

ベイズ更新の例題

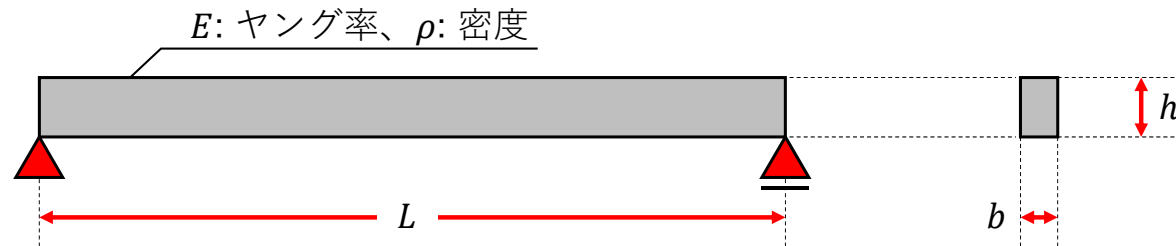
梁のヤング率推定

信頼性工学特論

レポート課題例

概要

- 梁の**固有振動数**の計測データから**ヤング率**を求める
 - 固有振動数の計測データは**モンテカルロ法**で生成する
 - 実測データではなく、シミュレートする
 - **ベイズ更新**により**ヤング率の確率分布**を推定する



ベイズ更新

- D : データ、 H : パラメータに対して

$$p(H|D) = \frac{\overset{\text{事後分布}}{p(H|D)} = \frac{\overset{\text{尤度}}{p(D|H)} \overset{\text{事前分布}}{p(H)}}{p(D)}}$$

- D : 計測した固有振動数 f
- H : 対数正規分布するヤング率 E の平均 μ_E や分散 σ^2
 - 今回はヤング率 E の平均 μ_E だけを考える

数値実験によるデータ生成

	Material		Member		
	E	ρ	b	h	L
	[N/m ²]	[kg/m ³]	[m]	[m]	[m]
Average	2.05×10^{11}	7850	0.7501	0.00201	1.829
S.D.	2.00×10^9	5	0.0015	0.00001	0.001



	I	A
	[m ⁴]	[m ²]
Average	5.08×10^{-10}	0.001508

乱数発生

Excel関数を用いて材料・部材パラメータを生成

=LOGNORM.INV(RAND(),平均,分散)

Sample	E	rho	l	A	b	h	L	freq	Noise	freq
1	2.07.E+11	7849.735			7.498.E-01	2.005.E-03	1.829471			
2	2.06.E+11	7853.153			7.462.E-01	2.023.E-03	1.830609			
3	2.05.E+11	7848.674			7.474.E-01	2.010.E-03	1.829343			
4	2.07.E+11	7852.375			7.527.E-01	2.015.E-03	1.829732			
5	2.03.E+11	7852.570			7.482.E-01	2.022.E-03	1.828159			
6	2.06.E+11	7855.607			7.506.E-01	2.008.E-03	1.829068			
7	2.01.E+11	7845.315			7.501.E-01	2.003.E-03	1.829525			
8	2.04.E+11	7853.192			7.507.E-01	2.027.E-03	1.828176			
9	2.05.E+11	7845.399			7.492.E-01	2.001.E-03	1.829364			
10	2.06.E+11	7845.064			7.515.E-01	1.998.E-03	1.830082			

