

1

## 1.1 Newtonの運動力学

### ・ 第1法則(慣性の法則)

「すべての物体は、力を加えて、その状態を変えない限り、静止、または直線上の一樣な運動を続ける。」

2

## 1.1 Newtonの運動力学

### ・ 第2法則(運動量の法則)

「運動量が時間とともに変化する割合は、その物体に働く力に比例し、かつ、力が働く直線方向に起きる。」

運動量(ベクトル) : $m\mathbf{v}$	質量	: $m$
$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$	速度(ベクトル)	: $\mathbf{v}$
	力(ベクトル)	: $\mathbf{F}$
	位置(ベクトル)	: $\mathbf{r}$
$\therefore \mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}$	加速度(ベクトル)	: $\mathbf{a}$

3

## 1.1 Newtonの運動力学

### ・ 第3法則(作用・反作用の法則)

「どのような力の作用にも、大きさが等しく方向が反対の反作用力が存在する。」

4

## 1.1 Newtonの運動力学

### ・ 質点系の力学

質量のみあって、大きさのない点: 質点  $m_i$

質点の集合体: 多質点系  $\{m_i\}$

質点間の距離が変わらない: 剛体

質点間の拘束がない: 自由体

多質点系の外部から質点  $m_i$  に作用する力: **外力**  $F_i$

質点相互の拘束によって働く力: **内力**

$m_j$  から  $m_i$  に作用する内力  $F_{ij}$

5

## 1.1 Newtonの運動力学

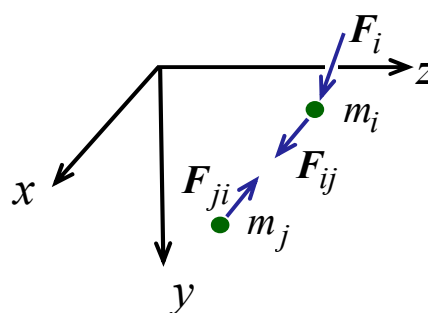
### ・ 質点系の力学

質量のみあって、大きさ

質点の集合体: 多質点系

質点間の距離が

質点間の拘束がな



多質点系の外部から質点  $m_i$  に作用する力: **外力**  $F_i$

質点相互の拘束によって働く力: **内力**

$m_j$  から  $m_i$  に作用する内力  $F_{ij}$

6

## 1.1 Newtonの運動力学

Newtonの第3法則より、

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

Newtonの第2法則より、  
質点  $m_i$  について、

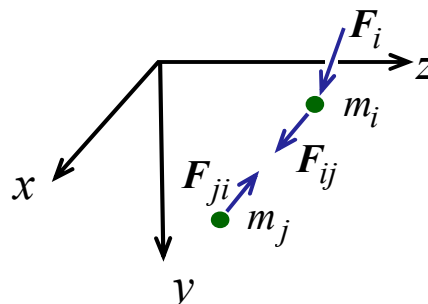
$$\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} = \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt}$$

多質点系を構成するすべての質点を足しあわせると、

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \mathbf{v}_i)$$

第3法則より、左辺第2項=0なので、

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \mathbf{v}_i)$$



7

## 1.1 Newtonの運動力学

Newtonの第3法則より、

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

Newtonの第2法則より、  
質点  $m_i$  について、

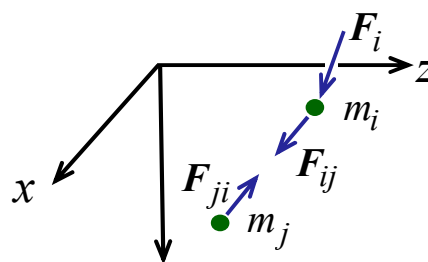
$$\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} = \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt}$$

多質点系を構成するすべての質点を足しあわせると、

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \mathbf{v}_i)$$

第3法則より、左辺第2項=0なので、

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \mathbf{v}_i)$$



多質点系の運動量が  
時間的に変化する割合は、  
外力の合力に等しく、  
内力には無関係

8

## 1.1 Newtonの運動力学

運動量モーメント  $\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$  に関して、  
時間  $t$  で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_i}{dt} &= \frac{d}{dt} m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \\ &= m_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i) + \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) \end{aligned}$$

多質点系を構成するすべての質点を足しあわせると、

$$\sum_i \frac{d\mathbf{H}_i}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_i (\mathbf{r}_i \times \sum_j \mathbf{F}_{ij})$$

第3法則より、右辺第2項=0なので、

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{H}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

9

## 1.1 Newtonの運動力学

運動量モーメント  $\mathbf{H}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$  に関して、  
時間  $t$  で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_i}{dt} &= \frac{d}{dt} m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \\ &= m_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i) + \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) \end{aligned}$$

多質点系を構成

$$\sum_i \frac{d\mathbf{H}_i}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_i (\mathbf{r}_i \times \sum_j \mathbf{F}_{ij})$$

第3法則より、右

多質点系の運動量モーメントが  
時間的に変化する割合は、  
外力のモーメントの総和に等しく、  
内力のモーメントには無関係

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{H}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

10

## 1.2 力のつり合い条件

多質点系の運動量について、 $\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \mathbf{v}_i)$

運動量モーメントについて、 $\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{H}_i$

Newton力学  $\left\{ \begin{array}{l} \text{静力学} \cdots \text{運動量の時間的変化を無視} \\ \text{動力学} \cdots \text{時間的変化を無視できない} \end{array} \right.$

したがって、上2式の右辺=0なので、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \mathbf{F}_i = 0 \\ \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = 0 \end{array} \right. \quad \text{外力のつり合い条件}$$

11

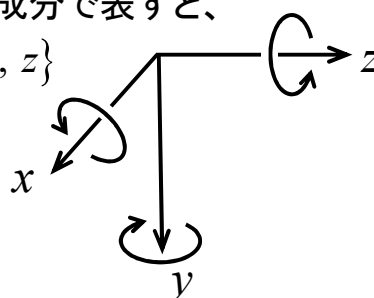
## 1.2 力のつり合い条件

力(ベクトル)、位置(ベクトル)を成分で表すと、

$$\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}$$

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0 \quad \cdots x \text{軸} \\ \sum (z \cdot F_x - x \cdot F_z) = 0 \quad \cdots y \text{軸} \\ \sum (x \cdot F_y - y \cdot F_x) = 0 \quad \cdots z \text{軸} \end{array} \right. \quad \text{まわり}$$



12

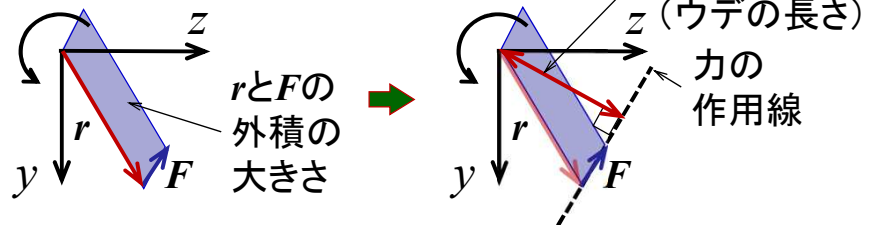
## 1.2 力のつり合い条件

本講義で主に扱う2次元平面 ( $y$ - $z$ 平面) では、

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0$$

※モーメントの求め方



13

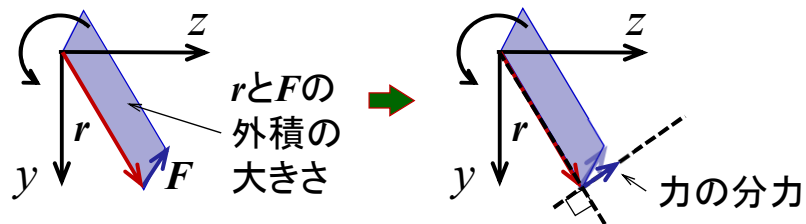
## 1.2 力のつり合い条件

本講義で主に扱う2次元平面 ( $y$ - $z$ 平面) では、

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0$$

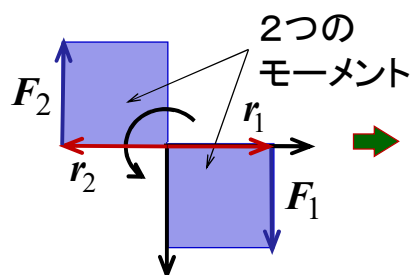
※モーメントの求め方



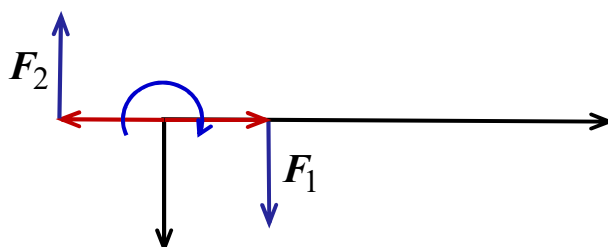
14

## 1.2 力のつり合い条件

$\sum (r \times F) = 0$  に関して、



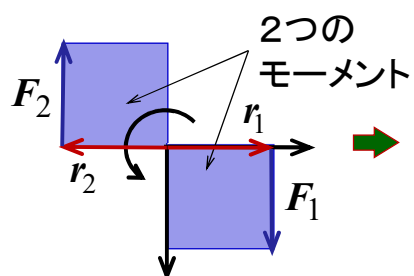
※原点が移動しても、  
モーメントの総和は  
変わらない。



15

## 1.2 力のつり合い条件

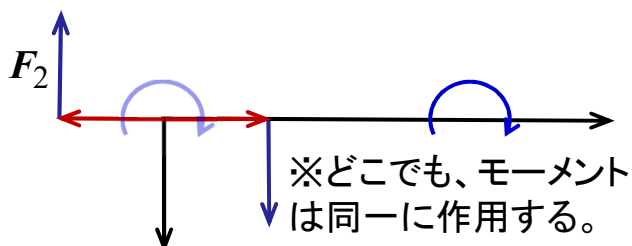
$\sum (r \times F) = 0$  に関して、



※原点が移動しても、  
モーメントの総和は  
変わらない。

$$\sum (r_i \times F_i) = 0$$

$$\sum M = 0$$



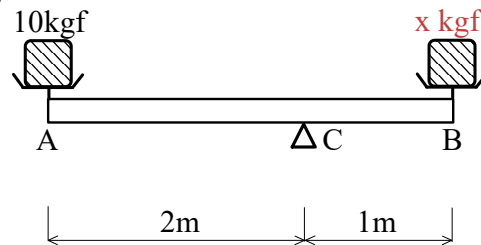
16



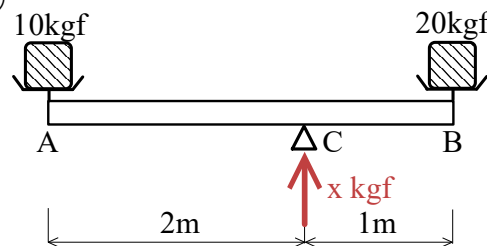
## 1.2 力のつり合い条件

01:00

例題①



例題①'

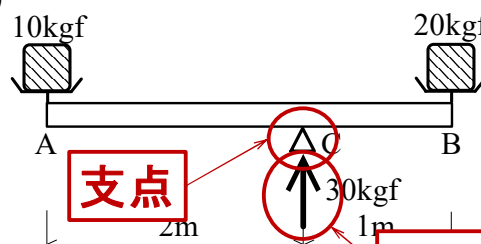


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

17

## 1.2 力のつり合い条件

例題①



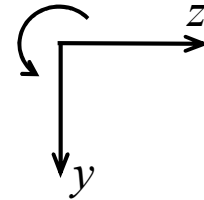
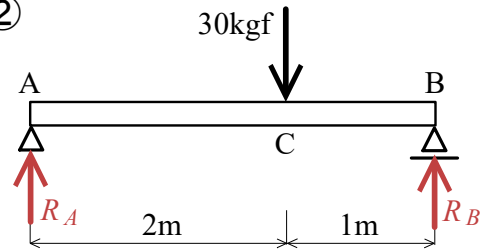
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

18

## 1.2 力のつり合い条件

03:00

例題②

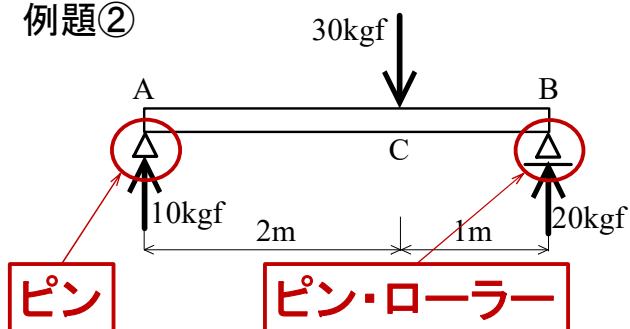


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

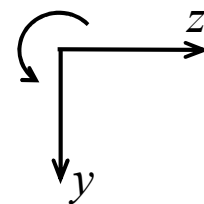
19

## 1.2 力のつり合い条件

例題②



ピンとピン・ローラーで支持された梁を、**単純梁**と呼ぶ



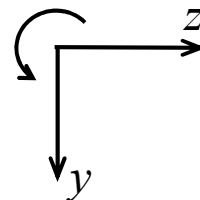
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

20

## 1.2 力のつり合い条件

05:00

例題③

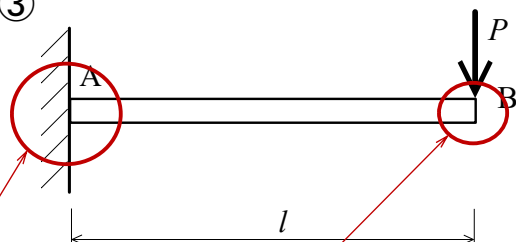


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

21

## 1.2 力のつり合い条件

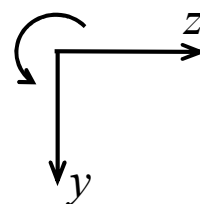
例題③



固定

自由(支点なし)

固定で支持され、他端が自由の梁を、**片持梁**(かたもちばり)と呼ぶ



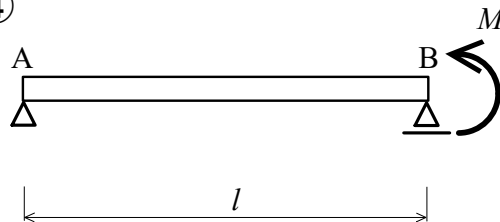
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

22

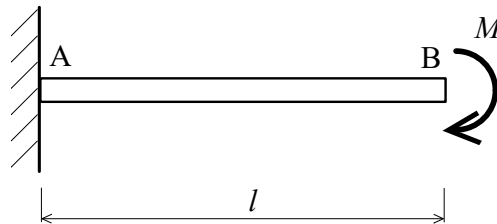
## 1.2 力のつり合い条件

05:00

例題④



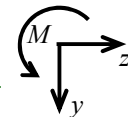
例題⑤



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

23

## 1.2 力のつり合い条件



材料力学での支持条件

支点反力

名称	イメージ	記号	$R_y$	$R_z$	$M$
固定			↓ あり	→ あり	↺ あり
ローラー			なし	→ あり	↺ あり
ピン			↓ あり	→ あり	なし
ピン・ローラー			↓ あり	なし	なし
自由			なし	なし	なし

24

## 1.3 内力のつり合い

### ・ Newtonの第3法則(作用・反作用の法則)

「どのような力の作用にも、大きさが等しく  
方向が反対の反作用力が存在する。」

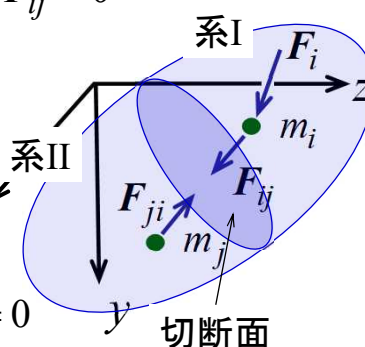
$$F_{ij} = -F_{ji} \quad \Rightarrow \quad \sum_i \sum_j F_{ij} = 0$$

質点系を、系Iと系IIに分ける。

→ 仮想的に切断する。

$$\sum_i^I \sum_j^I F_{ij} + \sum_i^I \sum_j^{II} F_{ij} +$$

$$\sum_i^{II} \sum_j^I F_{ij} + \sum_i^{II} \sum_j^{II} F_{ij} = 0$$



25

## 1.3 内力のつり合い

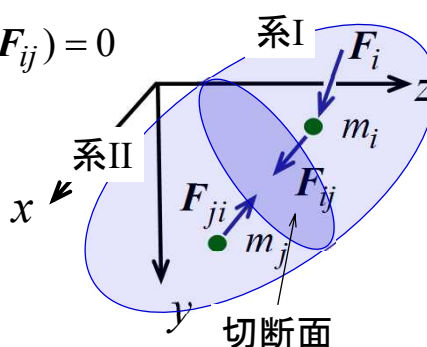
したがって、

$$\sum_i^I \sum_j^{II} F_{ij} + \sum_i^{II} \sum_j^I F_{ij} = 0$$

モーメントに関しても、

$$\sum_i^I \sum_j^{II} (r_i \times F_{ij}) + \sum_i^{II} \sum_j^I (r_i \times F_{ij}) = 0$$

物体を仮定の断面で切断したとき、断面に作用する内力を断面力といい、断面力の総和はつり合っている



26

## 1.3 内力のつり合い

系IIに着目すると、

$$\sum_i^I F_i + \sum_i^I \sum_j^I F_{ij} + \sum_i^I \sum_j^{II} F_{ij} = 0$$

系IIに  
作用する  
外力

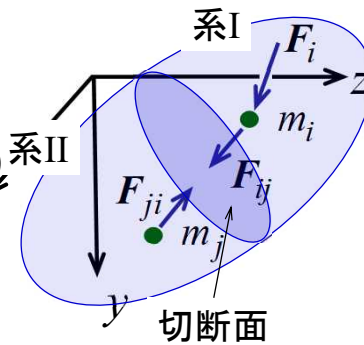
0

系IIから  
系IIに  
作用する  
内力

切断面に作用する  
断面力と、その切断  
した系に作用する  
外力はつり合っている

モーメントに関しても、

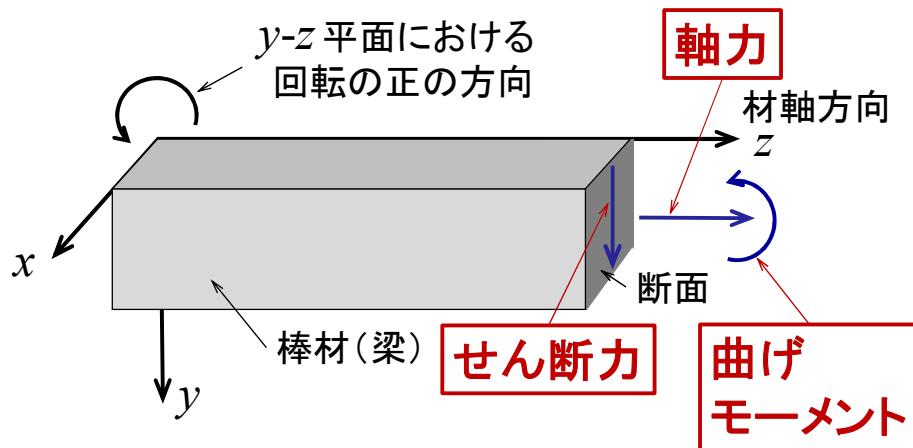
$$\sum_i^I (r_i \times F_i) + \sum_i^I \sum_j^{II} (r_i \times F_{ij}) = 0$$



