

# 有限要素法における固有値計算と周波数応答解析

東京大学 森田直樹

2018年5月11日

## 1 はじめに

本資料は、有限要素法による構造解析において、固有値計算と周波数応答解析についてまとめたものである。

## 2 有限要素法による構造解析の固有値問題

### 2.1 拘束が付加された固有値問題

有限要素離散化された構造解析の固有値問題は、式 (1) に示す固有方程式を解くことに帰着する。

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{K}$  は  $n \times n$  の疎な正定値対称行列（全体剛性行列）、 $\mathbf{M}$  は  $n \times n$  の疎な正定値対称行列（全体質量行列）、 $\mathbf{x}$  は固有ベクトル、 $\lambda$  は固有値である。式 (1) は、一般固有値問題として分類され、全体剛性行列  $\mathbf{K}$  と全体質量行列  $\mathbf{M}$  は疎な実対称行列であることが特徴として挙げられる。工学的に低次側の固有値の情報が重要であることから、固有値問題の求解には、Lanczos 逆べき乗法が用いられる。境界条件による変位の拘束が付加されている場合、全体剛性行列  $\mathbf{K}$  は正則となるので、Lanczos 逆べき乗法中に計算される線形方程式  $\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{q}$  は、解を得ることができる。

### 2.2 拘束が付加されていない固有値問題（自由振動）

境界条件による拘束を付加しない固有値問題は、自由振動モードを求める問題となる。しかし、全体剛性行列  $\mathbf{K}$  は正則ではないため、解が定まらない（剛体モードを求めることになる）。

一方、全体質量行列  $\mathbf{M}$  は、一般に整合質量行列・集中質量行列に関わらず逆行列を求めることができる。この性質に注目し、一般固有値問題の固有方程式  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}$  に対し、恒等式  $-\sigma\mathbf{M}\mathbf{x} = -\sigma\mathbf{M}\mathbf{x}$  を各々加えて、固有方程式 (2) を得る。

$$(\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M})\mathbf{x} = (\lambda - \sigma)\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (2)$$

ここで、 $\sigma$  はシフト量である。式 (2) に対し、 $\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \sigma\mathbf{M}$ 、 $\lambda' = \lambda - \sigma$  を定義して、式 (3) を得る。

$$\mathbf{K}'\mathbf{x} = \lambda'\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (3)$$

## 2.3 MPC 条件が付加された固有値問題

式 (1) に示した一般固有値問題に対し、MPC による拘束条件が付加された固有値問題は、式 (4) で表される。

$$B^t K B B^t x = \lambda B^t M B B^t x \quad (4)$$

ここで、 $B$  は正則な拘束行列である。式 (4) に対し、 $K' = B^t K B$ 、 $M' = B^t M B$ 、 $x' = B^t x$  を定義して、式 (5) を得る。

$$K' x' = \lambda M' x' \quad (5)$$

## 2.4 MPC 条件が付加された自由振動固有値問題

これまでに示した一般固有値問題に対し、MPC による拘束条件が付加された自由振動を求める固有値問題は、式 (6) で表される。

$$(B^t K B - \sigma B^t M B) B^t x = (\lambda - \sigma) B^t M B B^t x \quad (6)$$

ここで、 $K' = B^t K B - \sigma B^t M B$  を定義して、式 (7) を得る。

$$K' x' = \lambda' M' x' \quad (7)$$

本資料では、式 (7) に基いた Lanczos 法を FrontISTR に実装した。具体的には、予め MPC 条件と陽的自由度消去法に基いて全体剛性行列と全体質量行列を変形し、その固有方程式に対してシフティングを行うことで、実装を行った。

# 3 Lanczos 法

## 3.1 標準固有値問題における Lanczos 法

実対称行列は、Arnoldi 法を用いることで、式 (8) のように変換可能であることが知られている。

$$Q^{-1} K Q = T \quad (8)$$

ここで、 $Q$  は正則行列、 $T$  は対称な三重対角行列である。

相似変換で固有値は不変

正則行列  $Q$  に対して、 $B = Q^{-1} A Q$  が成り立つので、特性方程式  $\det(\lambda I - B)$  から

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - Q^{-1} A Q) = \det(\lambda Q^{-1} I Q - Q^{-1} A Q) \\ &= \det(Q^{-1} (\lambda I - A) Q) = \det(Q^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(Q) = \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