乱数発生

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$A = bh$$

$$f = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Sample	E	rho	I	A	b	h	L	freq	Noise	freq
1	2.07.E+11	7849.735	5.035E-10	1.503.E-03	7.498.E-01	2.005.E-03	1.829471	1.40		
2	2.06.E+11	7853.153	5.148E-10	1.510.E-03	7.462.E-01	2.023.E-03	1.830609	1.40		
3	2.05.E+11	7848.674	5.055E-10	1.502.E-03	7.474.E-01	2.010.E-03	1.829343	1.39		
4	2.07.E+11	7852.375	5.134E-10	1.517.E-03	7.527.E-01	2.015.E-03	1.829732	1.40		
5	2.03.E+11	7852.570	5.152E-10	1.513.E-03	7.482.E-01	2.022.E-03	1.828159	1.39		
6	2.06.E+11	7855.607	5.063E-10	1.507.E-03	7.506.E-01	2.008.E-03	1.829068	1.39		
7	2.01.E+11	7845.315	5.025E-10	1.503.E-03	7.501.E-01	2.003.E-03	1.829525	1.37		
8	2.04.E+11	7853.192	5.212E-10	1.522.E-03	7.507.E-01	2.027.E-03	1.828176	1.40		
9	2.05.E+11	7845.399	5.005E-10	1.499.E-03	7.492.E-01	2.001.E-03	1.829364	1.39		
10	2.06.E+11	7845.064	4.993E-10	1.501.E-03	7.515.E-01	1.998.E-03	1.830082	1.39		

乱数発生

D : データ

観測データには更に
ノイズを加える

Sample	E	rho	l	A	b	h	L	freq	Noise	freq
1	2.07.E+11	7849.735	5.035E-10	1.503.E-03	7.498.E-01	2.005.E-03	1.829471	1.40	0.000455	1.396
2	2.06.E+11	7853.153	5.148E-10	1.510.E-03	7.462.E-01	2.023.E-03	1.830609	1.40	-0.001333	1.401
3	2.05.E+11	7848.674	5.055E-10	1.502.E-03	7.474.E-01	2.010.E-03	1.829343	1.39	0.000392	1.392
4	2.07.E+11	7852.375	5.134E-10	1.517.E-03	7.527.E-01	2.015.E-03	1.829732	1.40	0.000811	1.401
5	2.03.E+11	7852.570	5.152E-10	1.513.E-03	7.482.E-01	2.022.E-03	1.828159	1.39	0.000858	1.396
6	2.06.E+11	7855.607	5.063E-10	1.507.E-03	7.506.E-01	2.008.E-03	1.829068	1.39	-0.001364	1.391
7	2.01.E+11	7845.315	5.025E-10	1.503.E-03	7.501.E-01	2.003.E-03	1.829525	1.37	-0.000106	1.373
8	2.04.E+11	7853.192	5.212E-10	1.522.E-03	7.507.E-01	2.027.E-03	1.828176	1.40	0.001370	1.403
9	2.05.E+11	7845.399	5.005E-10	1.499.E-03	7.492.E-01	2.001.E-03	1.829364	1.39	-0.002126	1.385
10	2.06.E+11	7845.064	4.993E-10	1.501.E-03	7.515.E-01	1.998.E-03	1.830082	1.39	-0.000589	1.385

