第4章　梁の曲げ理論

4.1 断面力と断面に生じる応力
4.2 平面断面の幾何学的性質
4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

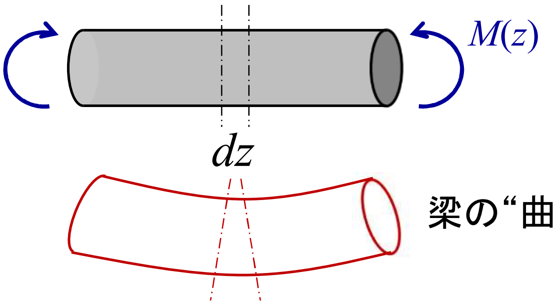
材料力学基礎

金久保利之
kanakubo@kz.tsukuba.ac.jp

1

4.1 断面力と断面に生じる応力

・ 曲げモーメントのみを受ける梁の一部を考える



梁の“曲げ”変形

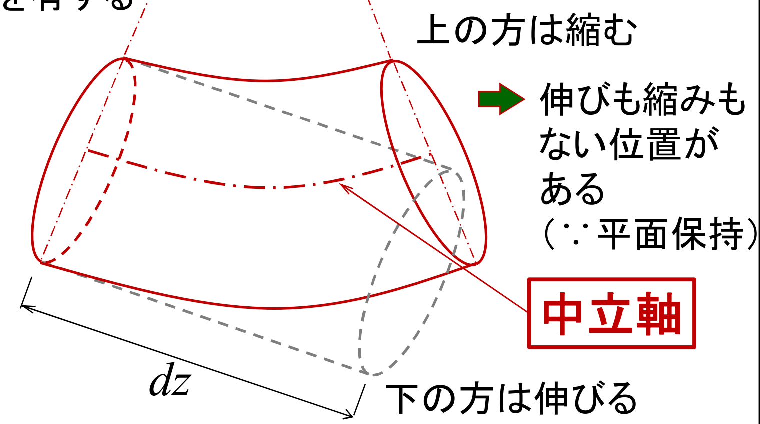
梁の曲げ変形の仮定（適合条件）：
「変形前の平面は、変形後も平面である」
（平面保持の仮定:Bernoulli–Eulerの仮定）