の関係を得る。

## 実対称行列の固有値は必ず実数

実対称行列  $\mathbf{A}$  と複素ベクトル  $\mathbf{z}$  に対応する固有値  $\lambda$  に対して、 $\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$  が成り立つとき、

$$\begin{aligned}\lambda\bar{\mathbf{z}}^t\mathbf{z} &= \bar{\mathbf{z}}^t(\lambda\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{z}}^t\mathbf{A}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}^t\mathbf{A}^t\mathbf{z} \\ &= (\overline{\mathbf{A}\bar{\mathbf{z}}})^t\mathbf{z} = \overline{(\mathbf{A}\mathbf{z})}^t\mathbf{z} = \overline{(\lambda\mathbf{z})}^t\mathbf{z} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{z}}^t\mathbf{z}\end{aligned}$$

の関係から、 $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{z}}^t\mathbf{z} = 0$  を得る。  $\mathbf{z} \neq 0$  のとき  $\bar{\mathbf{z}}^t\mathbf{z} \neq 0$  より、 $\lambda = \bar{\lambda}$  が示された。

式 (7) の関係から、 $\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{T}$  に対し、 $\mathbf{Q}$  と  $\mathbf{T}$  をそれぞれ式 (9)、式 (10) のように書き下す。

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3 \dots \mathbf{q}_n] \quad (9)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ & & \beta_4 & \ddots & \beta_n \\ & & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{q}_i$  は  $\mathbf{Q}$  の第  $i$  番目の縦ベクトル、 $\alpha_i$  は三重対角行列  $\mathbf{T}$  の第  $i$  番目の対角要素、 $\beta_i$  は三重対角行列  $\mathbf{T}$  の第  $i$  番目の副対角要素 ( $2 \leq i \leq n$ ) である。

このとき、ある縦ベクトル  $\mathbf{q}_i$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) に注目すると、式 (8) から式 (11) が得られる。

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_i = \beta_i\mathbf{q}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{q}_i + \beta_{i+1}\mathbf{q}_{i+1} \quad (11)$$

式 (11) に対し、左から  $\mathbf{q}_i$  を乗じると、式 (12) が得られる。

$$\mathbf{q}_i\mathbf{K}\mathbf{q}_i = \alpha_i \quad (12)$$

このとき、標準固有値問題における固有ベクトルの直交性から  ${}^t\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j = 0$  ( $i \neq j$ ) である。

また、式 (11) を移項すると、式 (13) を得ることができる。

$$\beta_{i+1}\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{K}\mathbf{q}_i - \alpha_i\mathbf{q}_i - \beta_i\mathbf{q}_{i-1} \quad (13)$$

式 (12)、式 (13) に対し、 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ 、 $\beta_0 = 0$  の条件を加えることで、 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  が再帰的に求められる。

図 1 に標準固有値問題に対する Lanczos 逆べき乗法を示す。ここで、 $\mathbf{p}$  は一時ベクトルである。

## 3.2 一般固有値問題における Lanczos 法

一般固有値問題を Lanczos 法を用いて解く場合、一般固有値問題の固有ベクトルは  $M$  直交性  ${}^t\mathbf{q}_i\mathbf{M}\mathbf{q}_j = 0$  ( $i \neq j$ ) があることを考慮する必要がある。従って、標準固有値問題に対する Lanczos 法中の、内積演算として行われていた 2 ノルム  $(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  の計算を、 $M$  ノルム  $(\mathbf{M}\mathbf{r}, \mathbf{r})$  に置き換えればよい。図 2 に、一般固有値問題に対する Lanczos 逆べき乗法を示す。ここで、 $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{r}$  は一時ベクトルである。