尤度

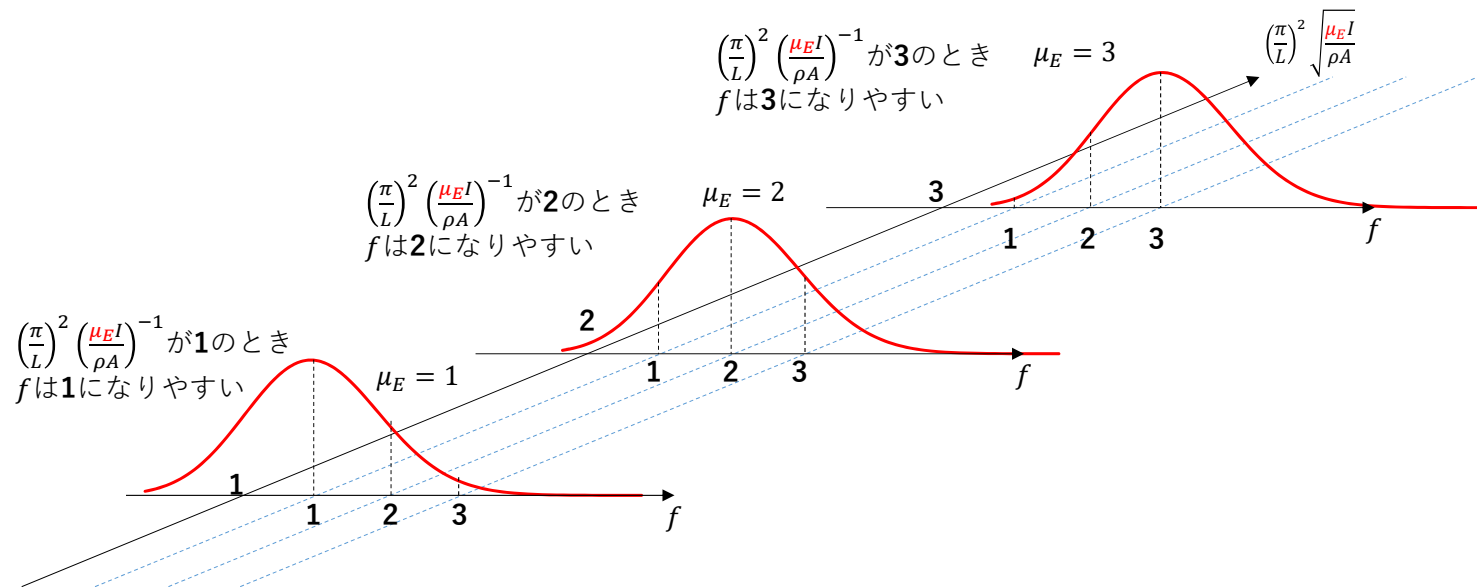
- $p(D|H)$: H のとき D が得られる確率
 - 正規分布確率を仮定 (分散 : s^2)

$$p(f|\mu_E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp \left[-\frac{\left(f - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_E I}{\rho A}} \right)^2}{2s^2} \right]$$

尤度は求めたいパラメータ (ここでは E の確率分布の平均 μ_E) の関数になる

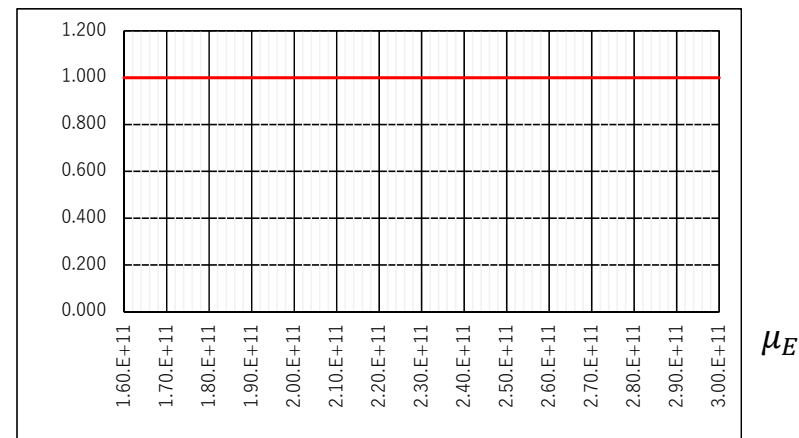
尤度とパラメータ

尤度は得られたデータ f が、
ある μ_E の値に対してどれくらい尤もらしいかを表す



事前分布の仮定

- μ_E に関する事前情報は無いので**一様分布**と定める

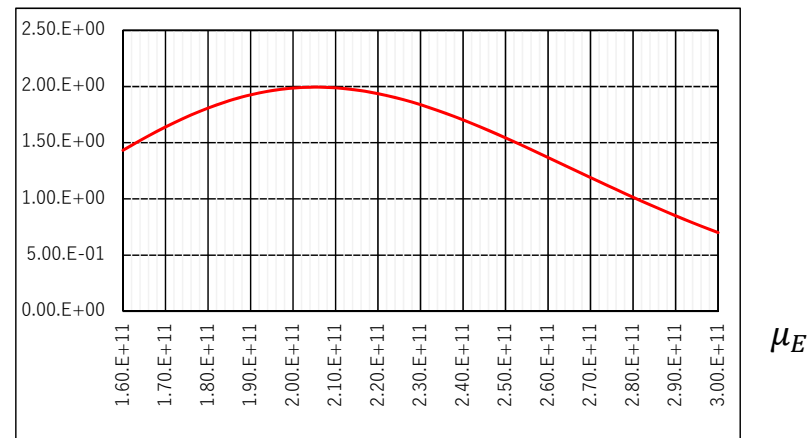


事後分布の計算

• 尤度： $p(f|\mu_E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left[-\frac{\left(f - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_E l}{\rho A}}\right)^2}{2s^2}\right]$ は μ_E の関数