2

4.1 断面力と断面に生じる応力

・ 曲げ変形する微小部分(dz)を考える

両端の平面は平行でなくなり、
角度を有する



3

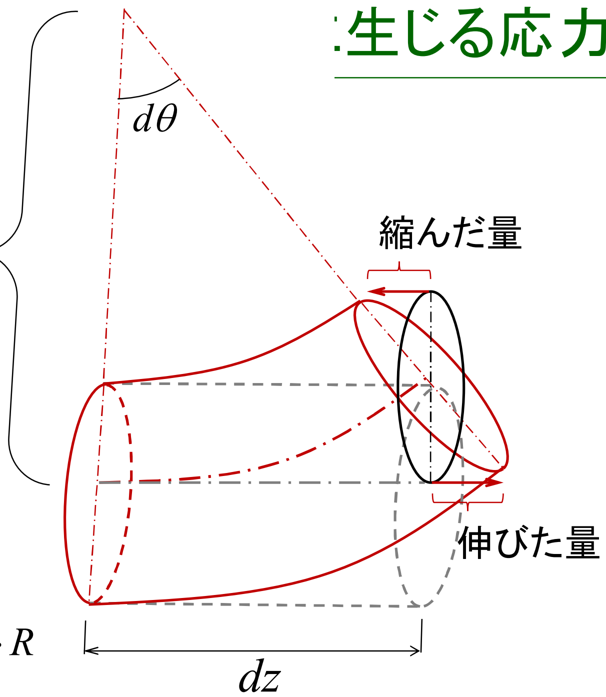
4.1 生じる応力

曲率半径
Radius of curvature: R

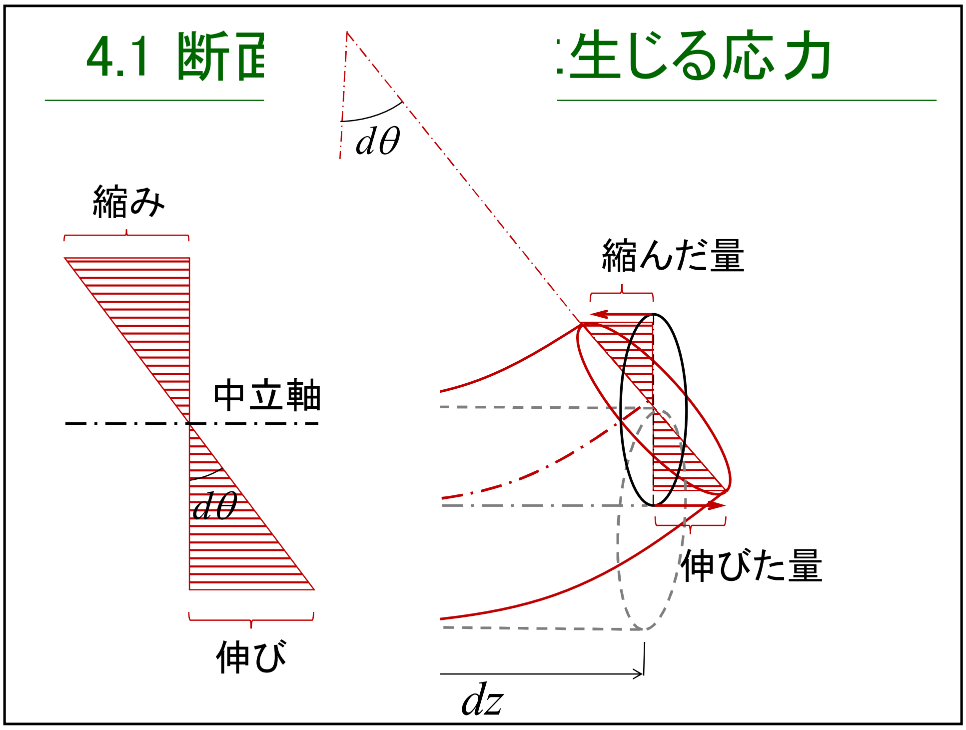
$$\phi = \frac{1}{R}$$

曲率
Curvature

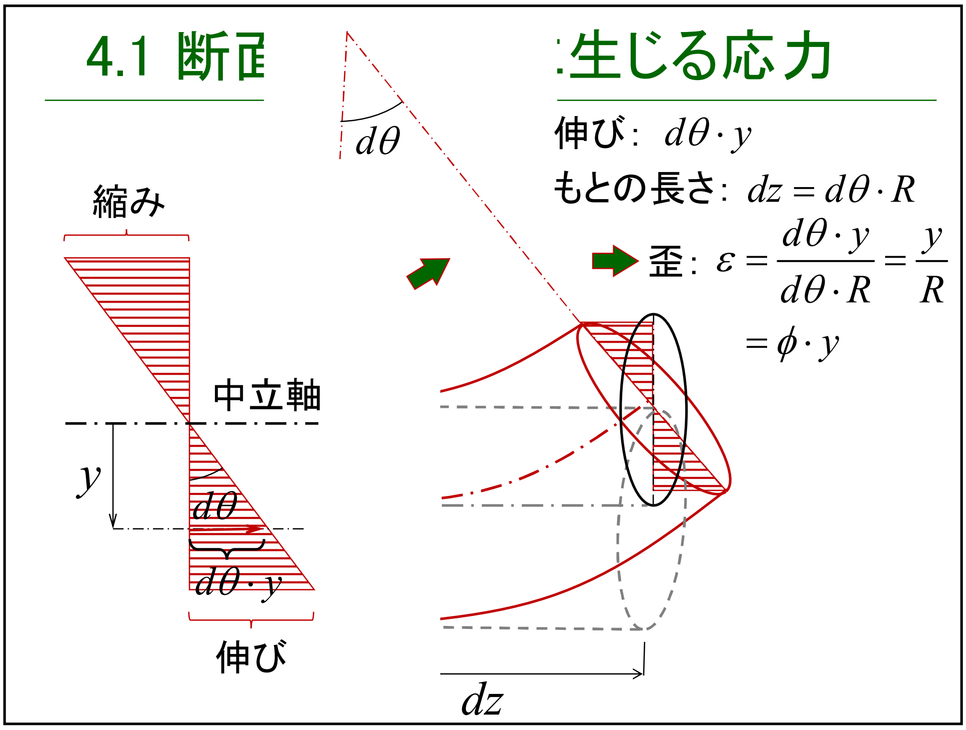
➡ $dz = d\theta \cdot R$



4

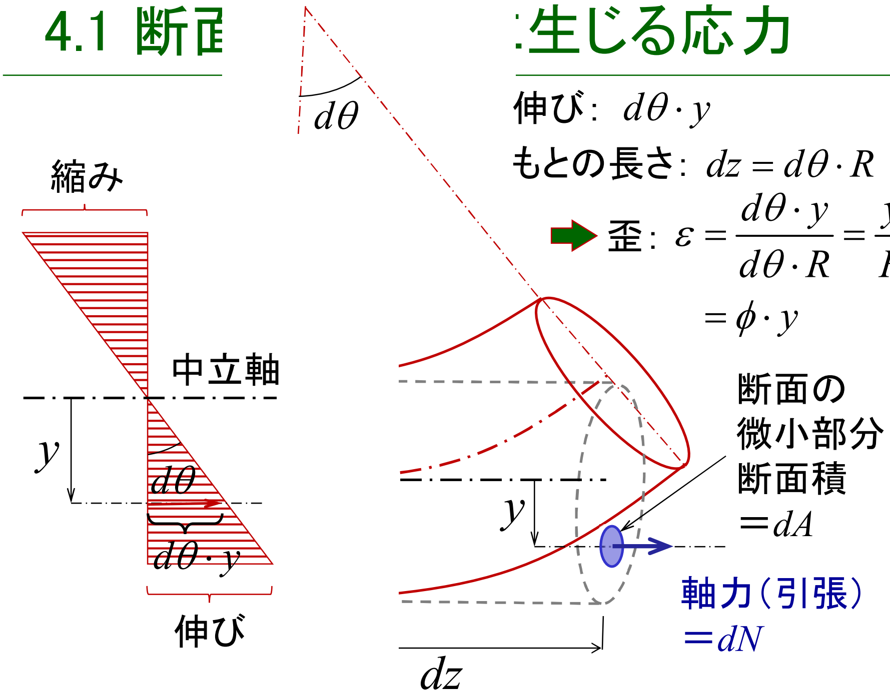

4.1 断
生じる応力
$d\theta$
縮み
縮んだ量
中立軸
$d\theta$
伸びた量
伸び
dz

5


4.1 断
生じる応力
$d\theta$
伸び: $d\theta \cdot y$
もとの長さ: $dz = d\theta \cdot R$
歪: $\varepsilon = \dfrac{d\theta \cdot y}{d\theta \cdot R} = \dfrac{y}{R}$
$= \phi \cdot y$
縮み
中立軸
y
$d\theta$
$d\theta \cdot y$
伸び
dz