現在の FrontISTR には、図 2 のアルゴリズムが実装されている。ここで、MPC 条件が付加された固有値問題の固有方程式 (5) と見比べると、図 2L5 にて解かれる線形方程式  $\mathbf{K}\mathbf{s} = \mathbf{p}$  の求解に関しては、線形ソルバ内で MPC 条件を考慮することができるため、計算上問題はない。

---

```

1:  $\beta_1 = 0, \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1 / \|\mathbf{q}_1\|_2$ 
2: for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  do
3:    $\mathbf{p} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}_i - \beta_i\mathbf{q}_{(i-1)}$ 
4:    $\alpha_i = \mathbf{p}^t\mathbf{q}_i$ 
5:    $\mathbf{p} = \mathbf{p} - \alpha_i\mathbf{q}_i$ 
6:    $\beta_{i+1} = \|\mathbf{p}\|_2$ 
7:    $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{p}/\beta_{i+1}$ 
8: end for

```

図1 標準固有値問題に対する Lanczos 逆べき乗法

```

1:  $\beta_1 = 0, \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ 
2:  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1 / \|\mathbf{q}_1\|_B$ 
3:  $\mathbf{p} = \mathbf{M}\mathbf{q}_1$ 
4: for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  do
5:    $\mathbf{K}\mathbf{s} = \mathbf{p}$ 
6:    $\mathbf{s} = \mathbf{s} - \beta_i\mathbf{q}_{(i-1)}$ 
7:    $\alpha_i = {}^t\mathbf{p}\mathbf{s}$ 
8:    $\mathbf{s} = \mathbf{s} - \alpha_i\mathbf{q}_i$ 
9:    $\mathbf{r} = \mathbf{M}\mathbf{s}$ 
10:   $\beta_{i+1} = \sqrt{{}^t\mathbf{r}\mathbf{s}}$ 
11:   $\mathbf{p} = \mathbf{r}/\beta_{i+1}$ 
12:   $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{s}/\beta_{i+1}$ 
13: end for

```

図2 一般固有値問題に対する Lanczos 逆べき乗法

一方、図 2L3、図 2L9 にて計算される  $\mathbf{M}$  に関する計算は、これまで Lanczos 法に組み込まれた演算になっていたため、MPC による拘束が計算されておらず、差異が生じる。

## 4 数値例

### 4.1 数値例 1 (自由振動モード解析)

数値例 1 として、自由振動モードを正しく計算できることを確かめるために、ソリッド要素による梁モデルを用いて計算結果を比較した。このモデルは、100.0 [mm] × 100.0 [mm] × 1000.0 [mm] で、節点数 925、要素数 576、自由度 2,775 である。表 1 に、固有値解析結果 (固有振動数、低次側から 20 次) の Abaqus と FrontISTR の計算結果を示した。図 3~8 に、モード 7, 9, 11, 12 のモード図を示す。表 1 より、モード 1~6 として剛体モードが正しく計算されていることがわかる。また、7~20 次までの固有振動数と固有モードを確認し、よく一致する結果が得られた。

表 1 固有値解析（自由振動モード）の解析結果の比較。\*は剛体モードを示す。

Eigen mode	Freq. [Hz]	
	Abaqus	FrontITSR
1*	0.000E+00	0.000E+00
2*	0.000E+00	1.034E-08
3*	0.000E+00	0.000E+00
4*	0.000E+00	2.395E-08
5*	0.000E+00	0.000E+00
6*	9.109E-09	0.000E+00
7	3.130E-02	3.130E-02
8	3.130E-02	3.130E-02
9	8.144E-02	8.144E-02
10	8.144E-02	8.144E-02
11	8.707E-02	8.707E-02
12	1.487E-01	1.487E-01
13	1.487E-01	1.487E-01
14	1.579E-01	1.579E-01
15	1.740E-01	1.740E-01
16	2.273E-01	2.273E-01
17	2.273E-01	2.273E-01
18	2.605E-01	2.605E-01
19	3.129E-01	3.129E-01
20	3.129E-01	3.129E-01