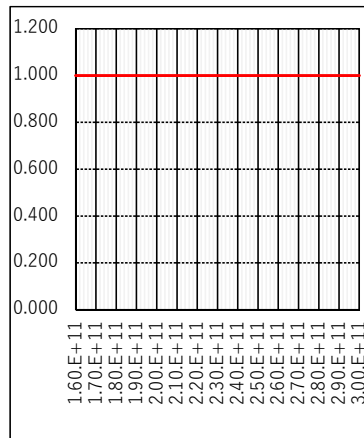
- f は1つ目のデータ = **1.396**等を代入する
- 尤度関数の標準偏差： s は適当に設定する（たとえば**0.2**とした）

- 尤度関数

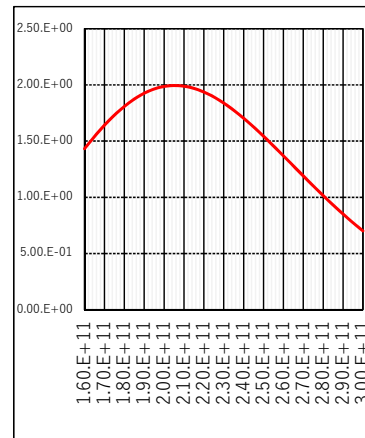


ベイズ更新

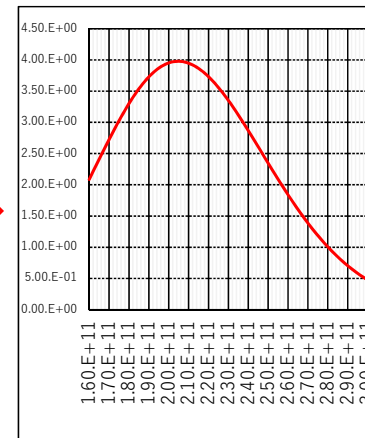
- ヤング率 E の平均 μ_E の確率分布



$$p(\mu_E) = 1$$



$$p(\mu_E|f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp \left[-\frac{\left(1.396 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_E L}{\rho A}}\right)^2}{2s^2} \right]$$

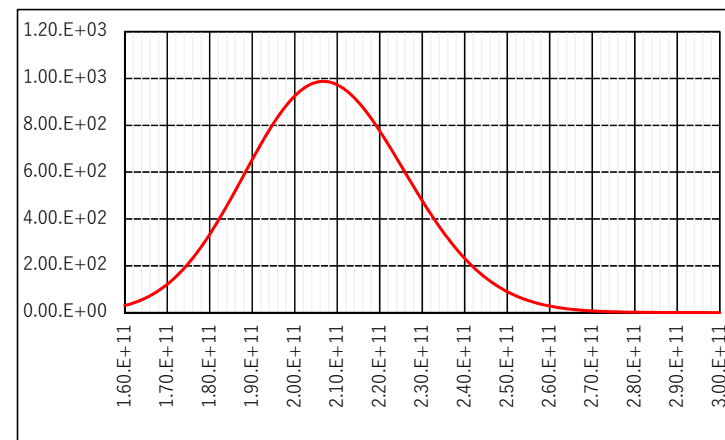


.....

$$p(\mu_E|f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp \left[-\frac{\left(1.396 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_E L}{\rho A}}\right)^2}{2s^2} \right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp \left[-\frac{\left(1.401 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_E L}{\rho A}}\right)^2}{2s^2} \right]$$

結果

- 10個の計測データについてベイズ更新を繰り返す



- 数値実験における μ_E の正解値： 2.05×10^{11}精度良好