6

4.1 断面　　に生じる応力



伸び: $d\theta \cdot y$

もとの長さ: $dz = d\theta \cdot R$

➡ 歪: $\varepsilon = \dfrac{d\theta \cdot y}{d\theta \cdot R} = \dfrac{y}{R}$

$= \phi \cdot y$

4.1 断面力と断面に生じる応力

Hookeの法則（弾性）

$\sigma = E \cdot \varepsilon$　より、

断面内の微小部分の応力は、

$\sigma = E \cdot \phi \cdot y$

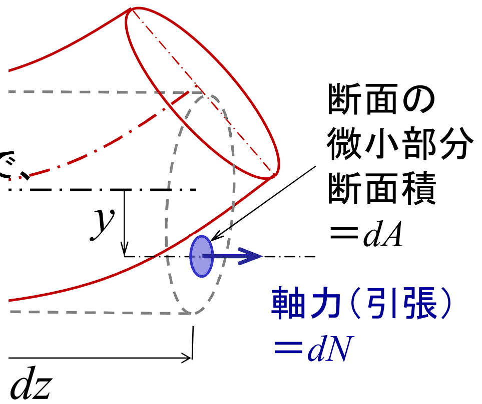
したがって、

$dN = \sigma \cdot dA = E \cdot \phi \cdot y \cdot dA$

いま、断面力は、曲げモーメントしか考えていないので、内力のつり合いから、

$\int_A dN = 0$

$\therefore \int_A E \cdot \phi \cdot y \cdot dA = 0$



4.1 断面力と断面に生じる応力

Hookeの法則（弾性）

$\sigma = E \cdot \varepsilon$ より、

断面内の微小部分の応力は、

$\sigma = E \cdot \phi \cdot y$

したがって、

$dN = \sigma \cdot dA = E \cdot \phi \cdot y \cdot dA$

いま、断面力は、曲げモーメントしか考えていないので、内力のつり合いから、

$\int_A dN = 0$

$\therefore \int_A E \cdot \phi \cdot y \cdot dA = 0$

➡ E 、ϕ は定数なので、

$\boxed{\int_A y dA} = 0$

断面１次モーメント

中立軸からの

１次モーメント＝0

⬇

中立軸は、図心位置を通る

9

4.1 断面力と断面に生じる応力

中立軸まわりのモーメントは、

$dM = \sigma \cdot dA \cdot y = E \cdot \phi \cdot y^2 \cdot dA$

$M = \int_A dM$

$\quad = \int_A E \cdot \phi \cdot y^2 \cdot dA$

$\quad = E\phi \int_A y^2 dA$

$\boxed{I = \int_A y^2 dA}$

断面２次モーメント

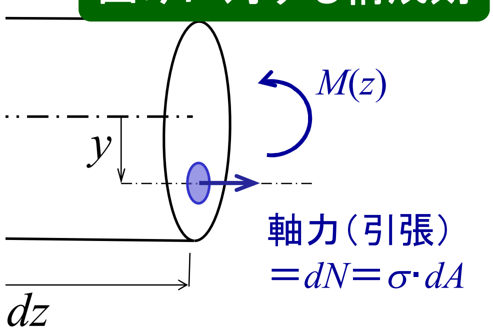