27

## 1.3 内力のつり合い

### 部材の断面力

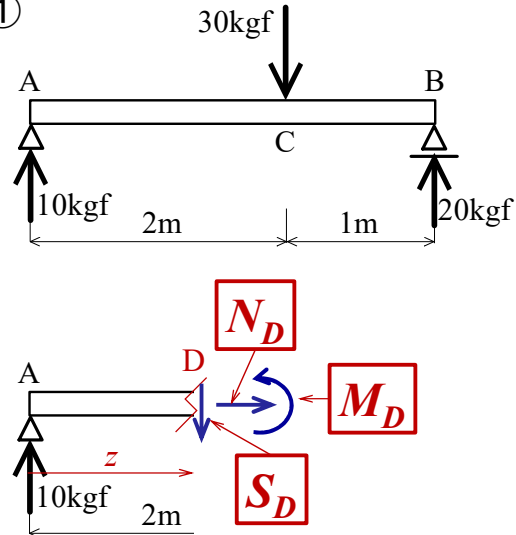


28

## 1.3 内力のつり合い

05:00

例題①



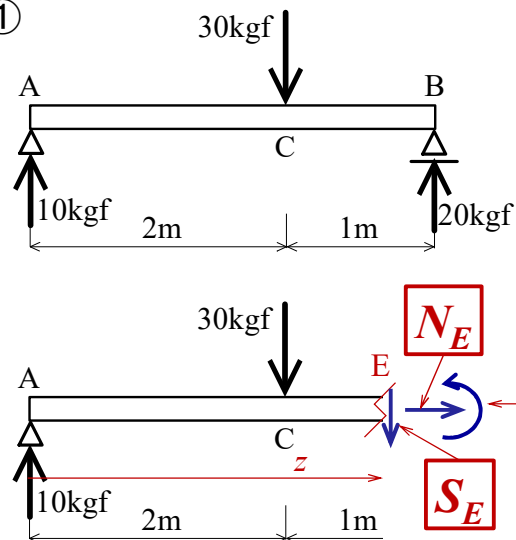
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

29

## 1.3 内力のつり合い

05:00

例題①



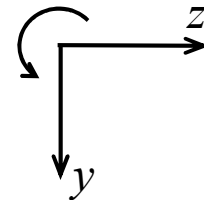
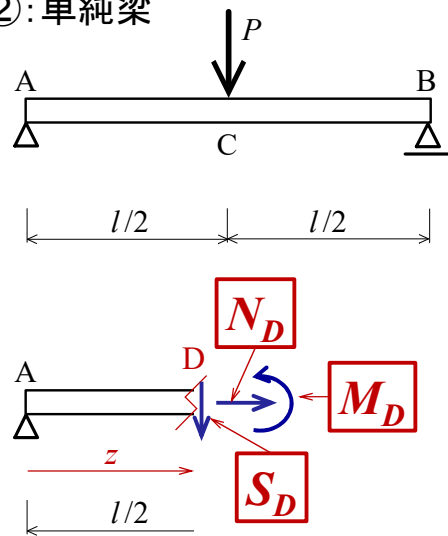
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

30

## 1.3 内力のつり合い

05:00

例題②: 単純梁



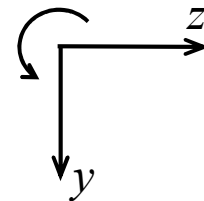
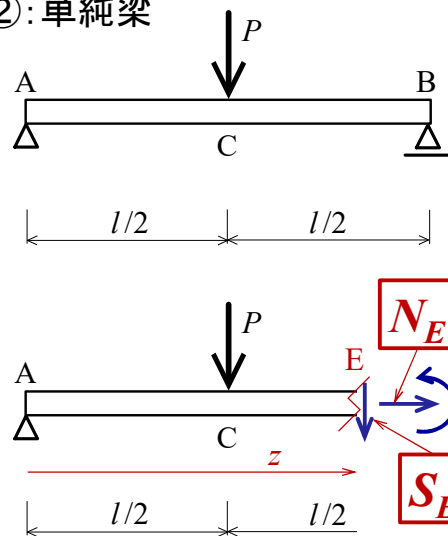
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

31

## 1.3 内力のつり合い

05:00

例題②: 単純梁



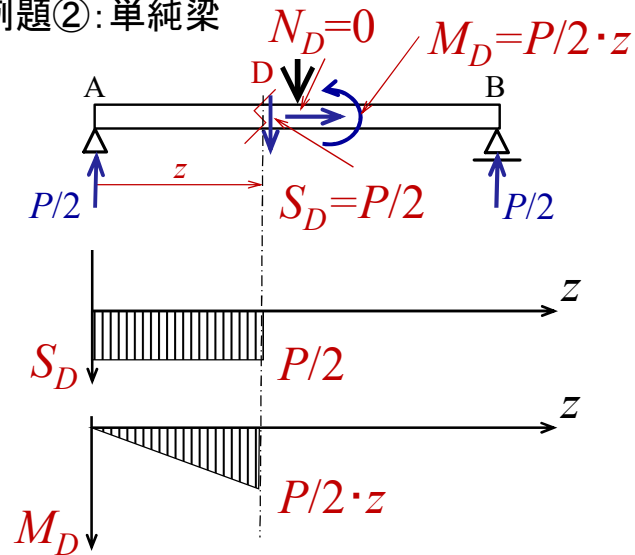
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

32



## 1.3 内力のつり合い

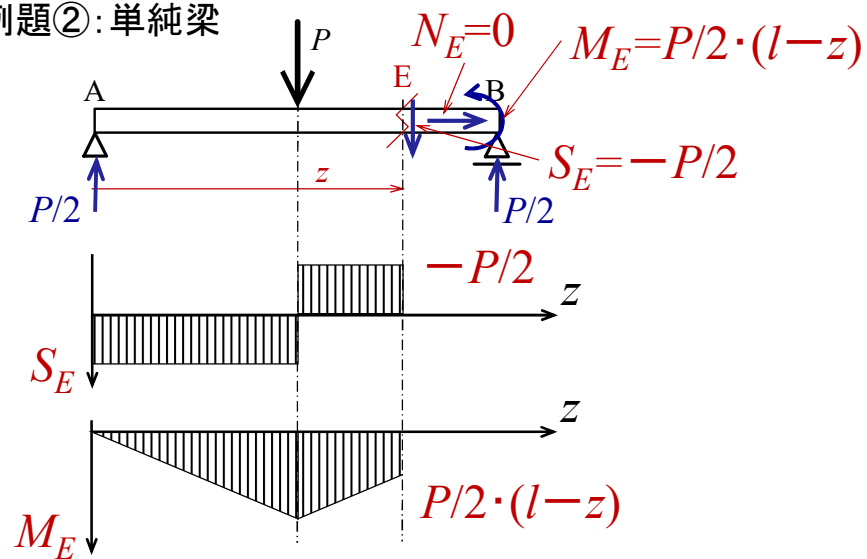
例題②: 単純梁



33

## 1.3 内力のつり合い

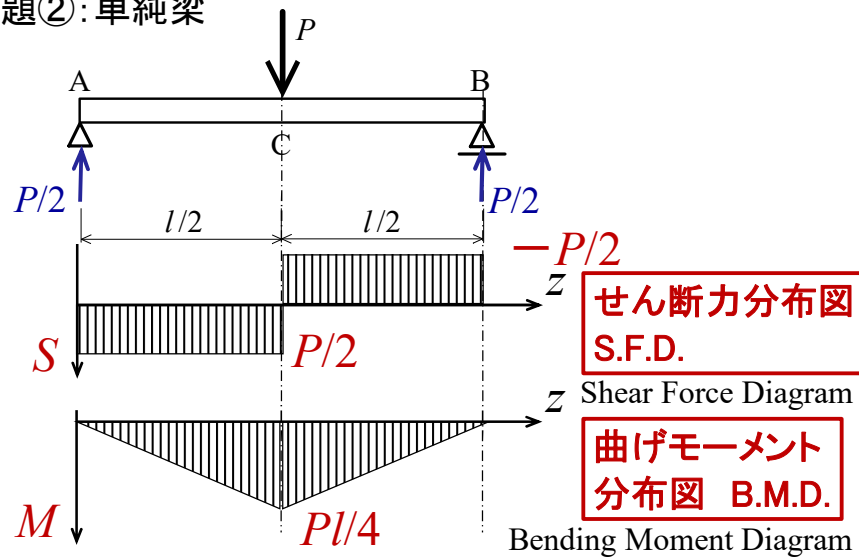
例題②: 単純梁



34

## 1.3 内力のつり合い

例題②: 単純梁

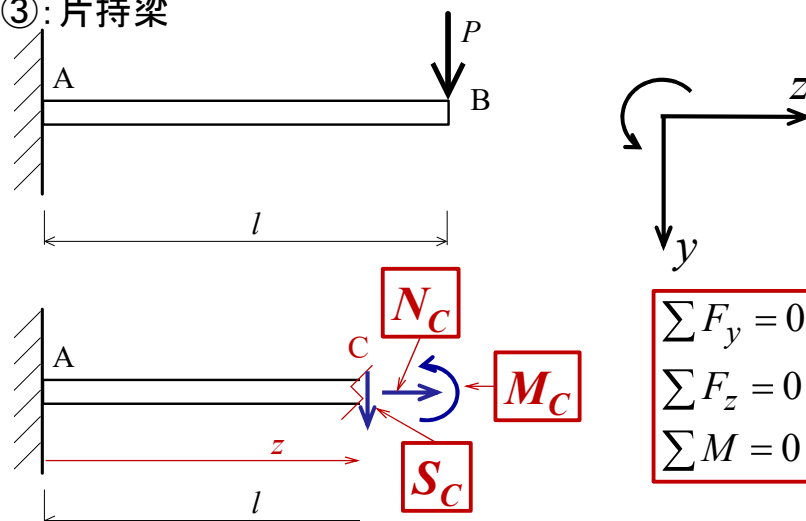


35

## 1.3 内力のつり合い

05:00

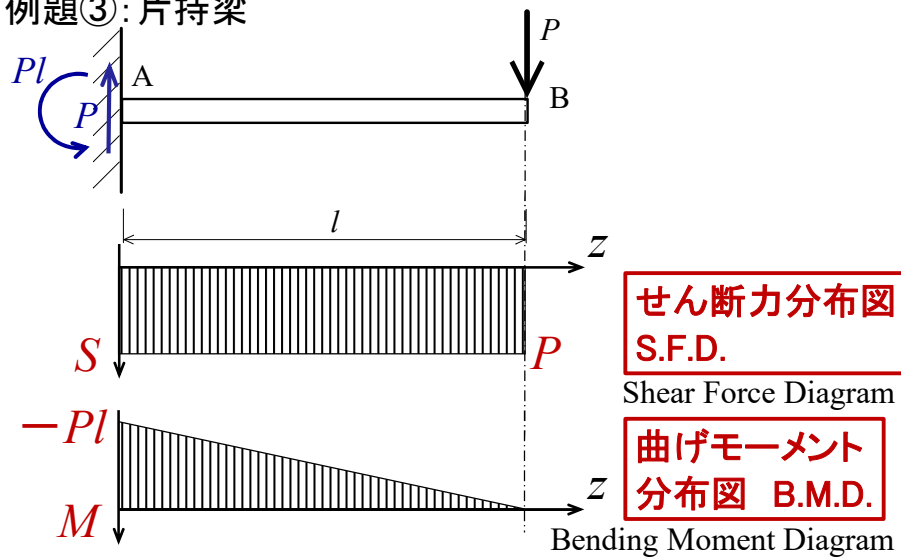
例題③: 片持梁



36

## 1.3 内力のつり合い

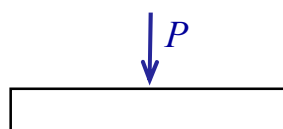
例題③: 片持梁



37

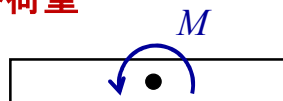
## ★ 外力の種類

集中荷重



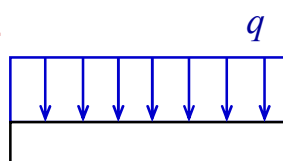
一点に作用する  
力

モーメント荷重



一点に作用する  
モーメント

分布荷重



ある範囲に作用  
する力  
棒材の場合、単  
位長さあたりの  
力で表す

38

## ★ 分布荷重の考え方

分布荷重が作用する部材の微小部分 $dz$ を考える。  
微小部分によって生じるA点の断面力は、

$$dS_A = q(z)dz$$

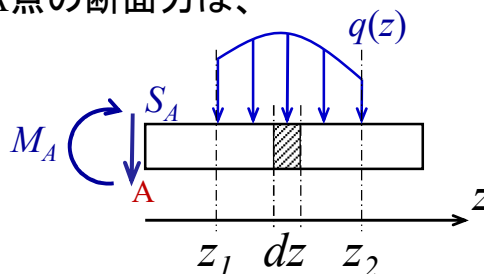
$$dM_A = q(z)dz \cdot z$$



$$S_A = \int_{z_1}^{z_2} q(z)dz$$

$$M_A = \int_{z_1}^{z_2} q(z) \cdot z dz$$

ここで、 $\frac{M_A}{S_A}$  を考えると、...



39

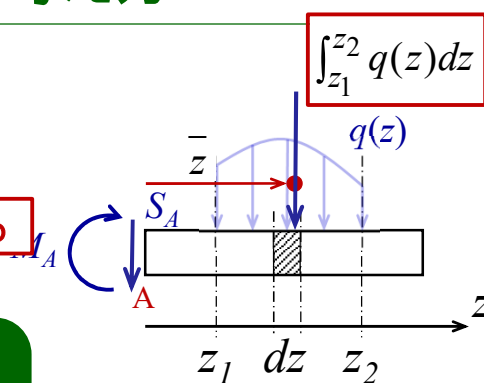
## ★ 分布荷重の考え方

$$\frac{M_A}{S_A} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} q(z) \cdot z dz}{\int_{z_1}^{z_2} q(z) dz} = \bar{z}$$

$\bar{z}$  :  $q(z)$  の図心を与える



大きさが $q(z)$ の面積、  
作用位置が図心の  
集中荷重に置き換え  
ばよい

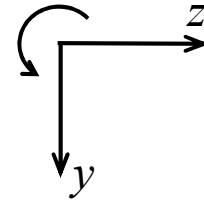
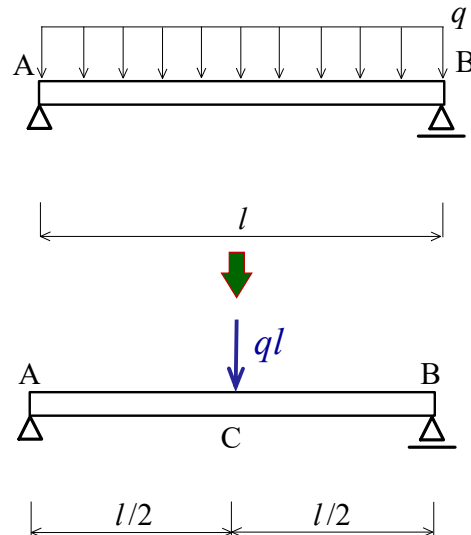


40

## ★ 分布荷重の考え方

01:00

例題④: 等分布荷重が作用する単純梁



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

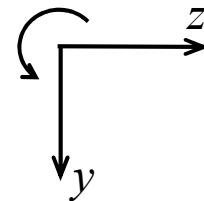
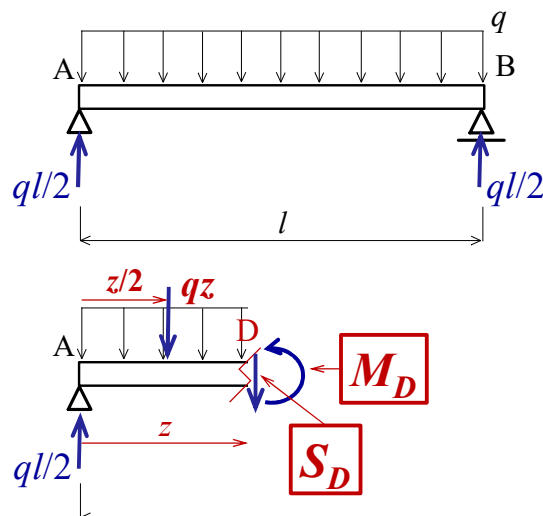
$$\sum M = 0$$

41

## ★ 分布荷重の考え方

05:00

例題④: 等分布荷重が作用する単純梁



$$\sum F_y = 0$$

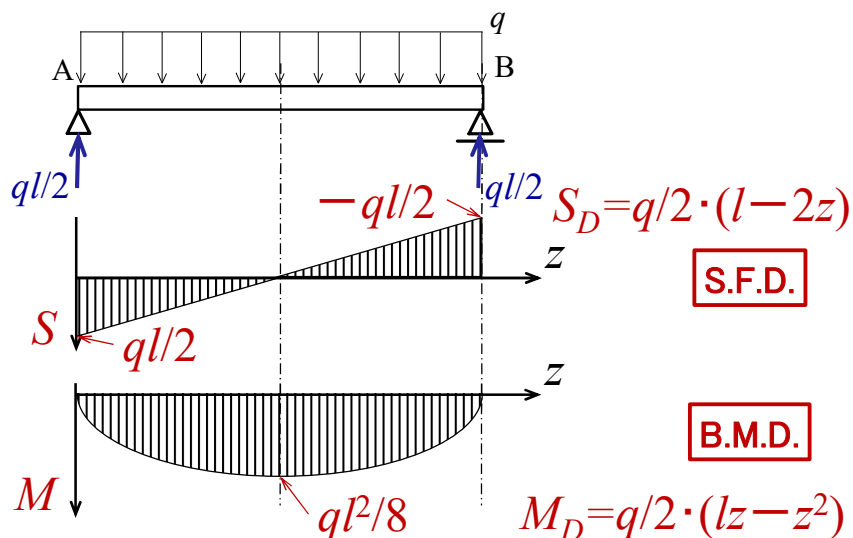
$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M = 0$$