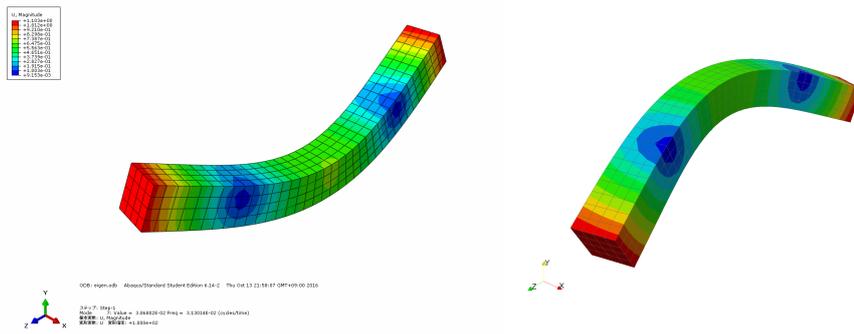


图3 mode 7 / 3.1301E-02 Hz (左 : Abaqus、右 : FrontISTR)

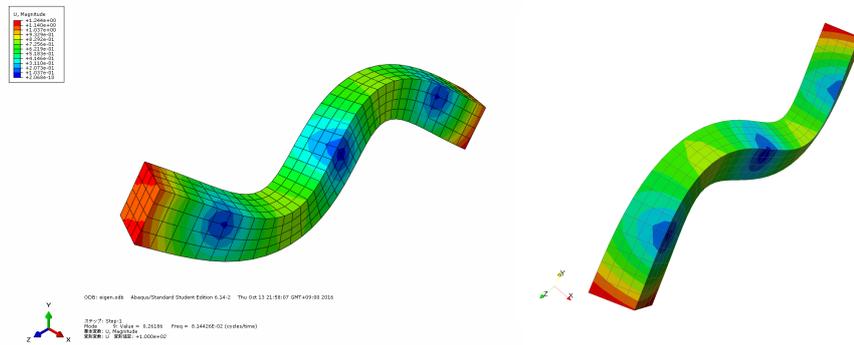


图4 mode 9 / 8.1443E-02 Hz (左 : Abaqus、右 : FrontISTR)

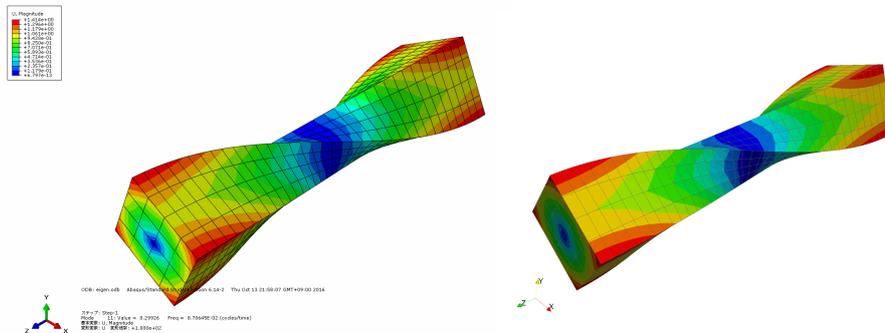


图5 mode 11 / 8.7065E-02 Hz (左 : Abaqus、右 : FrontISTR)

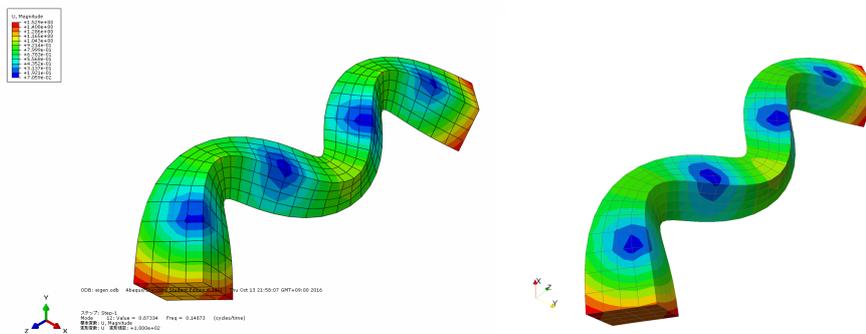


图6 mode 12 / 0.14873 Hz (左 : Abaqus、右 : FrontISTR)