とおくと、

➡ $\boxed{M = EI\phi}$

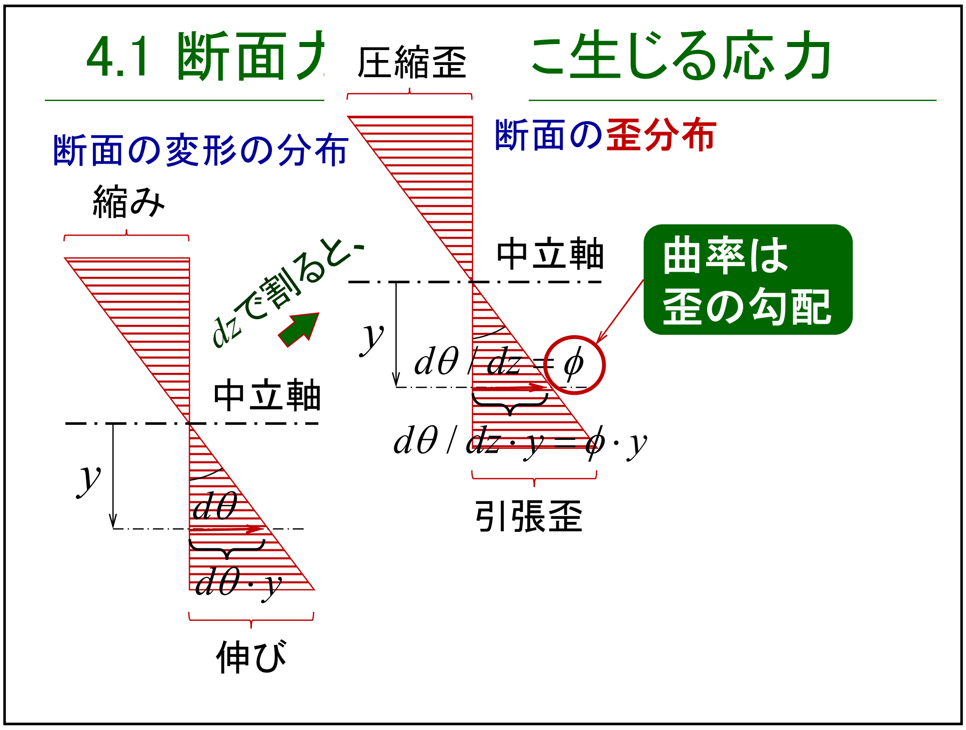
あるいは、

$\boxed{\phi = \frac{M}{EI}}$

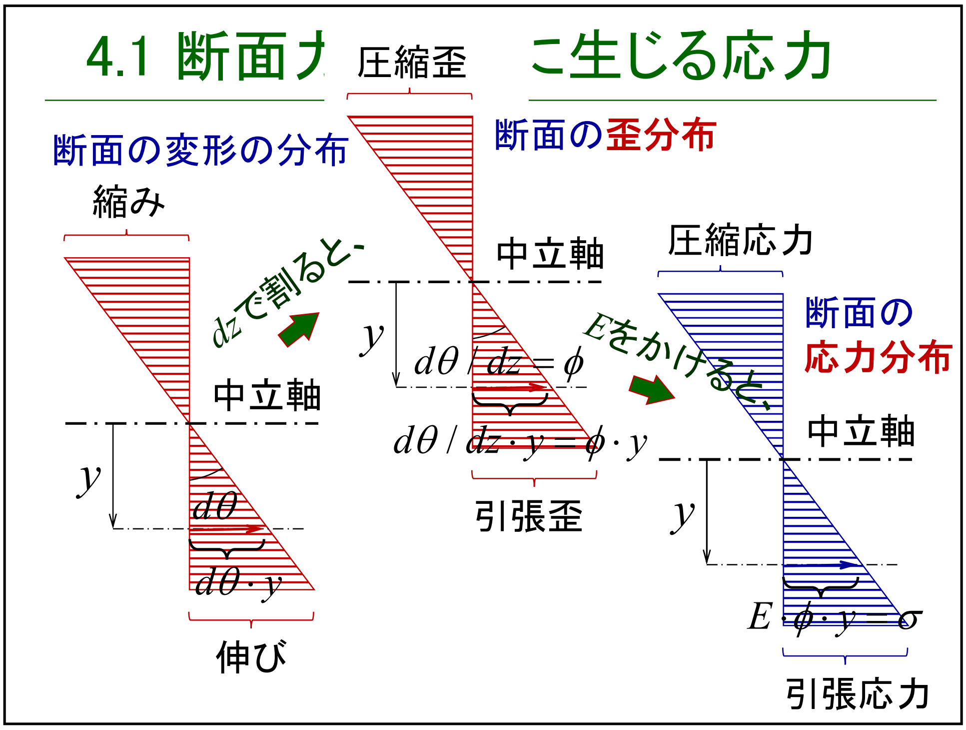
曲げに対する構成則



10

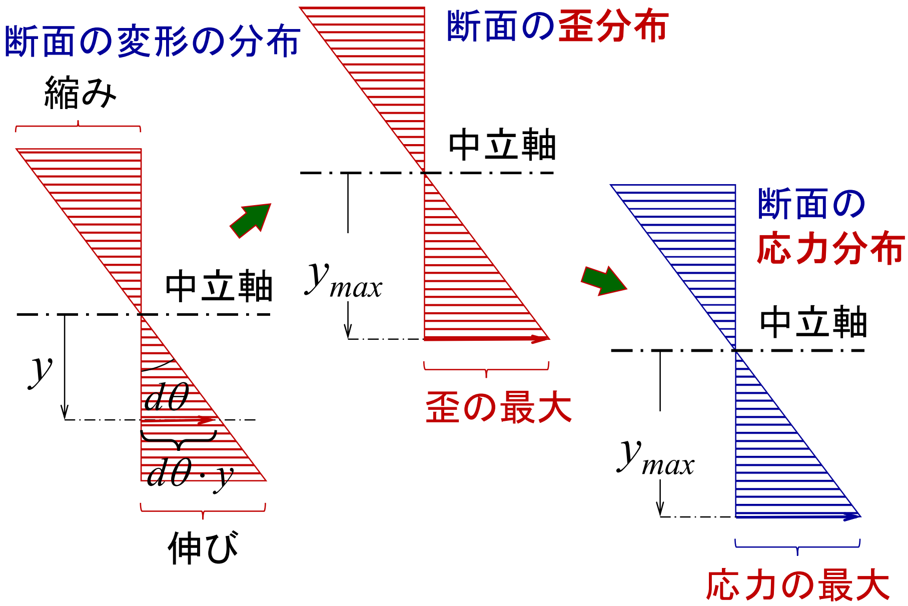

4.1 断面ナ
こ生じる応力
圧縮歪
断面の変形の分布
断面の歪分布
縮み
中立軸
dzで割ると、
曲率は
歪の勾配
y
dθ / dz = φ
中立軸
dθ / dz · y = φ · y
y
引張歪
dθ
dθ · y
伸び

11


4.1 断面ナ
こ生じる応力
圧縮歪
断面の変形の分布
断面の歪分布
縮み
中立軸
圧縮応力
dzで割ると、
断面の
応力分布
y
dθ / dz = φ
Eをかけると、
中立軸
dθ / dz · y = φ · y
中立軸
y
引張歪
y
dθ
E · φ · y = σ
dθ · y
伸び
引張応力

12

4.1 断面力と断面に生じる応力



13

4.1 断面力と断面に生じる応力

応力の最大値を $\sigma_{\max}$ とおくと、
$\sigma = E \cdot \phi \cdot y, \quad M = EI\phi$ より、

$$\sigma_{\max} = E \cdot \phi \cdot y_{\max} = M \cdot \frac{y_{\max}}{I}$$

$$\boxed{Z = \frac{I}{y_{\max}}}$$

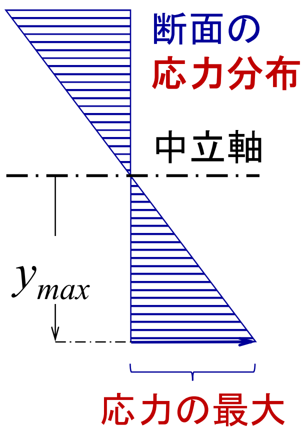
断面係数

とおくと、

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}}$$

断面内の応力の最大値を与える

y_{max}は、中立軸から最も離れたところ



14

4.1 断面力と断面に生じる応力

断面1次モーメント $S = \int_A y dA$

断面2次モーメント $I = \int_A y^2 dA$

断面係数 $Z = \dfrac{I}{y_{\max}}$

断面の形状のみで決まる

構成則の比較

引張	曲げ
$P = AE\varepsilon$	$M = EI\phi$
荷重P	曲げモーメントM
断面積A	断面2次モーメントI
ヤング率E	ヤング率E
歪ε	曲率ϕ
軸剛性AE	**曲げ剛性EI**