42

## ★ 分布荷重の考え方

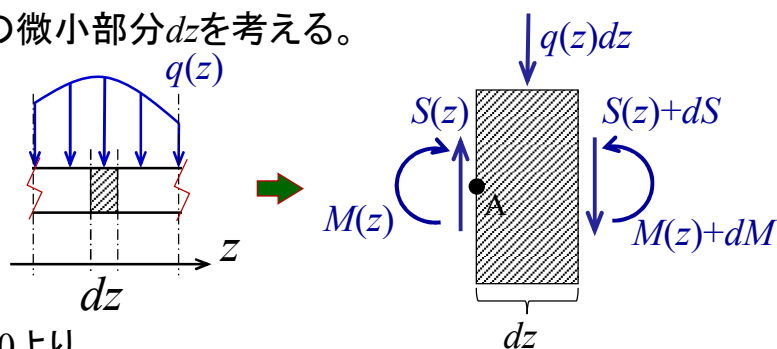
例題④: 等分布荷重が作用する単純梁



43

## ★ 荷重・せん断力・曲げモーメントの関係

部材の微小部分  $dz$  を考える。



$\Sigma F_y = 0$  より、

$$-S(z) + S(z) + dS + q(z)dz = 0$$

$\Sigma M = 0$  (A点まわり) より、

$$-M(z) + M(z) + dM - (S(z) + dS)dz - q(z)dz(dz/2) = 0$$

$$\therefore dM - S(z)dz - dSdz - q(z) \cdot (dz)^2 / 2 = 0$$

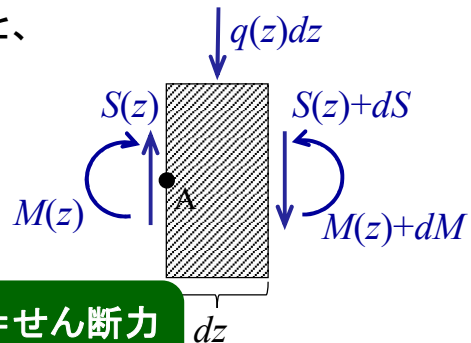
44

## ★ 荷重・せん断力・曲げモーメントの関係

2次の微小項を省略すると、

$$\frac{dS(z)}{dz} = -q(z)$$

$$\frac{dM(z)}{dz} = S(z)$$



曲げモーメントの微分＝せん断力  
せん断力の微分＝荷重

荷重の積分＝せん断力  
せん断力の積分＝曲げモーメント

45

## ★ 荷重・せん断力・曲げモーメントの関係

荷重条件	せん断力 S.F.D.	曲げモーメント B.M.D.
モーメント	0	定数
集中荷重	定数	1次式
等分布荷重	1次式	2次式
分布荷重 (1次式)	2次式	3次式
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

46

## 第1章 おしまい

47

### ★ 修正

---

第4週講義ビデオ32分頃:

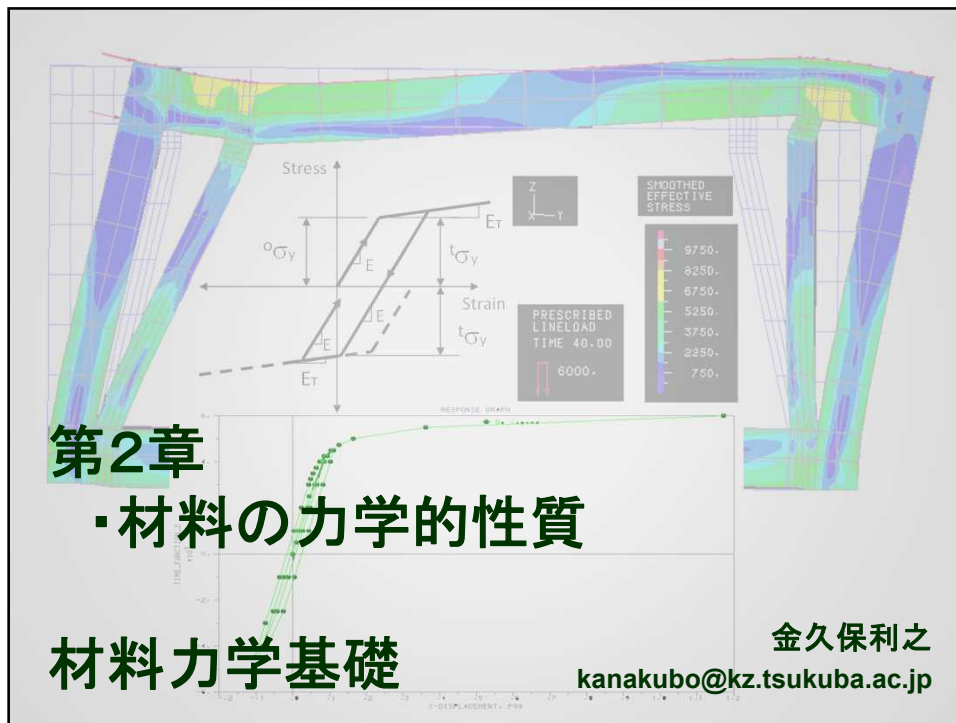
D点まわりのモーメントのつり合い

$$-\frac{ql}{2}z + (qz)\frac{qz}{2} + M_D = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{ql}{2}z + (qz)\frac{z}{2} + M_D = 0$$

48

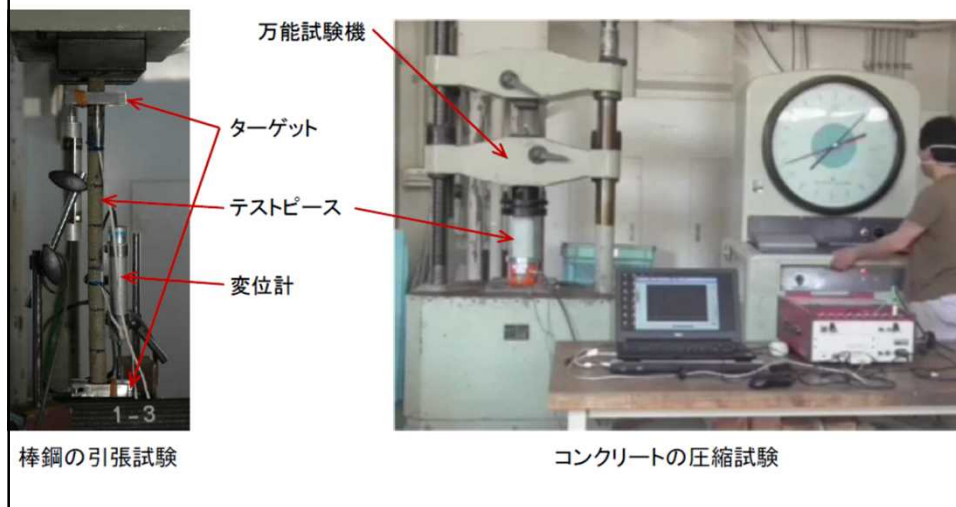




1

## 2 材料の力学的性質

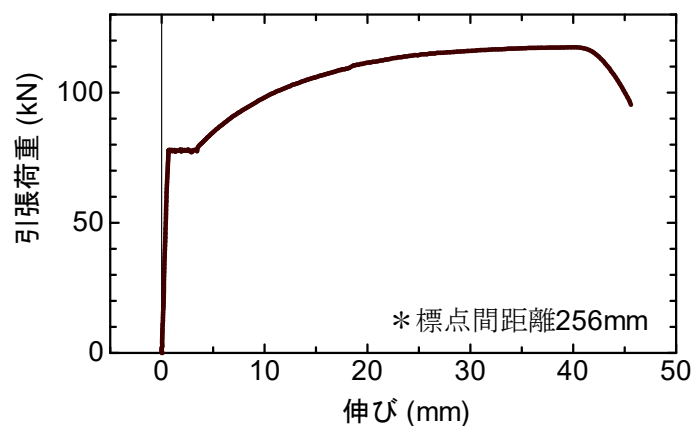
- ・ 固体材料の引張試験・圧縮試験



2

## 2 材料の力学的性質

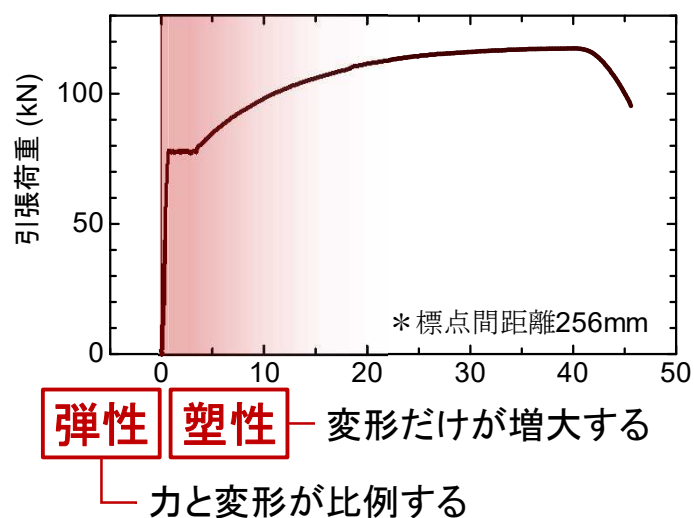
### ・ 棒鋼の引張試験結果



3

## 2 材料の力学的性質

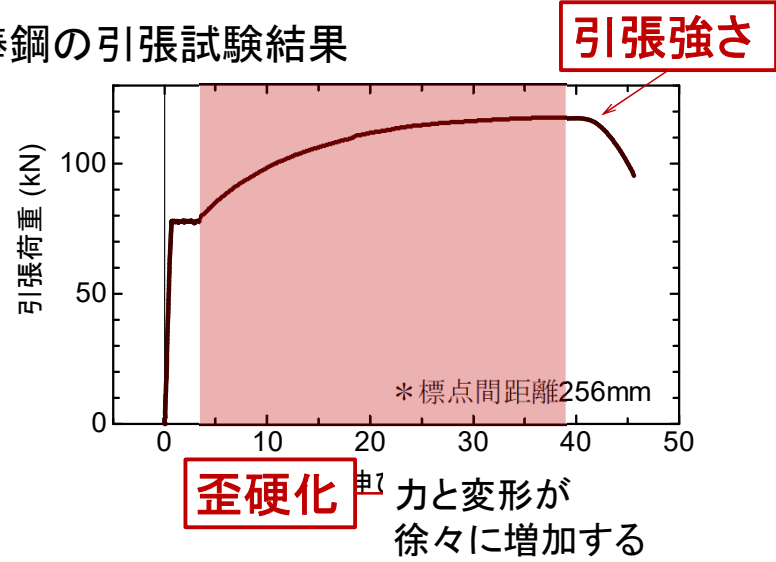
### ・ 棒鋼の引張試験結果



4

## 2 材料の力学的性質

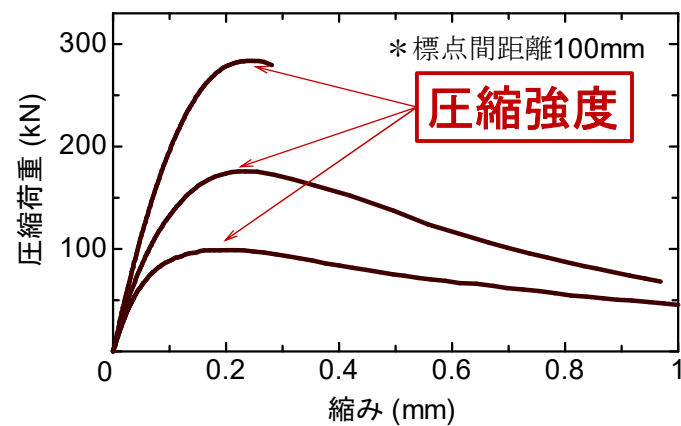
- 棒鋼の引張試験結果



5

## 2 材料の力学的性質

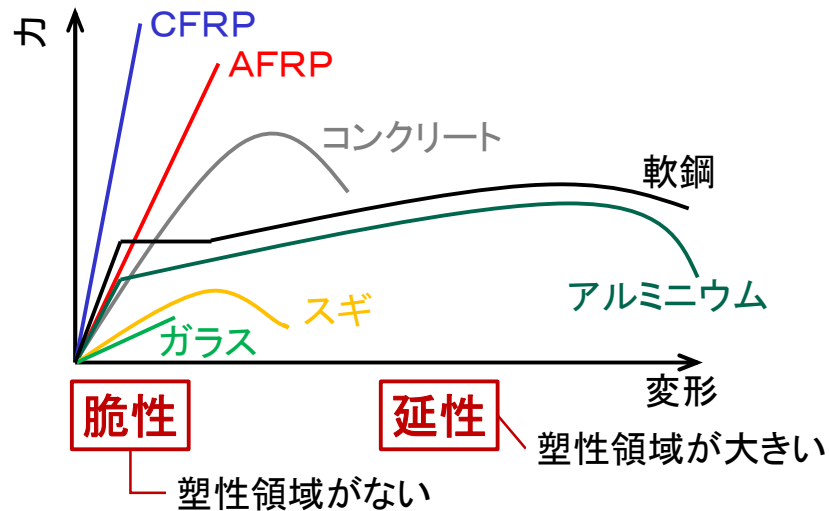
- コンクリートの圧縮試験結果



6

## 2 材料の力学的性質

- ・ 固体材料の力と変形の関係



7

## 2 材料の力学的性質

### ロバート・フック (Robert Hooke, 1635-1703)

1678: De Potentiâ Restitutiva (ばねについて)

20、30、40ftの針金を選び、その上端を釘に結び、他端に秤皿をつけて錘を乗せる。

次に、秤皿の底と地面あるいは床の距離を測定し、これを記録する。さらに秤皿に錘を乗せて針金の伸びを測定し、記録する。

この伸びを検討すると、伸びの比は加えた錘の比に等しいことがわかる。



S.P.ティモシェンコ著、最上武雄監訳、川口昌宏訳: 材料力学史、鹿島出版会

8

## 2 材料の力学的性質

### トーマス・ヤング (Thomas Young, 1773-1829)

1807: A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts  
(王立科学研究所講義録)



ある物質の弾性係数とは、底面に生じる圧力と、ある大きさの圧縮を起こさせる重さの比が、その長さの減少の比に等しいような圧力を生じうる柱のことである。

※弾性率を最初に取り入れたのはYoungであった。しかし、その定義は現在のものと異なり、現在一般的なのはNavier(1785-1836)の定義である。

S.P.ティモシェンコ著、最上武雄監訳、川口昌宏訳: 材料力学史、鹿島出版会

9

## 2 材料の力学的性質

### ベルヌイ (Bernoulli) 家

#### ヤコブ・ベルヌイ (Jacob Bernoulli, 1654-1705)

1705: Historie de l'Academie des Sciences de Paris

中立軸は、外力の作用線と梁の軸を含む平面に垂直な凹外縁に接し、曲げによって、断面は回転してたわみを生じる。任意の点のたわみの曲率は、その点の曲げモーメントに比例する。

#### ヨハン・ベルヌイ (John Bernoulli, 1667-1748)

1725: Varignon, "Nouvelle Mecanique"

仮想変位の原理

S.P.ティモシェンコ著、最上武雄監訳、川口昌宏訳: 材料力学史、鹿島出版会

10

## 2 材料の力学的性質

### ベルヌイ(Bernoulli) 家

**ダニエル・ベルヌイ(Daniel Bernoulli, 1700-1782)** (ヨハンの子)

13歳でバーゼル大学へ入り、15歳で学士試験に受かり、16歳で修士号を取得した。一様断面梁のたわみ振動の微分方程式を解く。

1738: Hydrodynamica (流体力学)

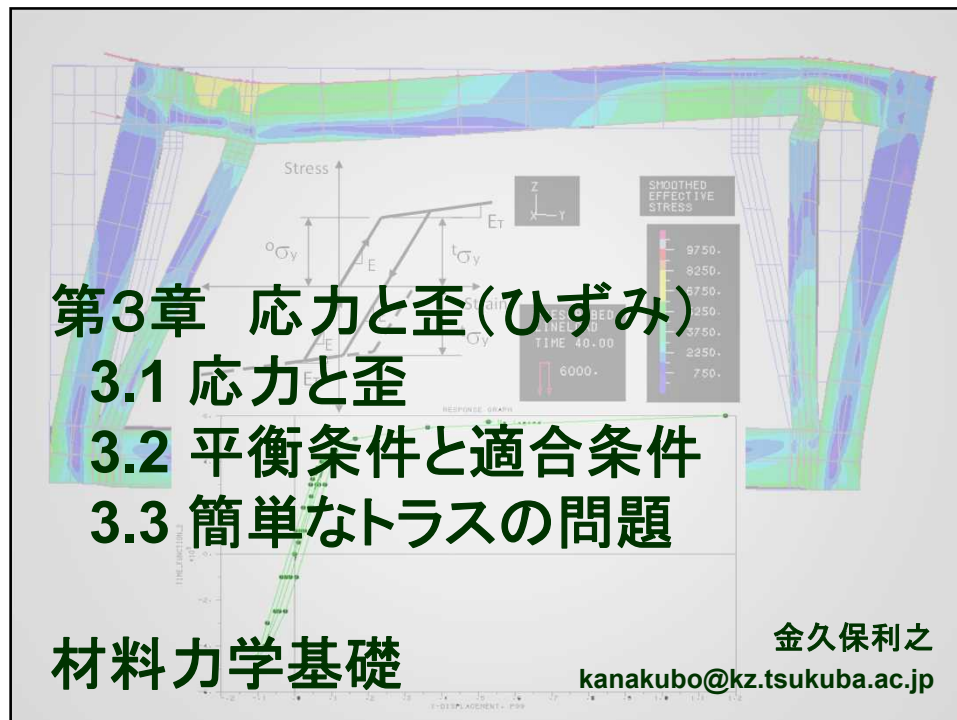
空気や水の流れがはやくなると、そのはやくなった部分は圧力が低くなる。はやく流れるほど圧力は下がる。