---

## 4.2 数値例 2 (MPC を付加した自由振動モード解析)

数値例 2 として、図 7 に示す MPC が付加されたモデルに対し、自由振動モードを正しく計算できることを確かめるために、ソリッド要素による梁モデルを用いて計算結果を比較した。このモデルは、12.0 [mm] × 12.0 [mm] × 120.0 [mm] で、節点数 925、要素数 576、自由度 2,775 である。表 2 に、固有値解析結果（固有振動数、低次側から 20 次）の Abaqus と FrontISTR の計算結果を示した。表 2 より、モード 1~6 として剛体モードが正しく計算されていることがわかる。また、7~20 次までの固有振動数と固有モードを確認し、よく一致する結果が得られた。

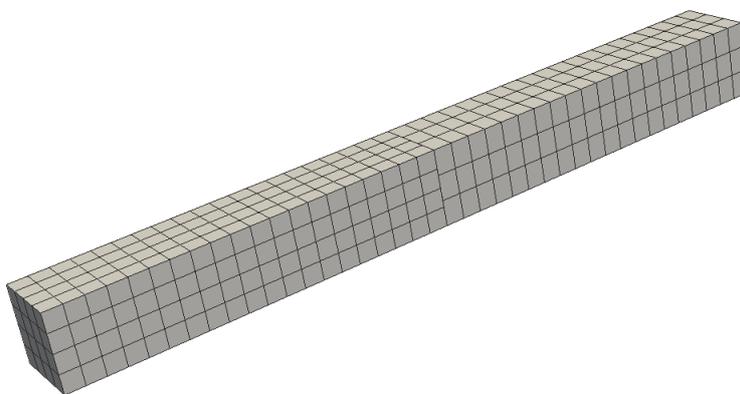


図 7 NPC 条件が付加された梁モデル

表 2 固有値解析（自由振動モード）の解析結果の比較。\*は剛体モードを示す。

Eigen mode	Freq. [Hz]	
	Abaqus	FrontITSR
1*	0.000E+00	2.894E-07
2*	2.313E-08	0.000E+00
3*	4.595E-07	3.175E-06
4*	5.887E-07	3.972E-06
5*	6.817E-07	4.011E-06
6*	6.872E-07	7.585E-06
7	2.599E-01	2.599E-01
8	2.599E-01	2.599E-01
9	6.781E-01	6.781E-01
10	6.781E-01	6.781E-01
11	7.160E-01	7.160E-01
12	1.236E+00	1.236E+00
13	1.236E+00	1.236E+00
14	1.314E+00	1.314E+00
15	1.432E+00	1.432E+00
16	1.891E+00	1.891E+00
17	1.891E+00	1.891E+00
18	2.143E+00	2.143E+00
19	2.600E+00	2.600E+00
20	2.600E+00	2.600E+00

## 5 有限要素法による周波数応答解析

有限要素離散化された周波数応答解析のために、式 (1) に示す運動方程式を考える。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (14)$$

ここで  $\mathbf{M}$  は質量行列、 $\mathbf{C}$  は減衰行列、 $\mathbf{K}$  は剛性行列、 $\mathbf{a}$  は加速度ベクトル、 $\mathbf{v}$  は速度ベクトル、 $\mathbf{u}$  は変位ベクトル、 $\mathbf{g}$  は外力ベクトルである。

外力  $\mathbf{g}$  として、式 (2) のように正弦波加振を考える。

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}e^{j\omega t} \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{f}$  は外力ベクトルである。

この荷重  $\mathbf{g}$  による応答も、正弦波として表すことができるので、変位  $\mathbf{u}$ 、速度  $\mathbf{v}$ 、加速度  $\mathbf{a}$  はそれぞれ式 (3)、式 (4)、式 (5) で表される。

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\mathbf{z}e^{j\omega t} \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = j\omega\boldsymbol{\phi}\mathbf{z}e^{j\omega t} \quad (17)$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2\boldsymbol{\phi}\mathbf{z}e^{j\omega t} \quad (18)$$