15

4.1 断面力と断面に生じる応力

・ 断面1次モーメントの次元・単位

$$S = [距離]\times[面積] = [長さ]^3$$

よく使われる単位：
m^3
$= 10^9\ mm^3$

・ 断面2次モーメントの次元・単位

$$I = [距離]^2\times[面積] = [長さ]^4$$

よく使われる単位：
m^4
$= 10^{12}\ mm^4$

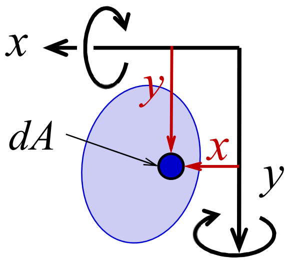
・ 断面係数の次元・単位

$$Z = \frac{[長さ]^4}{[距離]} = [長さ]^3$$

よく使われる単位：
m^3
$= 10^9\ mm^3$

16

4.2 平面断面の幾何学的性質



断面1次モーメント

x軸まわり $S_x = \int_A y dA$

y軸まわり $S_y = \int_A x dA$

図心 (x_0, y_0) の定義

$$x_0 = \frac{1}{A}\int_A x dA,\quad y_0 = \frac{1}{A}\int_A y dA$$

断面2次モーメント

x軸まわり $I_x = \int_A y^2 dA$

y軸まわり $I_y = \int_A x^2 dA$

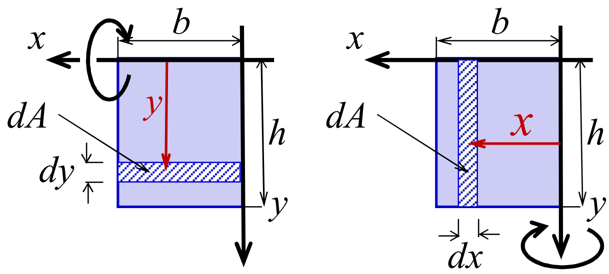
17

4.2 平面断面の幾何学的性

05:00

例題①

幅がb、高さ(「せい」ともいう)がhの長方形断面の図心位置、断面2次モーメントを求めなさい。

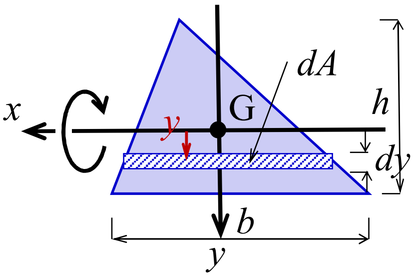


18

4.2 平面断面の幾何学的性質 05:00

例題②

底辺がb、高さがhの三角形断面の、図心Gを通るx軸まわりの断面２次モーメントを求めなさい。

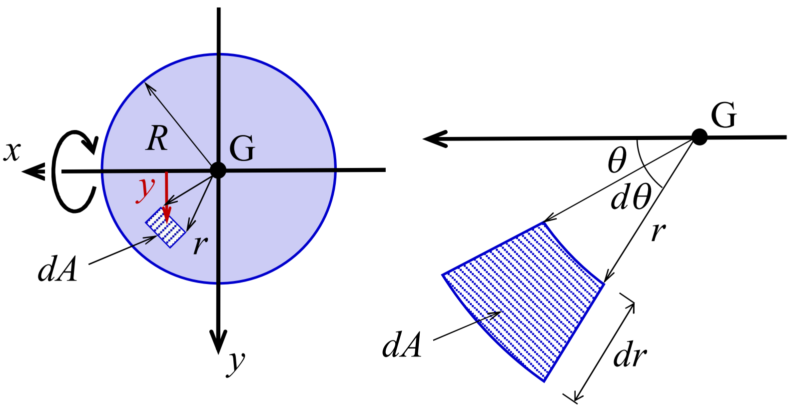


19

4.2 平面断面の幾何学的性質 05:00

例題③

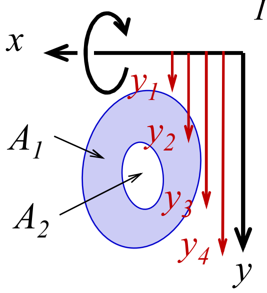
半径Rの円断面の断面２次モーメントを求めなさい（図心まわり）。



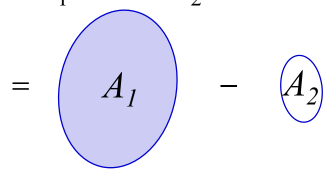
20

4.2 平面断面の幾何学的性質

断面2次モーメントの加減算



$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_A y^2 dA \\
&= \int_{y1}^{y2} y^2 dA + \int_{y2}^{y3} y^2 dA + \int_{y3}^{y4} y^2 dA \\
&= \int_{y1}^{y2} y^2 dA_1 + \left\{ \int_{y2}^{y3} y^2 dA_1 - \int_{y2}^{y3} y^2 dA_2 \right\} + \int_{y3}^{y4} y^2 dA_1 \\
&= \int_{A_1} y^2 dA - \int_{A_2} y^2 dA
\end{aligned}
$$

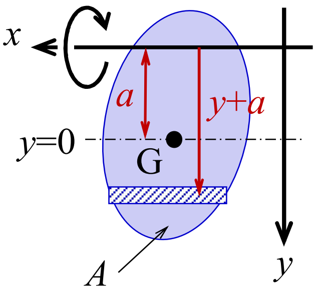


断面2次モーメントは、図形で加減算可能
※軸が同じ必要あり

21

4.2 平面断面の幾何学的性質

平行軸の定理



図心まわりの断面2次モーメントをI_0とする。
このとき、図心からa離れた軸まわりの断面2次モーメントは、

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_A (y+a)^2 dA \\
&= \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_0=} + 2a\underbrace{\int_A ydA}_{0=} + a^2 \underbrace{\int_A dA}_{A=}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{I_x = I_0 + a^2 \cdot A}$$