S.P.ティモシェンコ著、最上武雄監訳、川口昌宏訳: 材料力学史、鹿島出版会

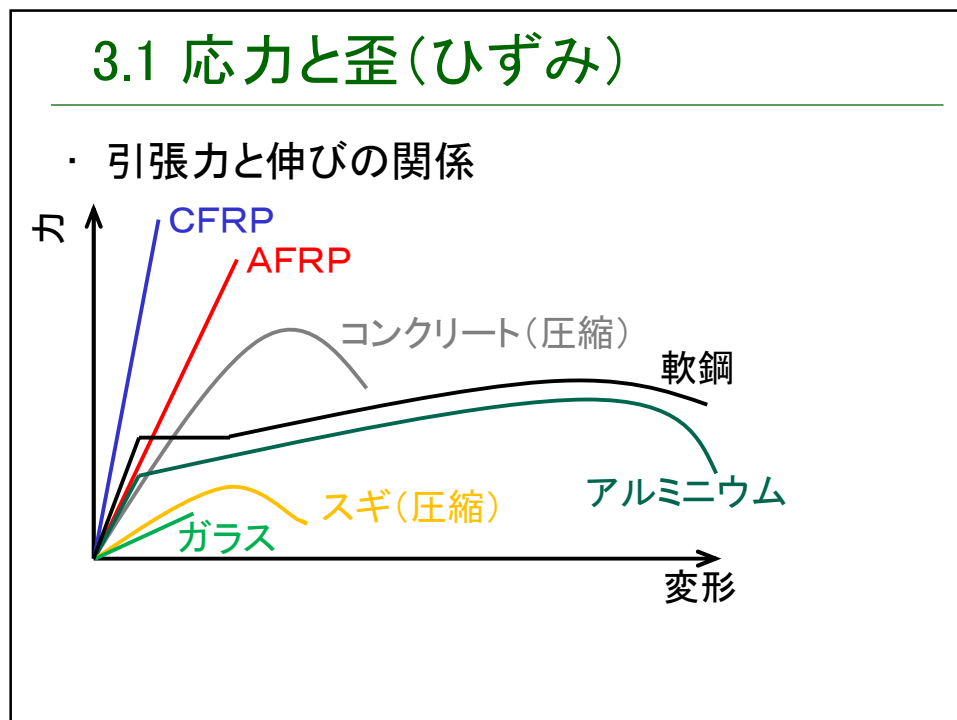
11

## 第2章 おしまい

12



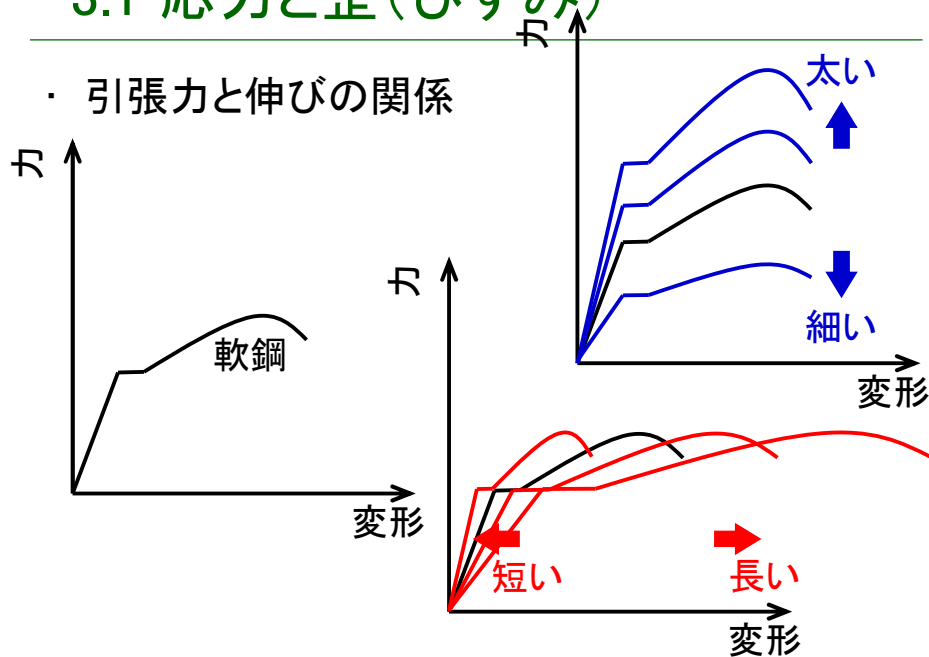
1



2

### 3.1 応力と歪(ひずみ)

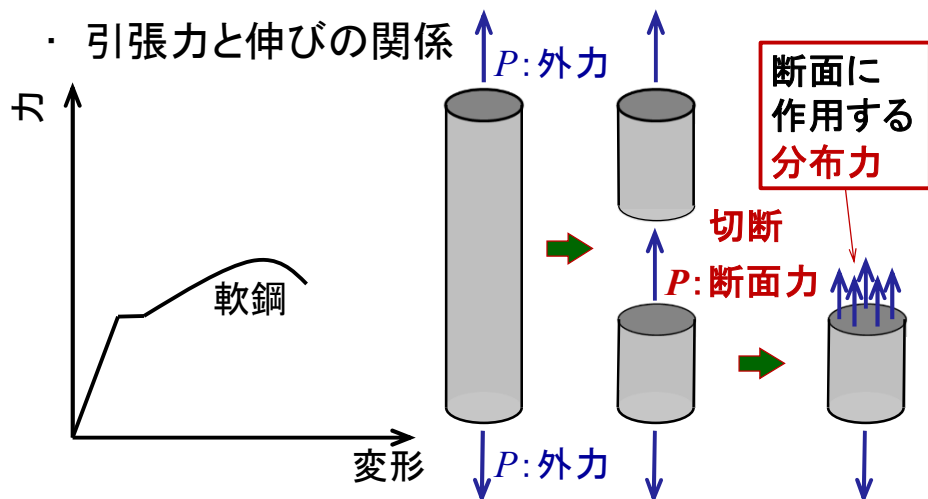
- ・ 引張力と伸びの関係



3

### 3.1 応力と歪(ひずみ)

- ・ 引張力と伸びの関係

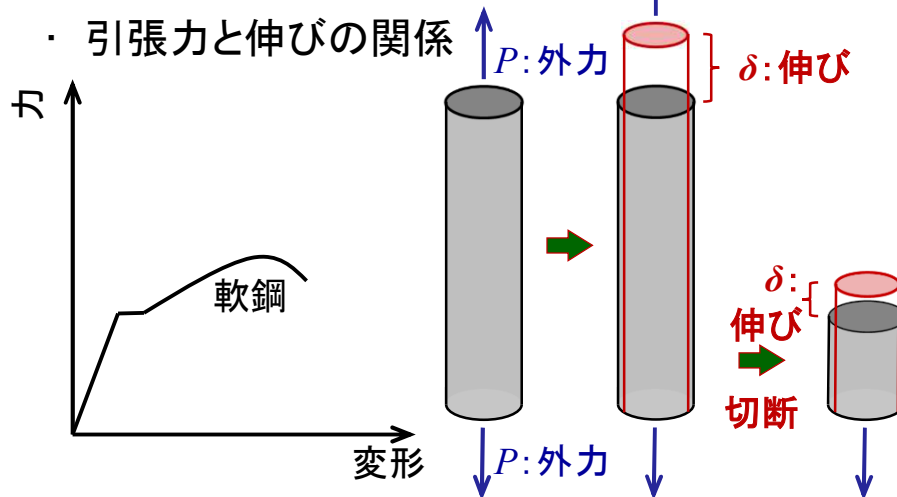


4



### 3.1 応力と歪(ひずみ)

- ・ 引張力と伸びの関係



5

### 3.1 応力と歪(ひずみ)

断面力を、作用する面積で割って、単位面積あたりの力で考える

⇒ **応力** Stress

伸びを、もとの長さで割って、もとの長さとの比で考える

⇒ **歪** Strain

**応力**  $\sigma = \frac{P}{A}$

シグマ

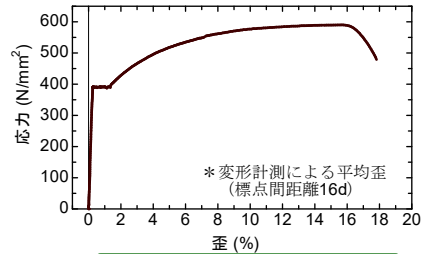
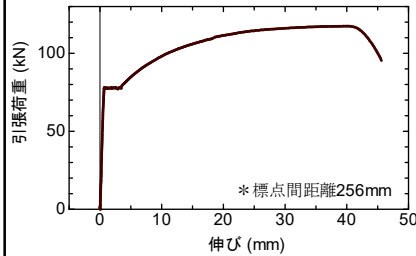
**歪**  $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$

イプシロン

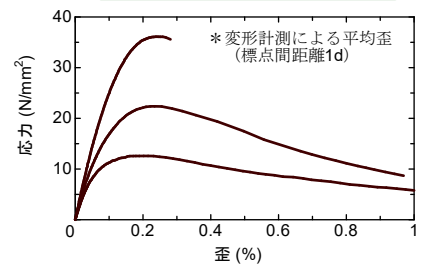
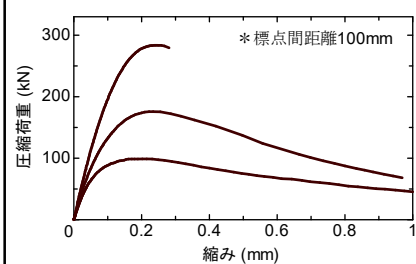
6

### 3.1 応力と歪(ひずみ)

#### ・ 鋼棒の引張試験



#### ・ コンクリートの圧縮試験

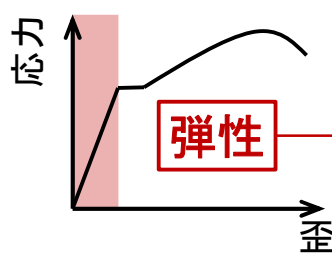


#### 応力-歪関係

7

### 3.1 応力と歪(ひずみ)

#### ・ 引張力と伸びの関係

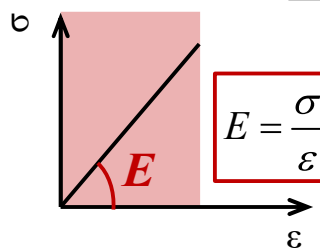


力と変形が比例する

応力と歪が比例する

Young's modulus

比例係数: ヤング率



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

または、ヤング係数、  
弾性係数、  
弾性率、など  
Elastic modulus

Hookeの法則

8

## 3.1 応力と歪(ひずみ)

- ・ 応力の次元・単位

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{[\text{力}]}{[\text{面積}]} = \frac{[\text{力}]}{[\text{長さ}]^2}$$

よく使われる単位:

$$\text{N/mm}^2$$

$$= 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$= \text{MPa (メガパスカル)}$$

- ・ 歪の次元・単位

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} = \frac{[\text{長さ}]}{[\text{長さ}]} = [\text{無次元}]$$

よく使われる接頭辞:

$$1$$

$$= 10^2 \%$$

$$= 10^6 \mu (\text{マイクロ})$$

- ・ ヤング率の次元・単位

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{[\text{力}]/[\text{長さ}]}{[\text{長さ}]/[\text{長さ}]} = \frac{[\text{力}]}{[\text{長さ}]}$$

よく使われる単位:

$$10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$= \text{kN/mm}^2$$

$$= 10^3 \text{ MPa}$$

$$= 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$= \text{GPa (ギガパスカル)}$$

応力と同じ

9

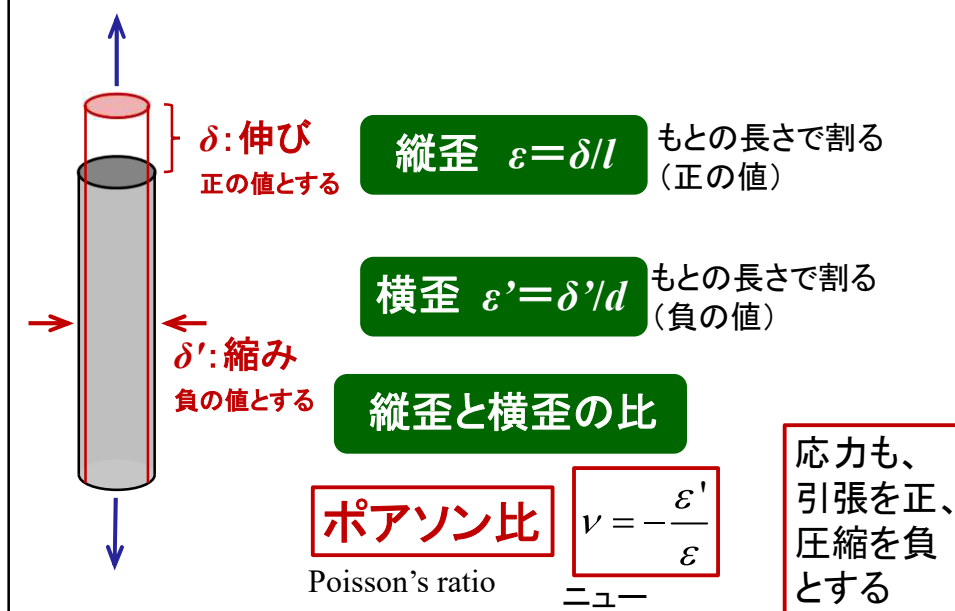
## 3.1 応力と歪(ひずみ)

- ・ 金属系材料の材料定数

材 種	弾性係数 $E$ (kN/mm <sup>2</sup> )	せん断 弾性係数 $G$ (kN/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比 $\nu$	線膨張係数 $\alpha$ ( $\times 10^{-6}/\text{K}$ )
アルミニウム	71	26	0.34	23.8
鉛	17	7	0.45	29.3
鉄	206	81	0.28	11.7
銅	123	46	0.34	17.0
金	79	27	0.42	14.3
ニッケル	201	74	0.31	13.0
白金	167	61	0.39	8.9
銀	79	28	0.38	182.0
亜鉛	98	31	0.33	29.7
すず	54	27	0.33	27.0

10

### 3.1 応力と歪(ひずみ)



11

### 3.1 応力と歪(ひずみ)

05:00

#### 例題①

長さが3m、断面が30mm×40mmの長方形の鋼棒に、96kNの引張力を作用させた。

このとき、棒の応力、歪、横歪、伸びを求めなさい。ただし、ヤング率は200kN/mm<sup>2</sup>、ポアソン比は0.28とする。



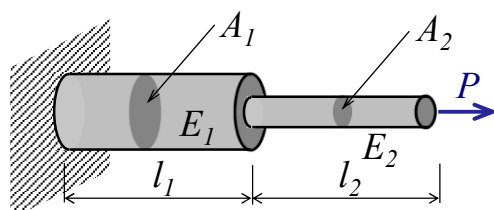
12

## 3.2 平衡条件と適合条件

05:00

### 例題②

長さ、断面積、材質が異なる2つの棒がつながれ、壁に埋め込まれている。引張力 $P$ が作用するとき、全体の伸びを求めなさい。



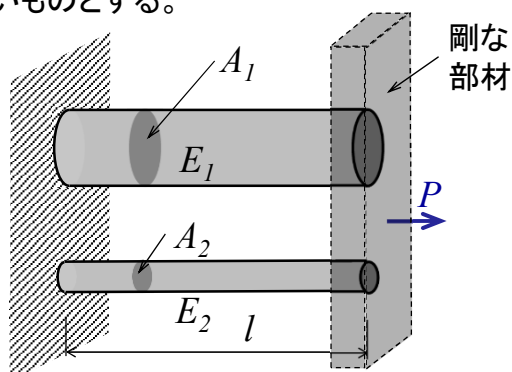
13

## 3.2 平衡条件と適合条件

05:00

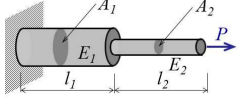
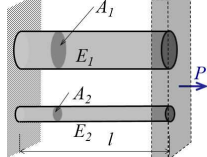
### 例題③

長さが $l$ で、断面積、材質が異なる2つの棒が剛な部材を介して、並列につながれ、壁に埋め込まれている。引張力 $P$ が作用するとき、全体の伸びを求めなさい。なお、剛な部材は回転しないものとする。



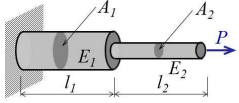
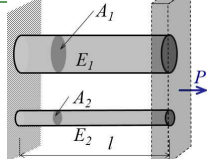
14

### 3.2 平衡条件と適合条件

条 件		
内力のつり合い	$P = P_1 = P_2$	$P = P_1 + P_2$
力と変形 (応力と歪) の関係	$\begin{cases} \delta_1 = \frac{l_1}{A_1 E_1} P_1 \\ \delta_2 = \frac{l_2}{A_2 E_2} P_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \delta_1 = \frac{l_1}{A_1 E_1} P_1 \\ \delta_2 = \frac{l_2}{A_2 E_2} P_2 \end{cases}$
幾何学的条件	$\delta = \delta_1 + \delta_2$	$\delta = \delta_1 = \delta_2$

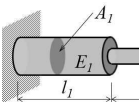
15

### 3.2 平衡条件と適合条件

条 件		
<b>平衡条件</b>	$P = P_1 = P_2$	$P = P_1 + P_2$
力と変形 <b>構成則</b> の関係	$\begin{cases} \delta_1 = \frac{l_1}{A_1 E_1} P_1 \\ \delta_2 = \frac{l_2}{A_2 E_2} P_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \delta_1 = \frac{l_1}{A_1 E_1} P_1 \\ \delta_2 = \frac{l_2}{A_2 E_2} P_2 \end{cases}$
<b>適合条件</b>	$\delta = \delta_1 + \delta_2$	$\delta = \delta_1 = \delta_2$

16

## 3.2 平衡条件と適合条件

3.2 平衡条件と適合条件	
条 件	
平衡条件	Equilibrium condition
力と変形 構成則 の関係	$\begin{cases} \delta_1 = \frac{l_1}{E_1 A_1} P \\ \delta_2 = \frac{l_2}{E_2 A_2} P \end{cases}$ Constitutive law
適合条件	Compatibility condition

材料力学(と構造力学)とは、これらの条件を駆使して、力と変形(応力と歪)を求めること

材料力学は、どちらかという、構成則を見いだす方

構造力学は、どちらかという、平衡条件と適合条件を使う方

(注: 個人的な思い入れあり)

17

## 3.2 平衡条件と適合条件

### 構成則の例

#### - 材料構成則

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \begin{array}{l} \text{歪} \\ \text{ヤング率} \end{array}$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \begin{array}{l} \text{せん断歪} \\ \text{せん断弾性係数} \end{array}$$

