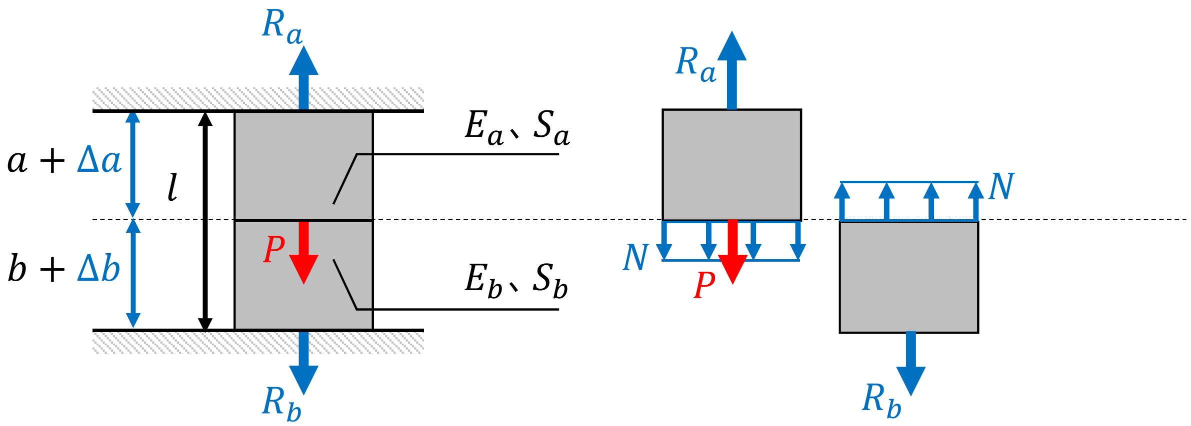
Example: Statically-Indeterminate Structure
棒材の例題『**不静定構造**』

【例題】 図のように、棒材に荷重 P が作用するとき、棒材の上端および下端の反力 R_a、R_bを求めよ。



□ **不静定**問題・・・全体系の力のつりあい式から反力が求まらない

Example: Statically-Indeterminate Structure
棒材の例題『**不静定構造**』



全体系の力のつりあい

$$-P + R_a - R_b = 0$$

適合条件

・・・構造物に生じうる変形の条件

$$\Delta a + \Delta b = 0$$

応力の定義（**局所系の力のつりあい**）

$$R_a = P + N \qquad N = R_b$$

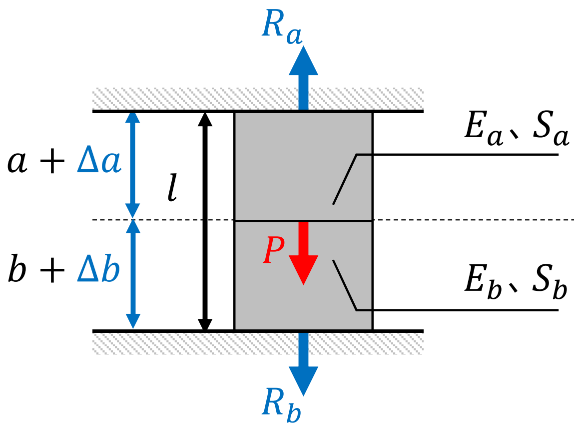
$$\sigma_a = \boxed{\frac{R_a}{S_a}} = \frac{P+N}{S_a} \qquad \sigma_b = \frac{N}{S_b} = \boxed{\frac{R_b}{S_b}}$$

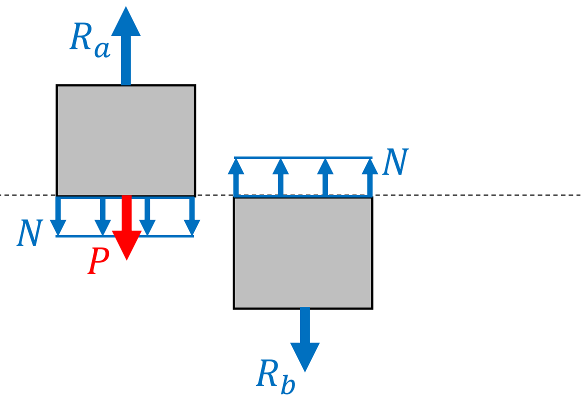
フックの法則：$\sigma = E\varepsilon$

$$\sigma_a = E_a\varepsilon_a \qquad \sigma_b = E_b\varepsilon_b$$

$$\frac{R_a}{S_a} = E_a\frac{\Delta a}{a} \qquad \frac{R_b}{S_b} = E_b\frac{\Delta b}{b}$$

Example: Statically-Indeterminate Structure
棒材の例題『**不静定構造**』





$$-P+R_a-R_b=0$$

$$\frac{R_a}{S_a}=E_a\frac{\Delta a}{a}\qquad\frac{R_b}{S_b}=E_b\frac{\Delta b}{b}$$

適合条件
構造物に**生じうる**変形

$$\Delta a+\Delta b=0$$

$$R_a-R_b=P$$

$$\frac{R_a a}{E_a S_a}+\frac{R_b b}{E_b S_b}=0$$

Example: Statically-Indeterminate Structure
棒材の例題『不静定構造』

$$\left.\begin{aligned} R_a - R_b &= P \\ \frac{R_a a}{E_a S_a} + \frac{R_b b}{E_b S_b} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{R_a a}{E_a S_a} + \frac{(R_a - P)b}{E_b S_b} = 0$$

$$R_a \left(\frac{a}{E_a S_a} + \frac{b}{E_b S_b} \right) = \frac{P\ b}{E_b S_b}$$

$$R_a = \frac{P\ b}{E_b S_b} \times \frac{E_a S_a E_b S_b}{a E_b S_b + E_a S_a b}$$

$$= \frac{P E_a S_a b}{E_b S_b a + E_a S_a b}$$

$$R_b = \frac{P E_a S_a b}{E_b S_b a + E_a S_a b} - P$$

$$= \frac{-P E_b S_b a}{E_b S_b a + E_a S_a b}$$

解答のポイント

① **不静定問題**は**適合条件**を使う
※ 力のつりあい式と連立させたい
※ 適合条件を**未知反力の式**に直す

② 頻出問題なので必ず回答できるように
※ 断面積が変化しても計算できる
※ ヤング率が変わっても計算できる
※ 不静定構造でも計算できる

筑波大学
University of Tsukuba

IMAGINE THE FUTURE.