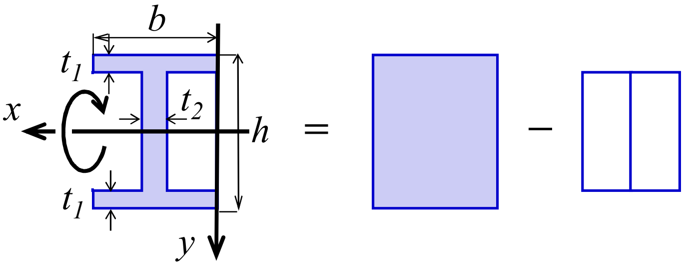
図心でない軸の断面2次モーメントを
求めるときに、とても便利

22

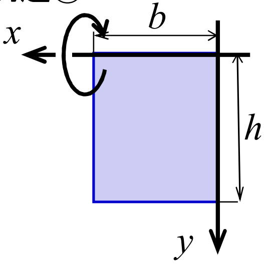
4.2 平面断面の幾何学的性

05:00

例題④



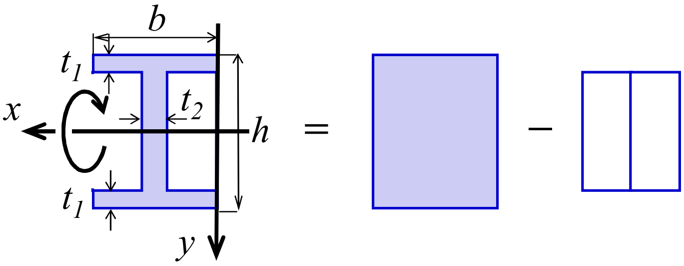
例題⑤



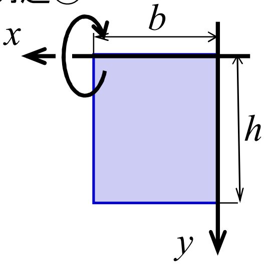
23

4.2 平面断面の幾何学的性質

例題④



例題⑤

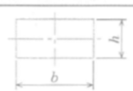
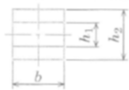
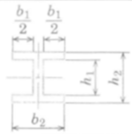
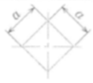


断面係数を重ね合わせで求めることはできない！

24

4.2 平面断面の幾何学的性質

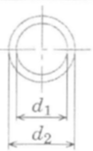
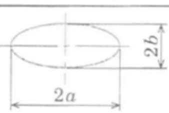
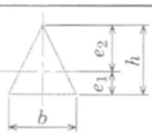
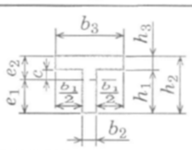
・ 種々の断面の断面２次モーメントと断面係数

番号	断面形状	面積 A	断面二次モーメント I	断面係数 Z
❶		bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
❷		$b(h_2-h_1)$	$\frac{1}{12}b(h_2^3-h_1^3)$	$\frac{1}{6}\frac{b(h_2^3-h_1^3)}{h_2}$
❸		$b_2h_2-b_1h_1$	$\frac{1}{12}(b_2h_2^3-b_1h_1^3)$	$\frac{1}{6}\frac{b_2h_2^3-b_1h_1^3}{h_2}$
❹		a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
❺		$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$

25

4.2 平面断面の幾何学的性質

・ 種々の断面の断面２次モーメントと断面係数

❻		$\frac{\pi(d_2^2-d_1^2)}{4}$	$\frac{\pi(d_2^4-d_1^4)}{64}$	$\frac{\pi(d_2^4-d_1^4)}{32d_2}$
❼		πab	$\frac{\pi}{4}ab^3$	$\frac{\pi}{4}ab^2$
❽		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{36}bh^3$	$e_1=\frac{1}{3}h$、$Z_1=\frac{1}{12}bh^3$ $e_2=\frac{2}{3}h$、$Z_2=\frac{1}{24}bh^3$
❾		$b_3h_2-b_1h_1$	$\frac{1}{3}\{b_3e_2^3-b_1c^3+b_2e_1^3\}$ ここで $c=e_2-h_3$	$e_2=\frac{b_2h_2^2+b_1h_3^2}{2(b_2h_2+b_1h_3)}$ $e_1=h_2-e_2$ $Z_1=\frac{I}{e_1}$、$Z_2=\frac{I}{e_2}$

26

4.2 平面断面の幾何学的性質

断面内応力の最大値

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}} \Rightarrow \boxed{M_{\max} = f \cdot Z}$$

曲げ強さ

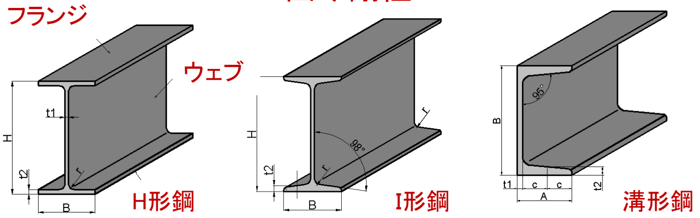
f: 材料の許容応力度 ↓ 許容応力度設計

梁の曲げ変形

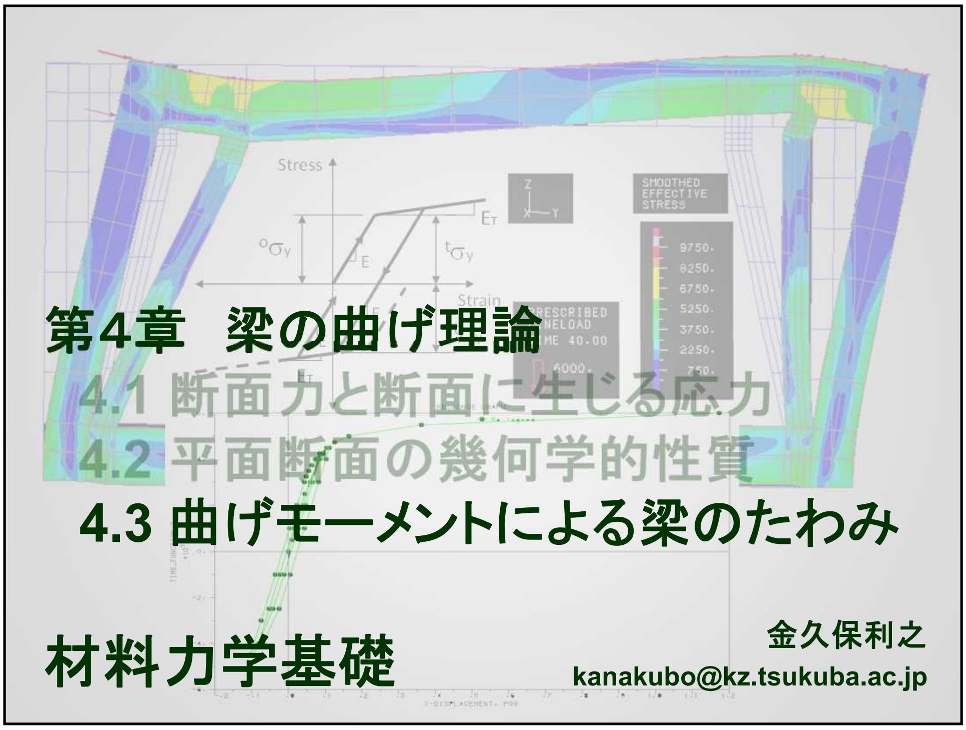
$$\boxed{\phi = \frac{M}{EI}} \Rightarrow \boxed{M = EI \cdot \phi}$$