応力      せん断 応力

#### - 部材の構成則

$$P = \frac{AE}{l} \delta$$

軸力と伸び(縮み)の関係

**剛性**  
(この場合、**軸剛性**)

$$\delta = \frac{l}{AE} P$$

**柔性**

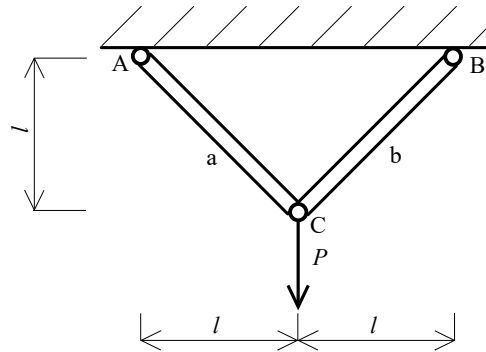
18

### 3.3 簡単なトラスの問題

05:00

#### 例題④

ピン接合された2つの棒材a、bのC点に、集中荷重 $P$ が鉛直下向きに作用している。ただし、すべての材の断面積は $A$ 、ヤング率は $E$ とする。

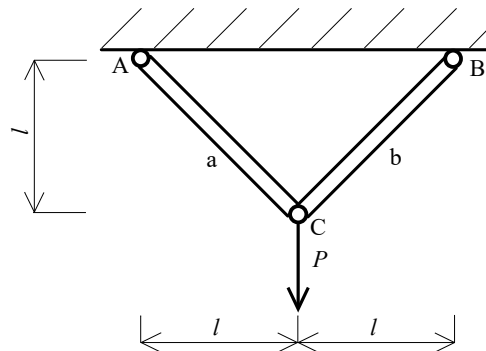


19

### 3.3 簡単なトラスの問題

#### 例題④

ピン接合された2つの棒材a、bのC点に、集中荷重 $P$ が鉛直下向きに作用している。ただし、すべての材の断面積は $A$ 、ヤング率は $E$ とする。



$$P_a = \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad P_b = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$\delta_a = \frac{Pl}{AE}, \quad \delta_b = \frac{Pl}{AE}$$

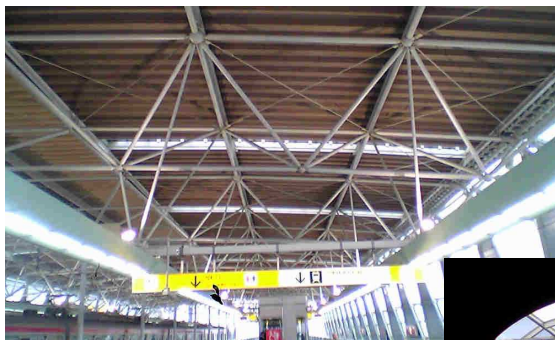
$$u = 0, \quad v = \frac{\sqrt{2}Pl}{AE} \quad (\text{下方向})$$

20



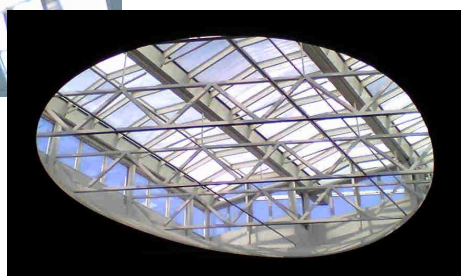
### 3.3 簡単なトラスの問題

トラスの例



つくば国際会議場(エポカル)

つくばエクスプレス北千住駅



21

### 3.3 簡単なトラスの問題

トラスの例



東京ゲートブリッジ

利根川橋梁(つくばエクスプレス)



22

### 3.3 簡単なトラスの問題

トラスの例



東京スカイツリー



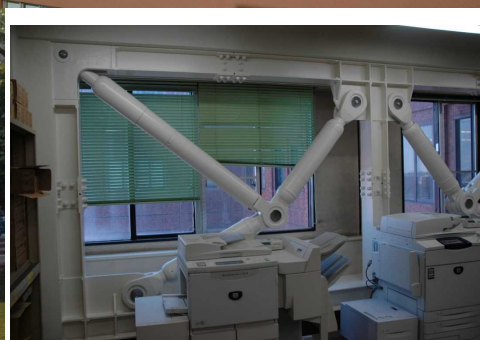
エッフェル塔(フランス)

23

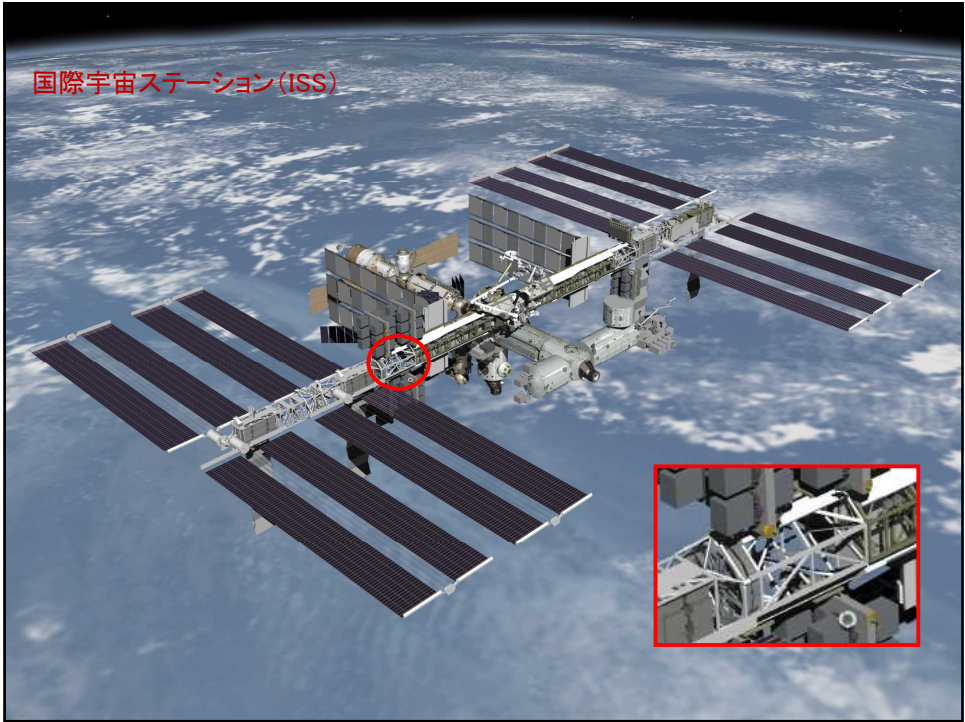
### 3.3 簡単なトラスの問題

トラスの例

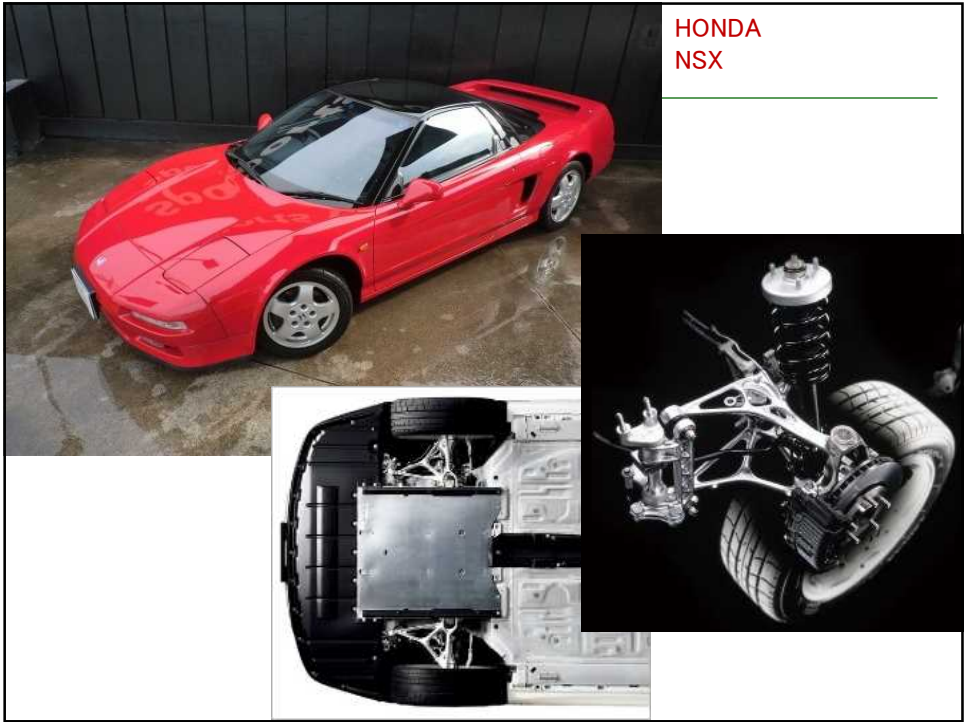
筑波大学校舎の  
鉄骨ブレース



24



25



26



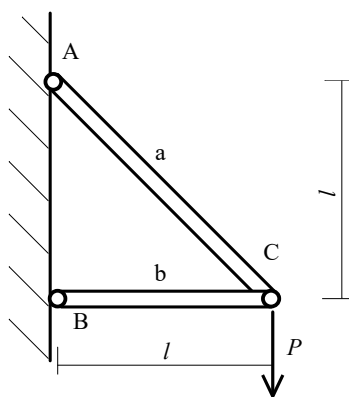
27

### 3.3 簡単なトラスの問題

05:00

#### 例題⑤

ピン接合された2つの棒材a、bのC点に、集中荷重 $P$ が鉛直下向きに作用している。ただし、すべての材の断面積は $A$ 、ヤング率は $E$ とする。



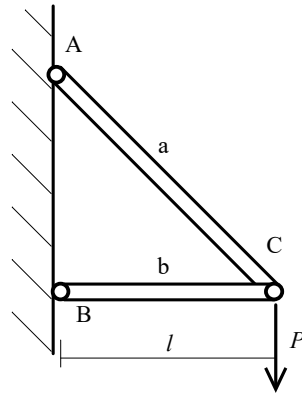
28



### 3.3 簡単なトラスの問題

#### 例題⑤

ピン接合された2つの棒材a、bのC点に、集中荷重 $P$ が鉛直下向きに作用している。ただし、すべての材の断面積は $A$ 、ヤング率は $E$ とする。



$$P_a = \sqrt{2}P, \quad P_b = -P$$

(引張)                  (圧縮)

$$\delta_a = \frac{2Pl}{AE}, \quad \delta_b = -\frac{Pl}{AE}$$

(伸び)                  (縮み)

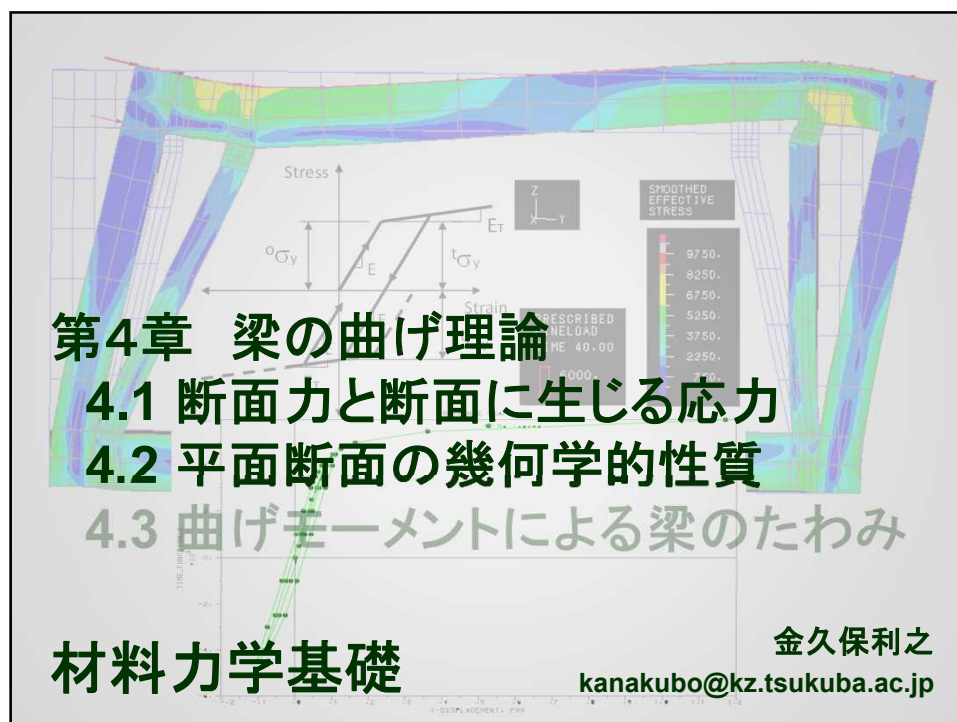
$$u = \frac{Pl}{AE}, \quad v = \frac{(2\sqrt{2}+1)Pl}{AE}$$

(左方向)                  (下方向)

29

## 第3章 おしまい

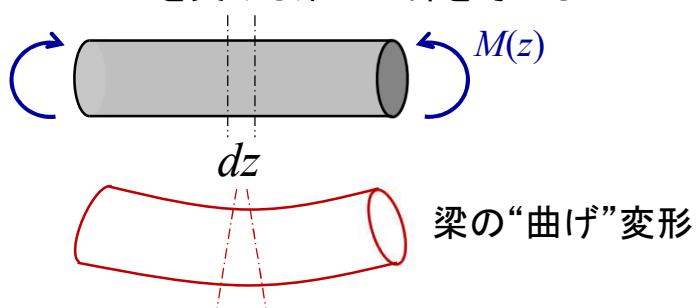
30



1

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

- ・ 曲げモーメントのみを受ける梁の一部を考える



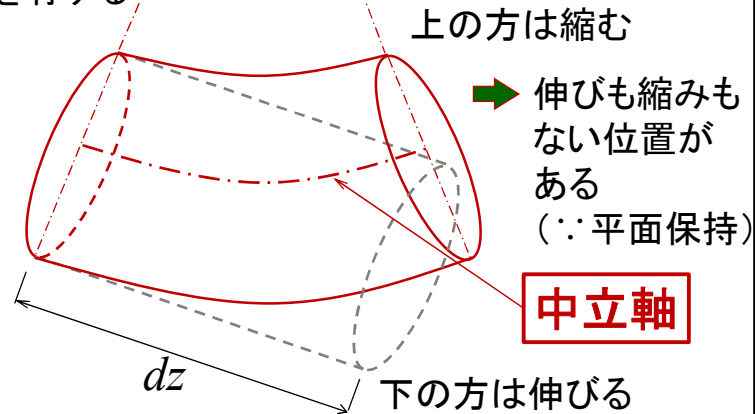
梁の曲げ変形の仮定(適合条件):  
 「変形前の平面は、変形後も平面である」  
 (平面保持の仮定: Bernoulli-Eulerの仮定)

2

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

- ・ 曲げ変形する微小部分( $dz$ )を考える

両端の平面は平行でなくなり、  
角度を有する



3

## 4.1 曲率

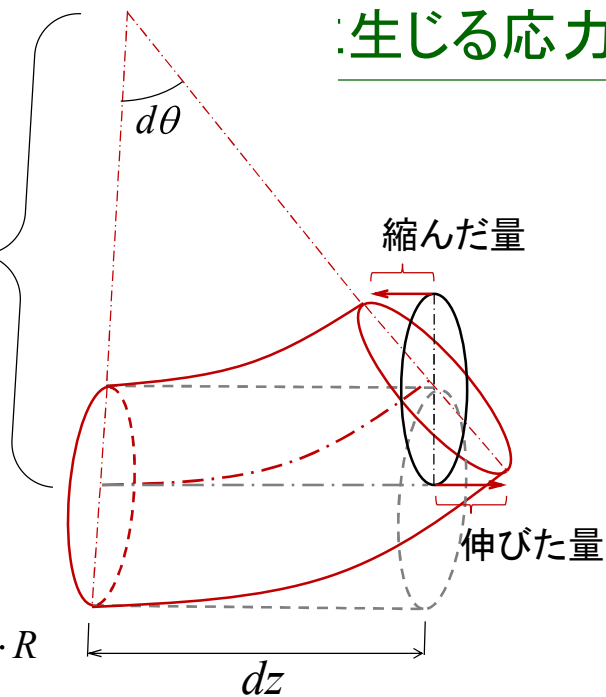
## 生じる応力

曲率半径  
Radius of curvature:  $R$

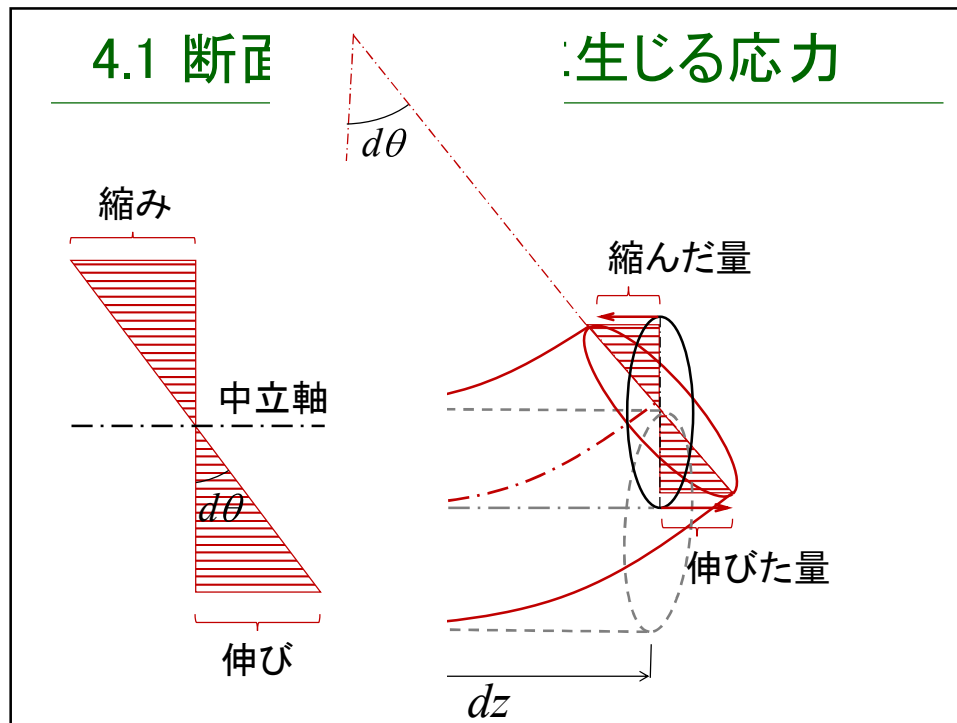
$$\phi = \frac{1}{R}$$

**曲率**  
Curvature

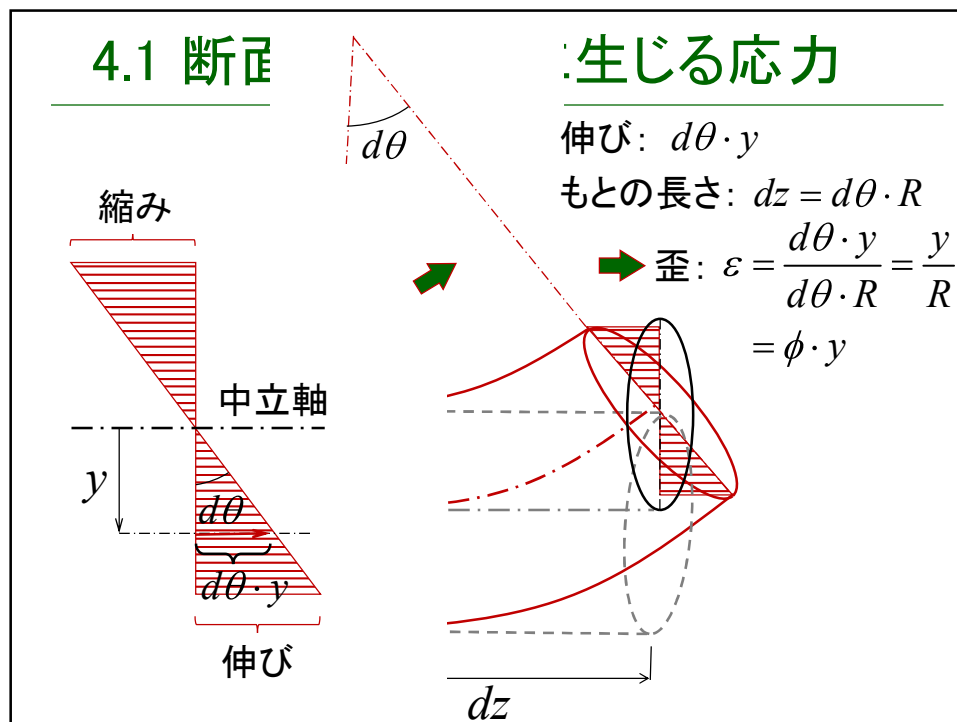
➡  $dz = d\theta \cdot R$



4



5



6



### 4.1 断面に生じる応力

伸び:  $d\theta \cdot y$   
 もとの長さ:  $dz = d\theta \cdot R$   
 歪:  $\varepsilon = \frac{d\theta \cdot y}{d\theta \cdot R} = \frac{y}{R}$   
 $= \phi \cdot y$   
 断面の微小部分断面積  $= dA$   
 軸力(引張)  $= dN$