ここで、 $\boldsymbol{\phi} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m\}$  は固有ベクトル  $\mathbf{q}_i$  をまとめた行列、 $\mathbf{z}$  は変位ベクトル  $\mathbf{u}$  をよく表す係数ベクトルである。

式 (3)、式 (4)、式 (5) を式 (1) に代入して、式 (6) が得られる。

$$\begin{aligned} -\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}\mathbf{z}e^{j\omega t} + j\omega\mathbf{C}\boldsymbol{\phi}\mathbf{z}e^{j\omega t} + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}\mathbf{z}e^{j\omega t} &= \mathbf{f}e^{j\omega t} \\ (-\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} + j\omega\mathbf{C}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi})\mathbf{z}e^{j\omega t} &= \mathbf{f}e^{j\omega t} \\ (-\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} + j\omega\mathbf{C}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi})\mathbf{z} &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、Rayleigh 減衰を式 (7)、構造減衰を式 (8) のように与える。

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (20)$$

$$\mathbf{K} = (1 + j\gamma)\mathbf{K} \quad (21)$$

式 (7)、式 (8) を式 (6) に代入して、式 (9) が得られる。

$$\{-\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} + j\omega(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\boldsymbol{\phi} + (1 + j\gamma)\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}\}\mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (22)$$

式 (9) に対し、左から  $\boldsymbol{\phi}^t$  を乗じて、式 (10) を得る。

$$\{-\omega^2\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} + j\omega(\alpha\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} + \beta\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}) + (1 + j\gamma)\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}\}\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{f} \quad (23)$$

ここで、固有方程式  $\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}$  を考えると、式 (11)、式 (12) が得られる。

$$\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{I} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\bar{\omega}_1^2, \bar{\omega}_2^2, \dots, \bar{\omega}_n^2) \quad (25)$$

式 (10)、式 (11)、式 (12) から、式 (13) を得る。

$$\{-\omega^2\mathbf{I} + j\omega(\alpha\mathbf{I} + \beta\boldsymbol{\Lambda}) + (1 + j\gamma)\boldsymbol{\Lambda}\}\mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{f} \quad (26)$$

式 (13) に対し、対角行列であることを考慮すると、 $i$  番目モードについて式 (14) が得られる。

$$\begin{cases} -\omega^2 + j\omega(\alpha + \beta\bar{\omega}_i^2) + (1 + j\gamma)\bar{\omega}_i^2 \} z_i = \phi_i^t \mathbf{f} \\ -\omega^2 + j(\alpha\omega + \beta\omega\bar{\omega}_i^2 + \gamma\bar{\omega}_i^2) + \bar{\omega}_i^2 \} z_i = \phi_i^t \mathbf{f} \end{cases} \quad (27)$$

式 (14) を  $z_i$  について式変形して、式 (15) が得られる。

$$z_i = \frac{\phi_i^t \mathbf{f}}{\bar{\omega}_i^2 - \omega^2 + j(\alpha\omega + \beta\omega\bar{\omega}_i^2 + \gamma\bar{\omega}_i^2)} \quad (28)$$

式 (16) の関係を用いて、式 (15) を変形すると、式 (17) が得られる。

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{(a - jb)}{a^2 + b^2} \quad (29)$$

$$z_i = \frac{\phi_i^t \mathbf{f} + (\bar{\omega}_i^2 - \omega^2) - j(\alpha\omega + \beta\omega\bar{\omega}_i^2 + \gamma\bar{\omega}_i^2)}{(\bar{\omega}_i^2 - \omega^2)^2 + (\alpha\omega + \beta\omega\bar{\omega}_i^2 + \gamma\bar{\omega}_i^2)^2} \quad (30)$$

式 (17) によって係数ベクトル  $\mathbf{z}$  を得ることで、式 (3)、式 (4)、式 (5) から、周波数応答を得ることができる。この導出を元に、現在公開されている FrontISTR に対し、式 (17) における構造減衰の考慮と、並列計算も対応を行った。