曲げ剛性

断面の合理的な設計: ZとI



27



第4章　梁の曲げ理論

4.1 断面力と断面に生じる応力

4.2 平面断面の幾何学的性質

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

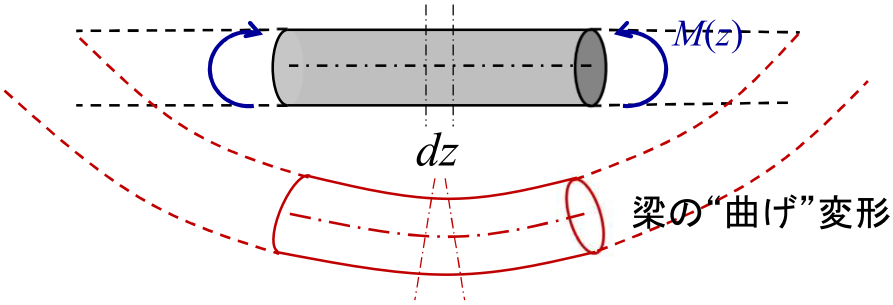
材料力学基礎

金久保利之
kanakubo@kz.tsukuba.ac.jp

28

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

・ 曲げモーメントのみを受ける梁の一部を考える

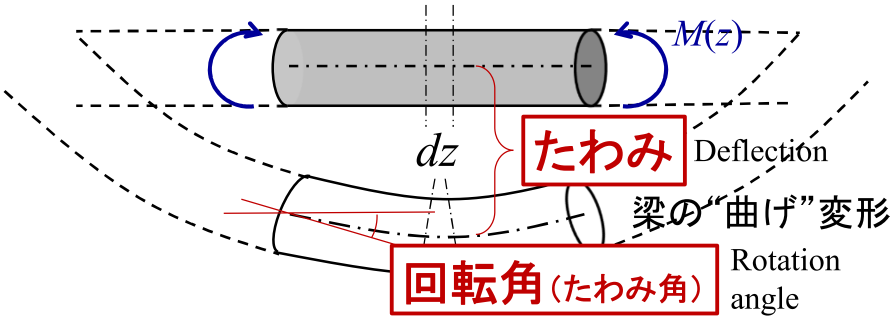


梁の曲げ変形の仮定(適合条件):
「変形前の平面は、変形後も平面である」
(平面保持の仮定:Bernoulli–Eulerの仮定)

29

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

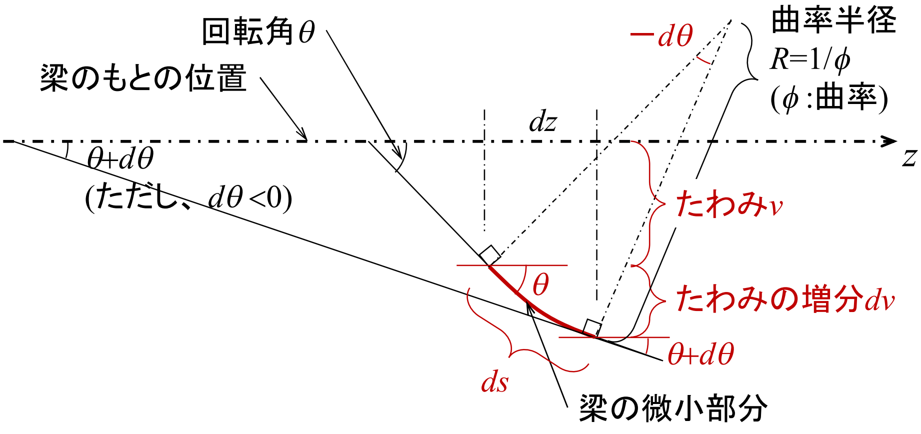
・ 曲げモーメントのみを受ける梁の一部を考える



梁の曲げ変形の仮定(適合条件):
「変形前の平面は、変形後も平面である」
(平面保持の仮定:Bernoulli–Eulerの仮定)