7

### 4.1 断面力と断面に生じる応力

Hookeの法則(弾性)  
 $\sigma = E \cdot \varepsilon$  より、  
 断面内の微小部分の応力は、  
 $\sigma = E \cdot \phi \cdot y$   
 したがって、  
 $dN = \sigma \cdot dA = E \cdot \phi \cdot y \cdot dA$   
 いま、断面力は、曲げモーメントしか考えていないので、  
 内力のつり合いから、  
 $\int_A dN = 0$   
 $\therefore \int_A E \cdot \phi \cdot y \cdot dA = 0$

断面の微小部分断面積  $= dA$   
 軸力(引張)  $= dN$

8

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

Hookeの法則(弾性)

$\sigma = E \cdot \varepsilon$  より、  
断面内の微小部分の応力は、

$$\sigma = E \cdot \phi \cdot y$$

したがって、

$$dN = \sigma \cdot dA = E \cdot \phi \cdot y \cdot dA$$

いま、断面力は、曲げモーメントしか考えていないので、  
内力のつり合いから、

$$\int_A dN = 0$$

$$\therefore \int_A E \cdot \phi \cdot y \cdot dA = 0$$

→  $E$ 、 $\phi$  は定数なので、

$$\int_A y dA = 0$$

**断面1次  
モーメント**

中立軸からの  
1次モーメント=0

**中立軸は、図心  
位置を通る**

9

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

中立軸まわりのモーメントは、

$$dM = \sigma \cdot dA \cdot y = E \cdot \phi \cdot y^2 \cdot dA$$

$$M = \int_A dM$$

$$= \int_A E \cdot \phi \cdot y^2 \cdot dA$$

$$= E \phi \int_A y^2 dA$$

$$I = \int_A y^2 dA$$

**断面2次  
モーメント**

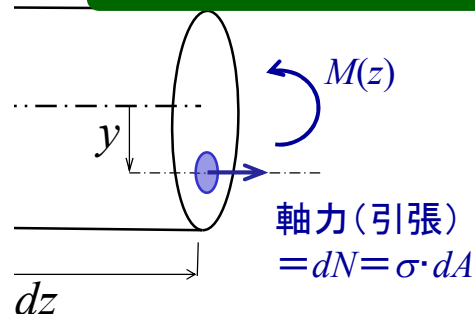
とおくと、

$$M = EI \phi$$

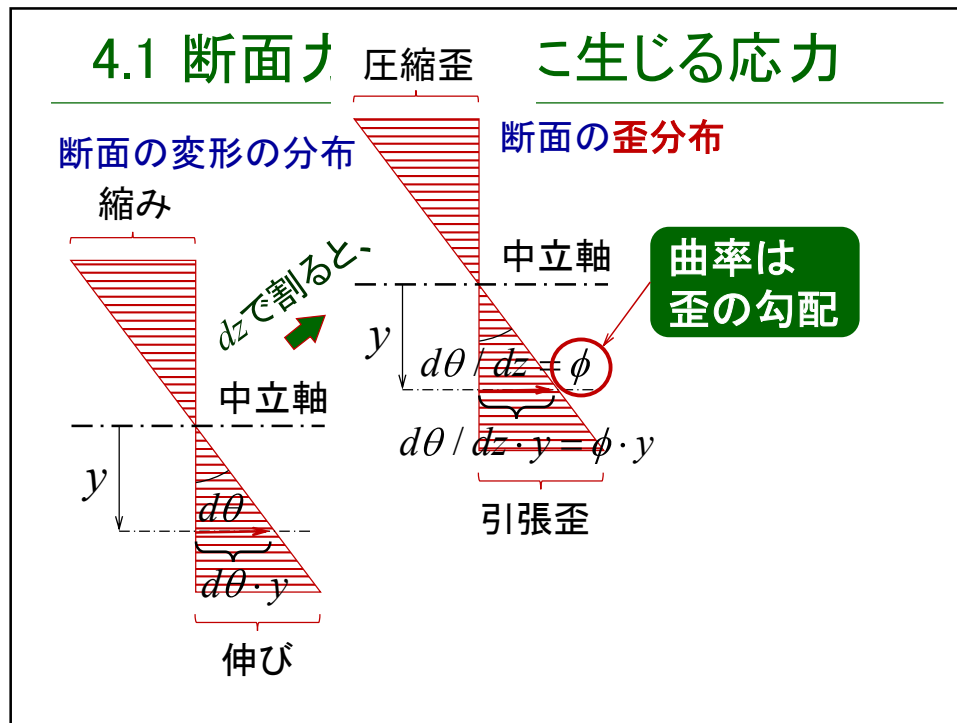
あるいは、

$$\phi = \frac{M}{EI}$$

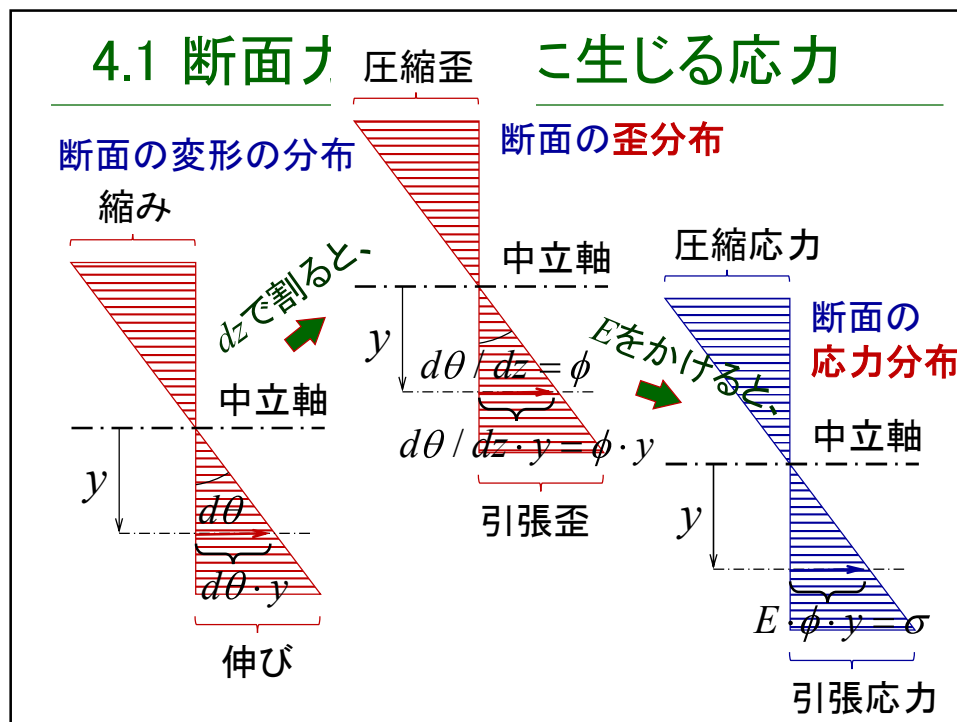
**曲げに対する構成則**



10

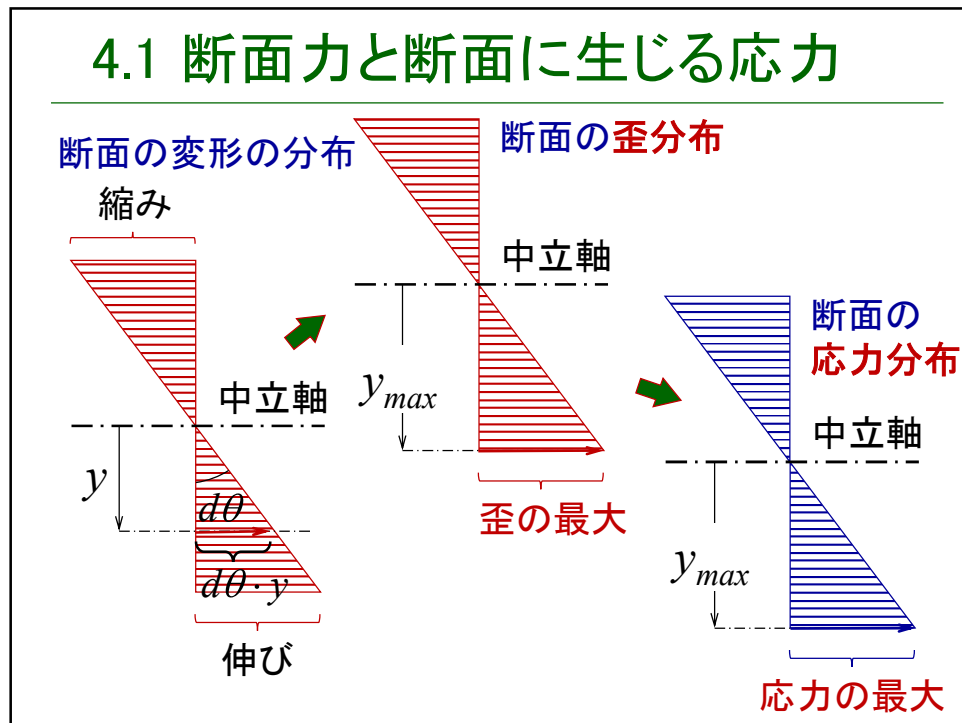


11



12

## 4.1 断面力と断面に生じる応力



13

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

応力の最大値を  $\sigma_{max}$  とおくと、  
 $\sigma = E \cdot \phi \cdot y$ ,  $M = EI\phi$  より、

$$\sigma_{max} = E \cdot \phi \cdot y_{max} = M \cdot \frac{y_{max}}{I}$$

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

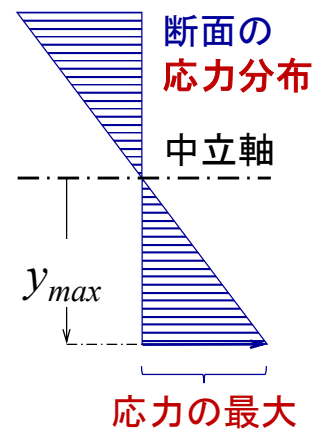
**断面係数**

とおくと、

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z}$$

**断面内の応力の最大値を与える**

$y_{max}$  は、中立軸から最も離れたところ



14

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

断面1次  
モーメント

$$S = \int_A y dA$$

断面2次  
モーメント

$$I = \int_A y^2 dA$$

断面係数

$$Z = \frac{I}{y_{\max}}$$

断面の形状  
のみで決まる

### 構成則の比較

引張	曲げ
$P = AE\varepsilon$	$M = EI\phi$
荷重 $P$	曲げモーメント $M$
断面積 $A$	断面2次モーメント $I$
ヤング率 $E$	
歪 $\varepsilon$	曲率 $\phi$
軸剛性 $AE$	曲げ剛性 $EI$

15

## 4.1 断面力と断面に生じる応力

- 断面1次モーメントの次元・単位

$$S = [\text{距離}] \times [\text{面積}] = [\text{長さ}]^3$$

よく使われる単位:  
 $\text{m}^3$   
 $= 10^9 \text{ mm}^3$

- 断面2次モーメントの次元・単位

$$I = [\text{距離}]^2 \times [\text{面積}] = [\text{長さ}]^4$$

よく使われる単位:  
 $\text{m}^4$   
 $= 10^{12} \text{ mm}^4$

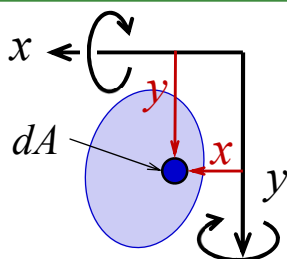
- 断面係数の次元・単位

$$Z = \frac{[\text{長さ}]^4}{[\text{距離}]} = [\text{長さ}]^3$$

よく使われる単位:  
 $\text{m}^3$   
 $= 10^9 \text{ mm}^3$

16

## 4.2 平面断面の幾何学的性質



断面1次モーメント

$$x\text{軸まわり } S_x = \int_A y dA$$

$$y\text{軸まわり } S_y = \int_A x dA$$

図心  $(x_0, y_0)$  の定義

$$x_0 = \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad y_0 = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

断面2次モーメント

$$x\text{軸まわり } I_x = \int_A y^2 dA$$

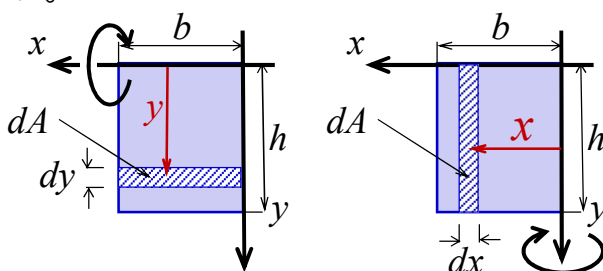
$$y\text{軸まわり } I_y = \int_A x^2 dA$$

17

## 4.2 平面断面の幾何学的性質! 05:00

例題①

幅が $b$ 、高さ(「せい」ともいう)が $h$ の長方形断面の図心位置、断面2次モーメントを求めなさい。

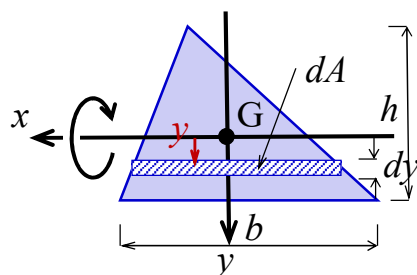


18

## 4.2 平面断面の幾何学的性! 05:00

### 例題②

底辺が $b$ 、高さが $h$ の三角形断面の、図心 $G$ を通る $x$ 軸まわりの断面2次モーメントを求めなさい。

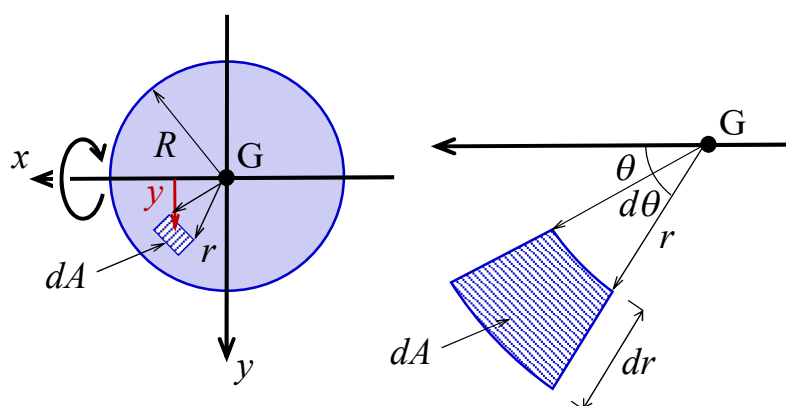


19

## 4.2 平面断面の幾何学的性! 05:00

### 例題③

半径 $R$ の円断面の断面2次モーメントを求めなさい(図心まわり)。



20

## 4.2 平面断面の幾何学的性質

## 断面2次モーメントの加減算

The diagram shows a composite area  $A$  consisting of a large blue-shaded area  $A_1$  and a smaller white circular area  $A_2$  (a hole). A coordinate system is shown with the  $x$ -axis pointing left and the  $y$ -axis pointing down. A curved arrow indicates a counter-clockwise moment about the  $x$ -axis. Four red arrows, representing parallel forces, are shown acting on the area at vertical distances  $y_1, y_2, y_3,$  and  $y_4$  from the  $x$ -axis. The arrows are located at the top edge of  $A_1$  and the top edge of  $A_2$ .

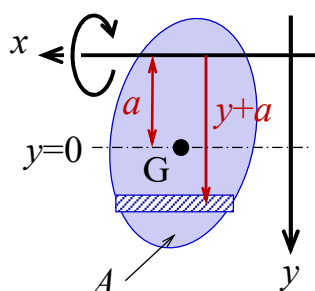
$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_A y^2 dA \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} y^2 dA + \int_{y_2}^{y_3} y^2 dA + \int_{y_3}^{y_4} y^2 dA \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} y^2 dA_1 + \left\{ \int_{y_2}^{y_3} y^2 dA_1 - \int_{y_2}^{y_3} y^2 dA_2 \right\} + \int_{y_3}^{y_4} y^2 dA_1 \\
 &= \int_{A_1} y^2 dA - \int_{A_2} y^2 dA \\
 &= \text{Area } A_1 - \text{Area } A_2
 \end{aligned}$$

断面2次モーメントは、図形で加減算可能  
※軸が同じ必要あり

21

## 4.2 平面断面の幾何学的性質

## 平行軸の定理



図心まわりの断面2次モーメントを  $I_0$  とする。

このとき、図心から $a$ 離れた軸まわりの断面2次モーメントは、

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A (y+a)^2 dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA \\ &\quad \textcolor{red}{I_0} \quad \quad \quad \textcolor{red}{0} \quad \quad \quad \textcolor{red}{A} \end{aligned}$$

$$I_x = I_0 + a^2 \cdot A$$

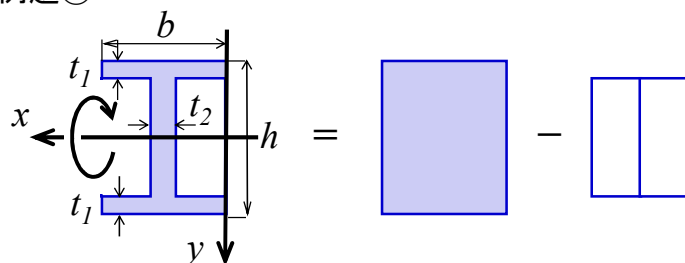
図心でない軸の断面2次モーメントを  
求めるときに、とても便利

22

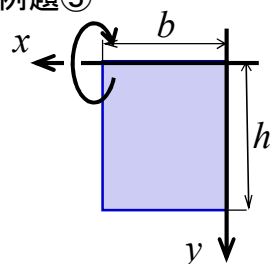


## 4.2 平面断面の幾何学的性! 05:00

例題④



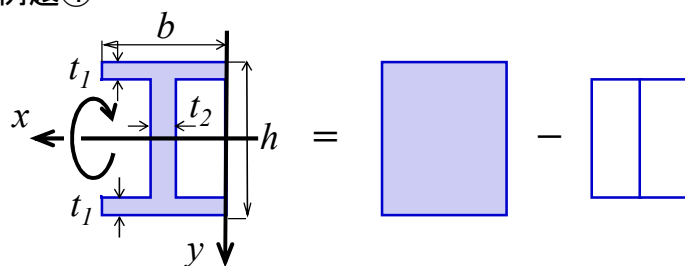
例題⑤



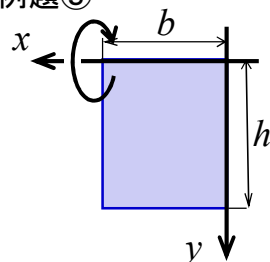
23

## 4.2 平面断面の幾何学的性質

例題④



例題⑤



断面係数を重ね合わせで  
求めることはできない!

24

## 4.2 平面断面の幾何学的性質

### ・ 種々の断面の断面2次モーメントと断面係数

番号	断面形状	面積 $A$	断面二次モーメント $I$	断面係数 $Z$
①		$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
②		$b(h_2 - h_1)$	$\frac{1}{12} b(h_2^3 - h_1^3)$	$\frac{1}{6} \frac{b(h_2^3 - h_1^3)}{h_2}$
③		$b_2h_2 - b_1h_1$	$\frac{1}{12} (b_2h_2^3 - b_1h_1^3)$	$\frac{1}{6} \frac{b_2h_2^3 - b_1h_1^3}{h_2}$
④		$a^2$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
⑤		$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$

25

## 4.2 平面断面の幾何学的性質

### ・ 種々の断面の断面2次モーメントと断面係数

⑥		$\frac{\pi (d_2^2 - d_1^2)}{4}$	$\frac{\pi (d_2^4 - d_1^4)}{64}$	$\frac{\pi (d_2^4 - d_1^4)}{32d_2}$
⑦		$\pi ab$	$\frac{\pi}{4} ab^3$	$\frac{\pi}{4} ab^2$
⑧		$\frac{1}{2} bh$	$\frac{1}{36} bh^3$	$e_1 = \frac{1}{3} h, Z_1 = \frac{1}{12} bh^3$ $e_2 = \frac{2}{3} h, Z_2 = \frac{1}{24} bh^3$
⑨		$b_3h_2 - b_1h_1$	$\frac{1}{3} \{ b_3e_2^3 - b_1c^3 + b_2e_1^3 \}$ ここで $c = e_2 - h_3$	$e_2 = \frac{b_2h_2^2 + b_1h_3^2}{2(b_2h_2 + b_1h_3)}$ $e_1 = h_2 - e_2$ $Z_1 = \frac{I}{e_1}, Z_2 = \frac{I}{e_2}$

26

## 4.2 平面断面の幾何学的性質

断面内応力の最大値

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}$$



$$M_{\max} = f \cdot Z$$

曲げ強さ

$f$ : 材料の  
許容応力度



許容応力度設計

梁の曲げ変形

$$\phi = \frac{M}{EI}$$

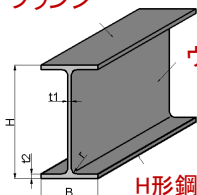


$$M = EI \cdot \phi$$

曲げ剛性

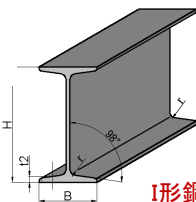
断面の  
合理的な  
設計:  $Z$ と $I$

フランジ

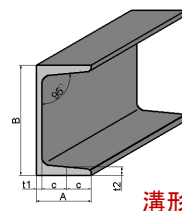


ウェブ

H形鋼



I形鋼



溝形鋼

27

## 第4章 梁の曲げ理論

4.1 断面力と断面に生じる応力

4.2 平面断面の幾何学的性質

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

材料力学基礎

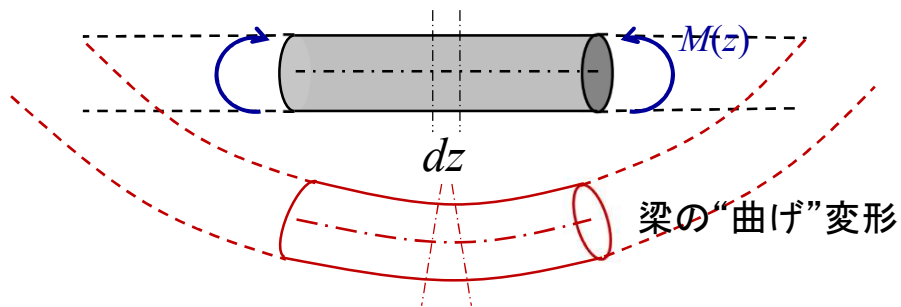
金久保利之

kanakubo@kz.tsukuba.ac.jp

28

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

- ・ 曲げモーメントのみを受ける梁の一部を考える

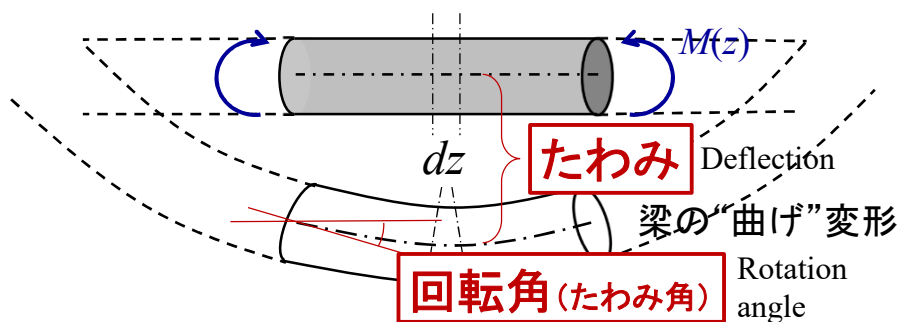


梁の曲げ変形の仮定(適合条件):  
「変形前の平面は、変形後も平面である」  
(平面保持の仮定: Bernoulli-Eulerの仮定)

29

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

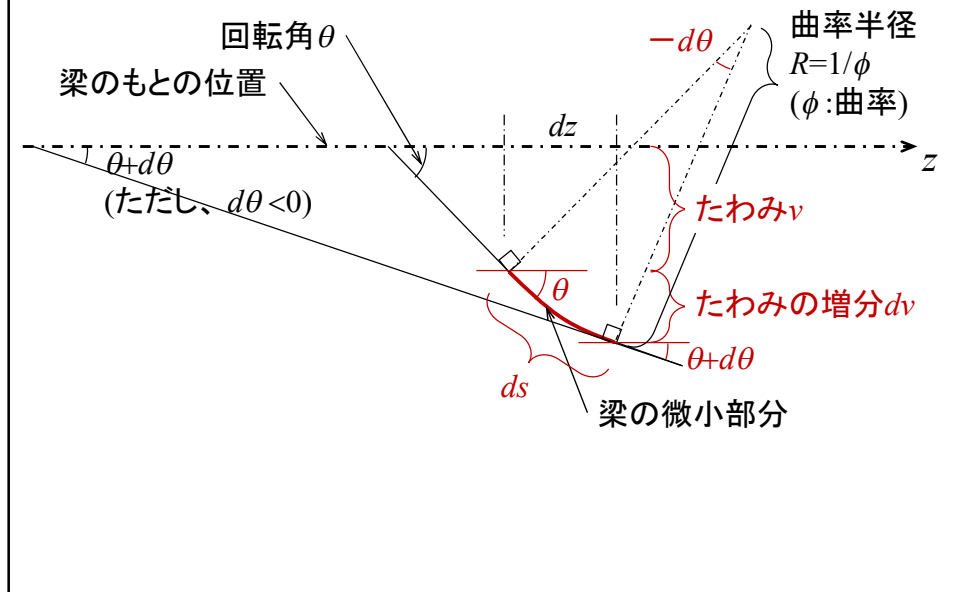
- ・ 曲げモーメントのみを受ける梁の一部を考える



梁の曲げ変形の仮定(適合条件):  
「変形前の平面は、変形後も平面である」  
(平面保持の仮定: Bernoulli-Eulerの仮定)

30

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

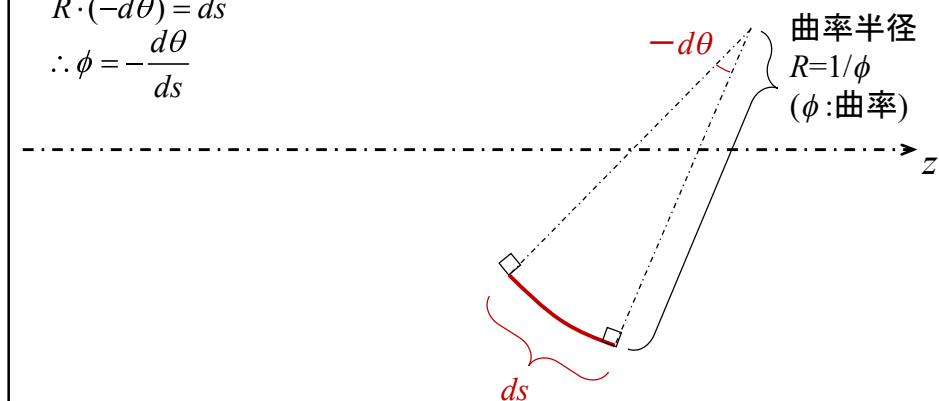


31

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R \cdot (-d\theta) = ds$$

$$\therefore \phi = -\frac{d\theta}{ds}$$

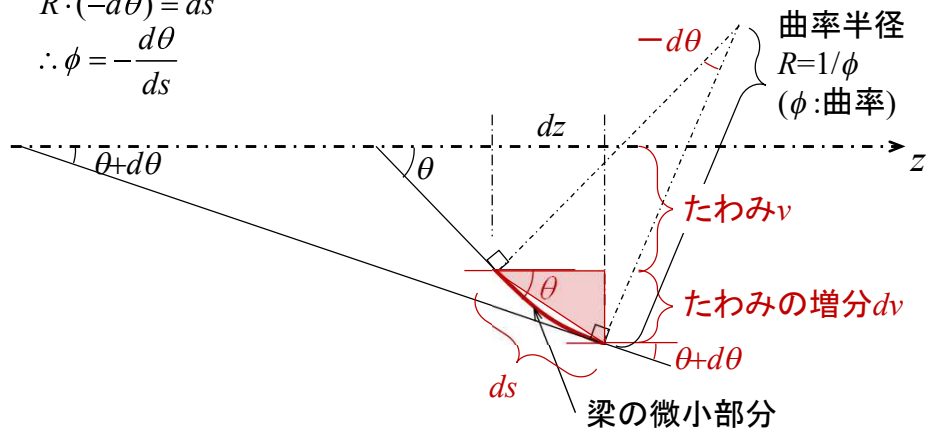


32

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R \cdot (-d\theta) = ds$$

$$\therefore \phi = -\frac{d\theta}{ds}$$

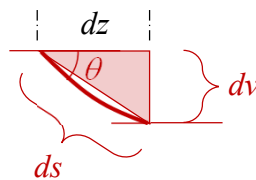


33

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R \cdot (-d\theta) = ds$$

$$\therefore \phi = -\frac{d\theta}{ds}$$



34

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R \cdot (-d\theta) = ds$$

$$\therefore \phi = -\frac{d\theta}{ds}$$

2つの式を代入して、

$$\frac{dv}{dz} = \tan \theta$$

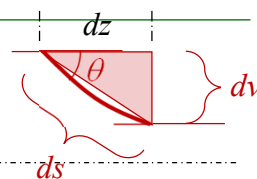
$z$ で微分して、

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dz} = \left\{ \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + 1 \right\} \cdot \frac{d\theta}{dz}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dz} = \frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + 1}$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos \theta$$

$$\therefore \frac{ds}{dz} = \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{\tan^2 \theta + 1} = \sqrt{\left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + 1}$$



35

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R \cdot (-d\theta) = ds$$

$$\therefore \phi = -\frac{d\theta}{ds}$$

$$\phi = -\frac{d\theta/dz}{ds/dz} = -\frac{\frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + 1}}{\sqrt{\left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + 1}} = -\frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left\{ \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

微小変形で、 $\left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \ll 1$  とすると、

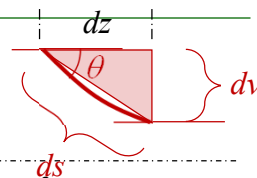
$$\phi = -\frac{d^2v}{dz^2}$$

$$\phi = \frac{M}{EI}$$

より、

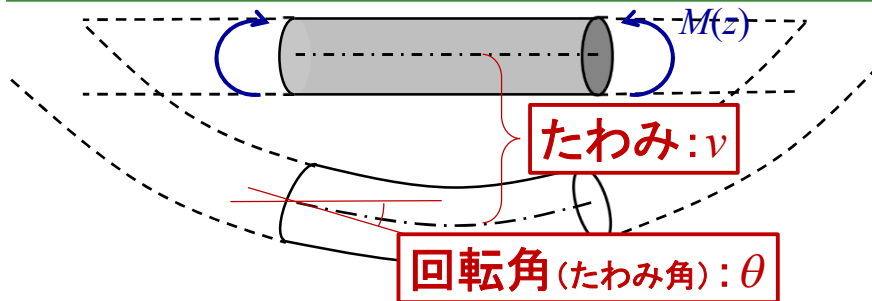
$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

梁のたわみ曲線の  
基礎微分方程式



36

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ



$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

たわみの微分方程式

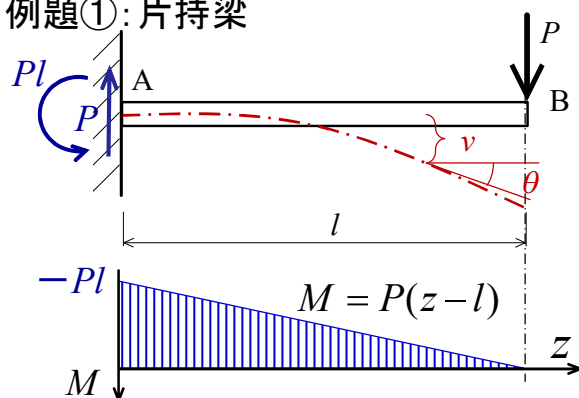
$$\frac{dv}{dz} = \theta \approx \tan \theta$$

回転角の微分方程式

37

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ 03:00

例題①: 片持梁



$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

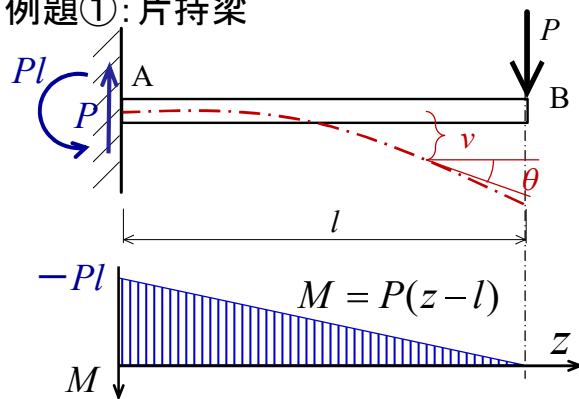
$$\frac{dv}{dz} = \theta$$

38



## 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題①: 片持梁



**境界条件**

Boundary Condition

$z = 0$  において、

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$\therefore$  固定端

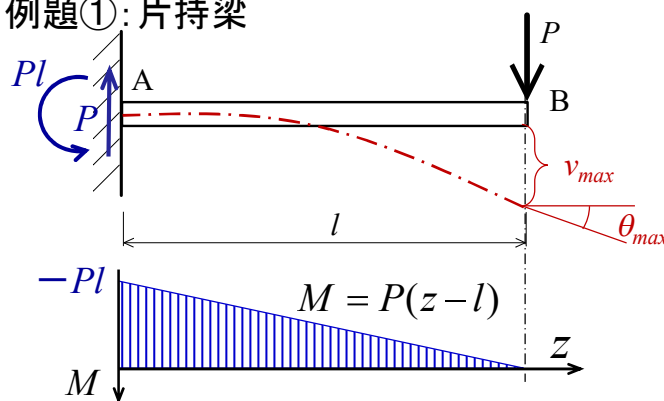
$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dv}{dz} = \theta$$

39

## 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題①: 片持梁



$z = l$  において、

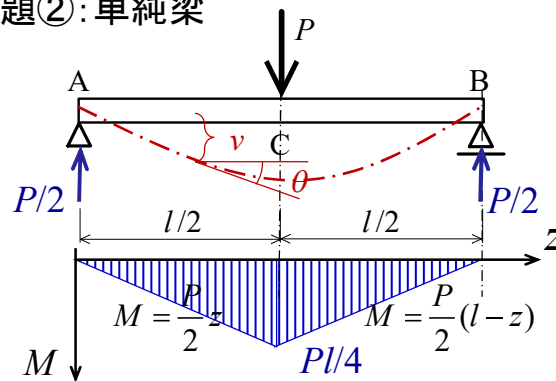
$$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$v_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

40

## 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ 05:00

例題②: 単純梁



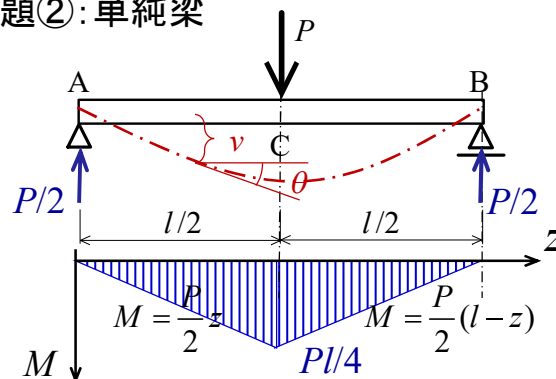
$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dv}{dz} = \theta$$

41

## 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題②: 単純梁



**境界条件**

Boundary Condition

$z=0$  において、  
 $v=0$

$z=l$  において、  
 $v=0$

∵ピン支点

$z=l/2$  において、

$$\begin{cases} \theta_{\text{左}} = \theta_{\text{右}} \\ v_{\text{左}} = v_{\text{右}} \end{cases}$$

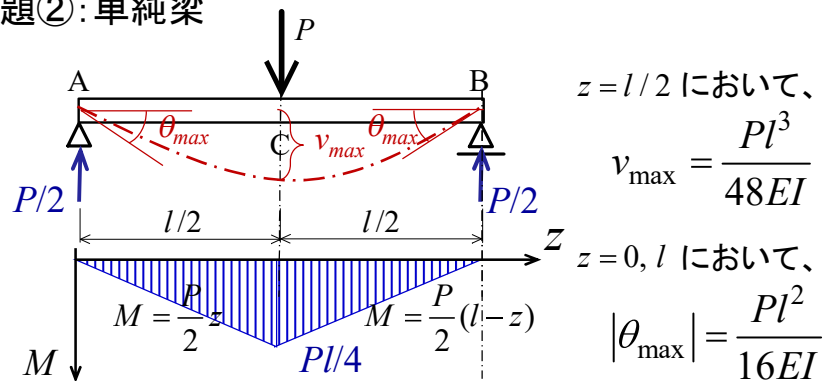
$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dv}{dz} = \theta$$

42

## 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

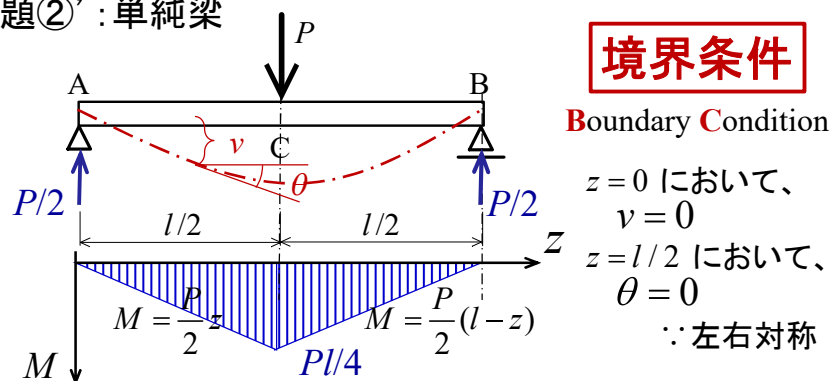
例題②: 単純梁



43

## 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題②': 単純梁



$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dv}{dz} = \theta$$

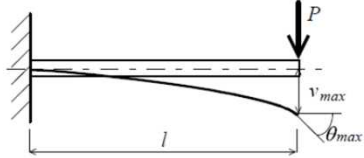
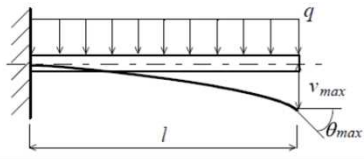
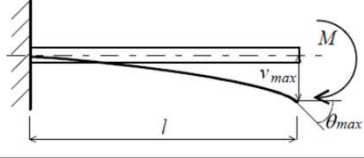
44

### 4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

荷重	$(EI) \frac{d^4 v}{dz^4}$	0 (集中荷重) 
せん断力	$(-EI) \frac{d^3 v}{dz^3}$	定数 
曲げモーメント	$(-EI) \frac{d^2 v}{dz^2}$	1次式 
回転角	$\frac{dv}{dz}$	2次式 
たわみ	$v$	3次式 

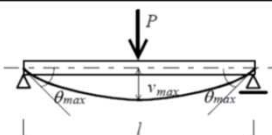
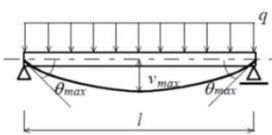
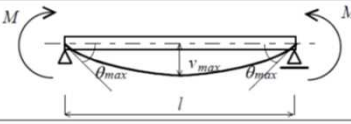
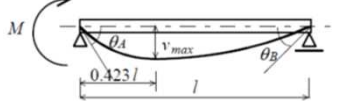
45

### ★ たわみ・回転角の公式

片持梁		
荷重条件	最大たわみ ( $v_{max}$ )	最大回転角 ( $\theta_{max}$ )
	$\frac{Pl^3}{3EI}$	$\frac{Pl^2}{2EI}$
	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^3}{6EI}$
	$\frac{Ml^2}{2EI}$	$\frac{Ml}{EI}$

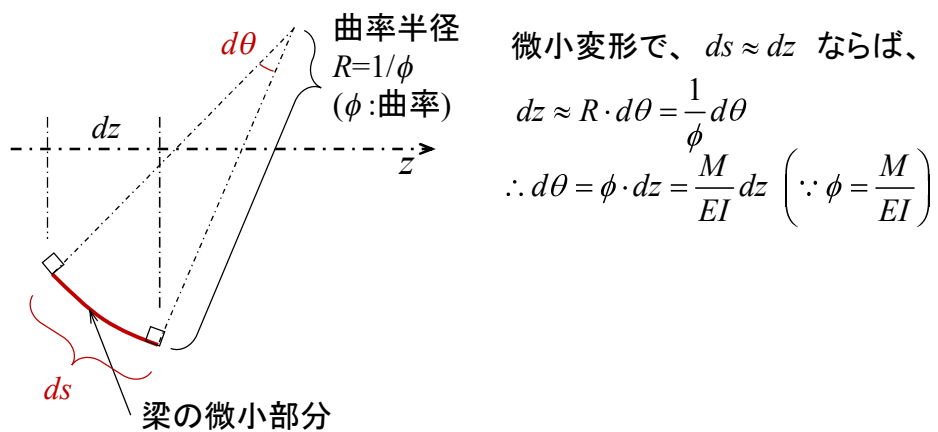
46

## ★ たわみ・回転角の公式

単純梁		
荷重条件	最大たわみ ( $v_{max}$ )	最大回転角 ( $\theta_{max}$ )
	$\frac{Pl^3}{48EI}$	$\frac{Pl^2}{16EI}$
	$\frac{5ql^4}{384EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$
	$\frac{Ml^2}{8EI}$	$\frac{Ml}{2EI}$
	$\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = \frac{Ml}{3EI}, \theta_B = \frac{Ml}{6EI}$

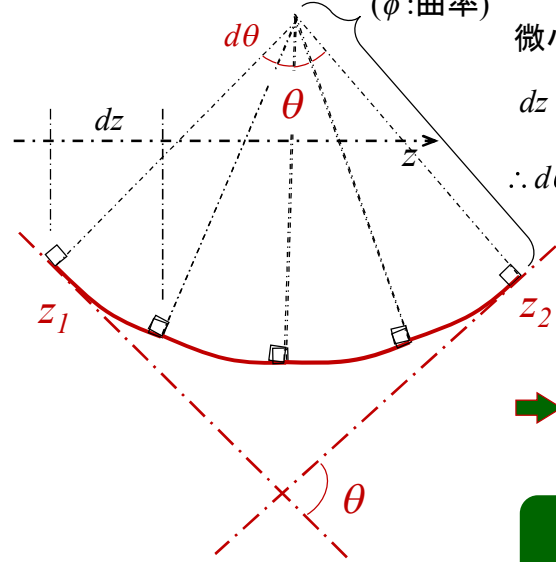
47

## ★ モーメント面積法



48

★ モーメン 曲率半径  $R=1/\phi$  (  $\phi$ :曲率) 法



微小変形で、 $ds \approx dz$  ならば、  
 $dz \approx R \cdot d\theta = \frac{1}{\phi} d\theta$   
 $\therefore d\theta = \phi \cdot dz = \frac{M}{EI} dz \left( \because \phi = \frac{M}{EI} \right)$

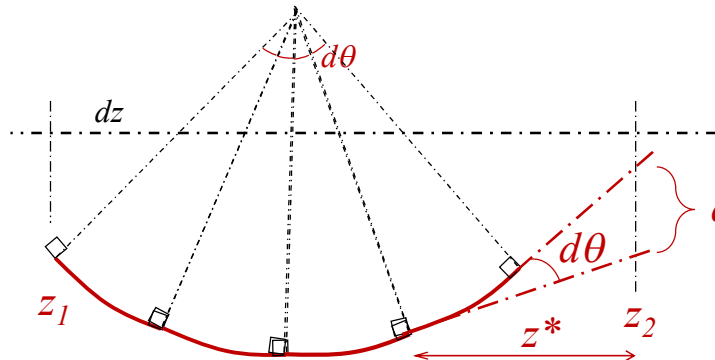
$$\theta = \int_{z_1}^{z_2} d\theta = \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI} dz$$

→  $\theta = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}]$

注意:  $\theta$  は、 $z_1$  での接線と  $z_2$  での接線とのなす角

49

★ モーメント面積法



$dv = z^* \cdot d\theta$   
 $= z^* \cdot \frac{M}{EI} dz$

$$v = \int_{z_1}^{z_2} z^* \cdot \frac{M}{EI} dz$$

BMDの図心の位置  
( $z_2$ からの距離)

BMDの面積

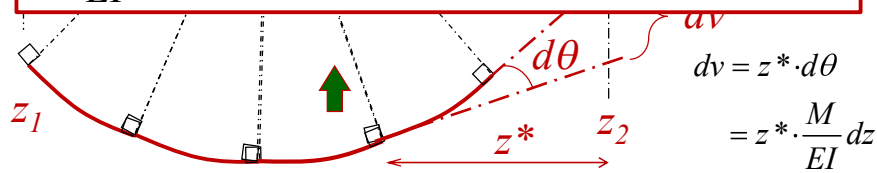
$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{\int_{z_1}^{z_2} z^* \cdot M dz}{\int_{z_1}^{z_2} M dz}$$

50

## ★ モーメント面積法

注意:  $v$  は、 $z_1$ での接線と $z_2$ におけるたわみで、BMDの図心位置の距離は、 $z_2$ からの距離

$$v = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}] \times [\text{BMDの図心までの距離}]$$



BMDの図心の位置  
( $z_2$ からの距離)

$$v = \int_{z_1}^{z_2} z^* \cdot \frac{M}{EI} dz$$

BMDの面積

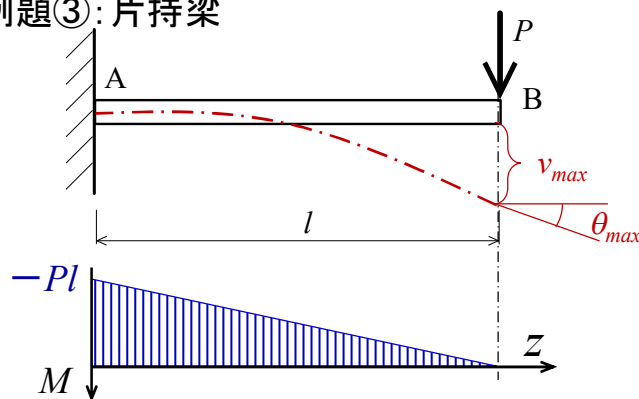
$$= \frac{1}{EI} \cdot \int_{z_1}^{z_2} M dz \cdot \frac{\int_{z_1}^{z_2} z^* \cdot M dz}{\int_{z_1}^{z_2} M dz}$$

51

## ★ モーメント面積法

03:00

例題③: 片持梁



$$\theta = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}]$$

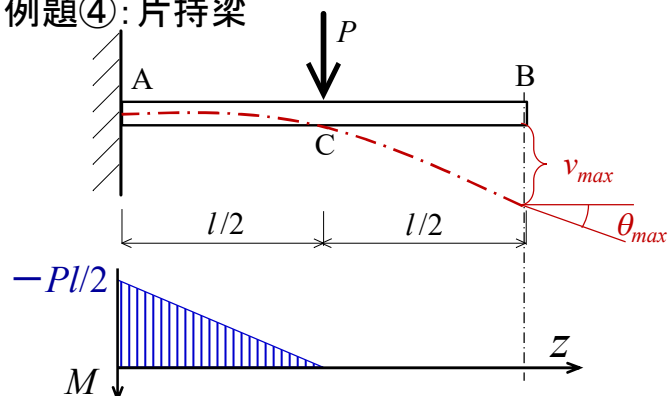
$$v = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}] \times [\text{BMDの図心までの距離}]$$

52

## ★ モーメント面積法

03:00

例題④: 片持梁



$$\theta = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}]$$

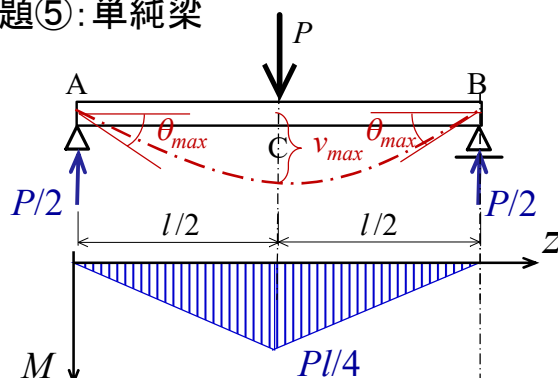
$$v = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}] \times [\text{BMDの図心までの距離}]$$

53

## ★ モーメント面積法

03:00

例題⑤: 単純梁



$$\theta = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}]$$

$$v = \frac{1}{EI} [\text{BMDの面積}] \times [\text{BMDの図心までの距離}]$$

54


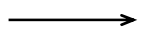



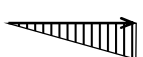

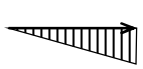
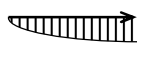


## 第4章 おしまい

55

### おまけ: BMDの描き方のコツ

$$\frac{dS(z)}{dz} = -q(z), \quad \frac{dM(z)}{dz} = S(z)$$

荷重条件	せん断力 S.F.D.	曲げモーメント B.M.D.
モーメント 	0 	定数 
集中荷重 	定数 	1次式 
等分布荷重 	1次式 	2次式 

56

## おまけ: BMDの描き方のコツ

曲げモーメントの微分=せん断力

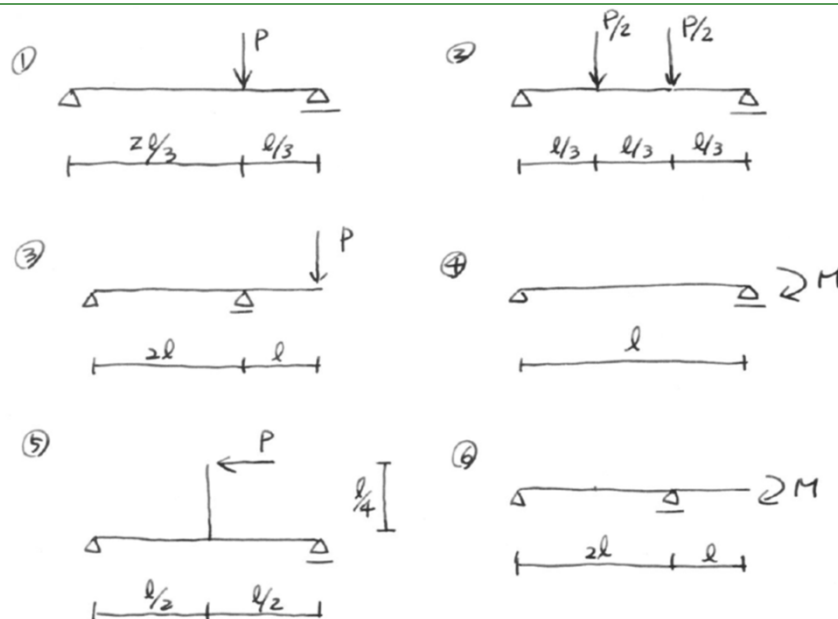


集中荷重が作用している場所で、  
その分、傾きが変化する

- ※ 凸の方向に描く
- ※ 荷重がない部分は、直線
- ※ 端部は、モーメント荷重とつり合う  
(ピン、自由端で、Mがなければ0)
- ※ モーメント荷重が作用していれば、  
その分、値が変わる

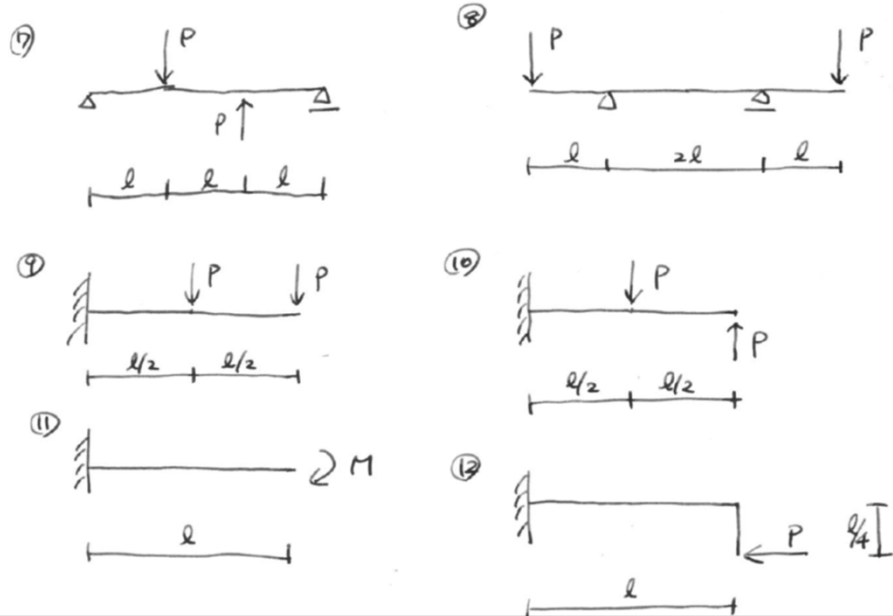
57

## おまけ: BMDの描き方のコツ



58

## おまけ: BMDの描き方のコツ



59