30

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

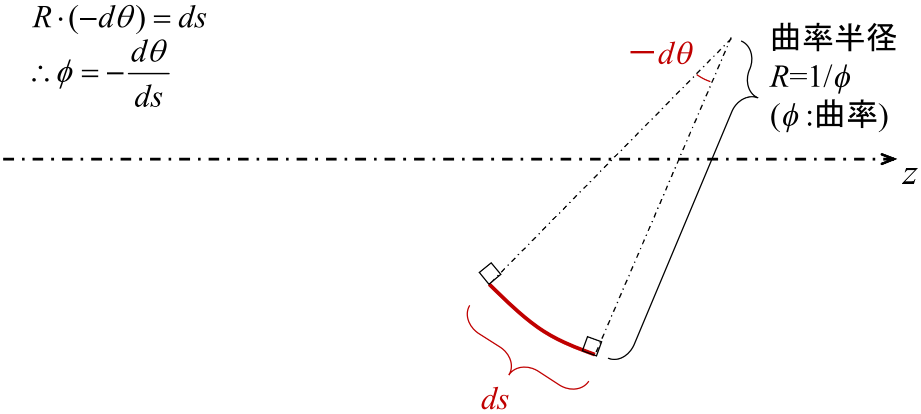


31

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R\cdot(-d\theta)=ds$$

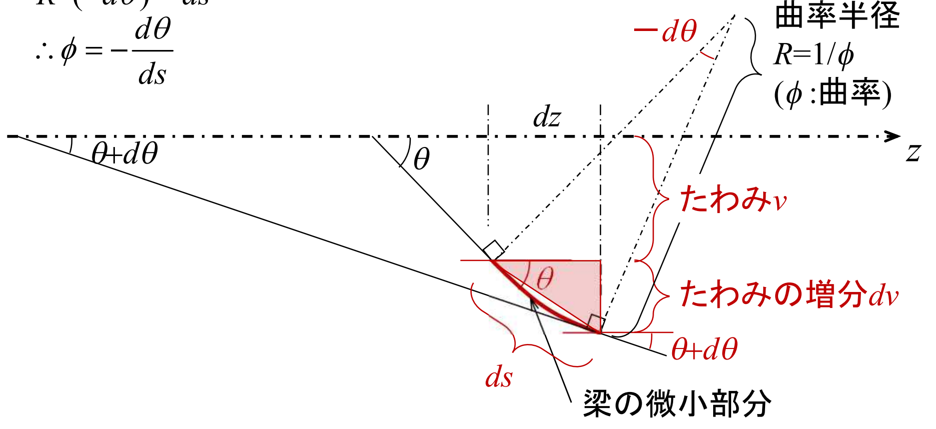
$$\therefore \phi=-\frac{d\theta}{ds}$$



32

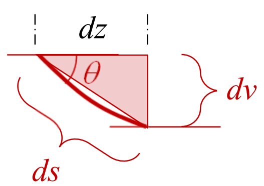
4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R\cdot(-d\theta)=ds$$
$$\therefore \phi=-\frac{d\theta}{ds}$$

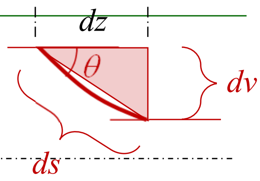


4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

$$R\cdot(-d\theta)=ds$$
$$\therefore \phi=-\frac{d\theta}{ds}$$



4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ



$$R\cdot(-d\theta)=ds$$

$$\therefore \phi=-\frac{d\theta}{ds}$$

2つの式を代入して、

$$\frac{dv}{dz}=\tan\theta$$

zで微分して、

$$\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz}$$

$$=\left\{\tan^2\theta+1\right\}\cdot\frac{d\theta}{dz}=\left\{\left(\frac{dv}{dz}\right)^2+1\right\}\cdot\frac{d\theta}{dz}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dz}=\frac{\dfrac{d^2v}{dz^2}}{\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2+1}$$

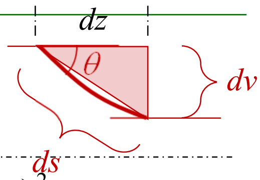
$$\frac{dz}{ds}=\cos\theta$$

$$\therefore \frac{ds}{dz}=\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{\tan^2\theta+1}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dv}{dz}\right)^2+1}$$

35

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ



$$R\cdot(-d\theta)=ds$$

$$\therefore \phi=-\frac{d\theta}{ds}$$

$$\phi=-\frac{d\theta/dz}{ds/dz}=-\frac{\dfrac{\dfrac{d^2v}{dz^2}}{\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2+1}}{\sqrt{\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2+1}}$$

$$=-\frac{\dfrac{d^2v}{dz^2}}{\left\{\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

微小変形で、$\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2<<1$ とすると、

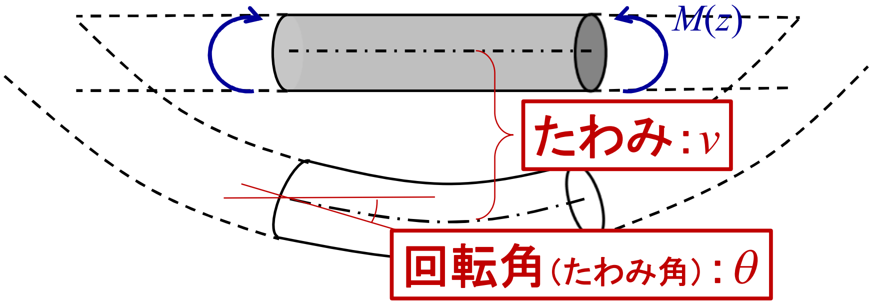
$$\phi=-\frac{d^2v}{dz^2}$$

$\boxed{\phi=\dfrac{M}{EI}}$ より、$\boxed{\dfrac{d^2v}{dz^2}=-\dfrac{M}{EI}}$

梁のたわみ曲線の基礎微分方程式

36

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ



$$\boxed{\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}}$$

たわみの微分方程式

$$\boxed{\frac{dv}{dz} = \theta} \approx \tan\theta$$

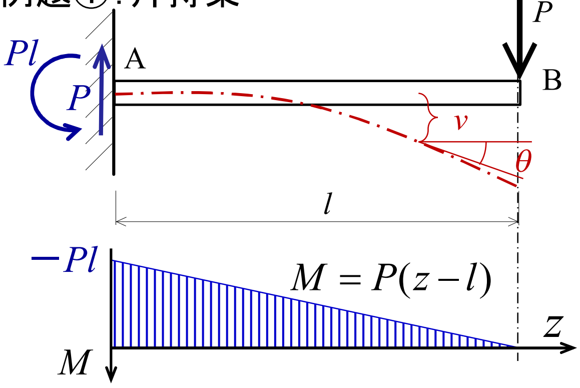
回転角の微分方程式

37

4.3 曲げモーメントによる梁のた

03:00

例題①：片持梁



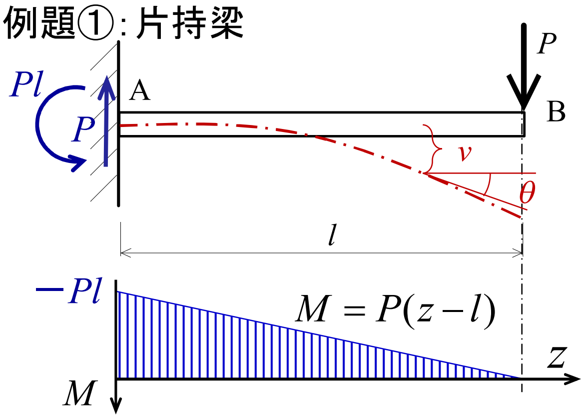
$$\boxed{\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dz} = \theta}$$

38

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題①: 片持梁



$\boxed{\dfrac{d^2v}{dz^2} = -\dfrac{M}{EI}}$

$\boxed{\dfrac{dv}{dz} = \theta}$

境界条件

Boundary **C**ondition

$z = 0$ において、

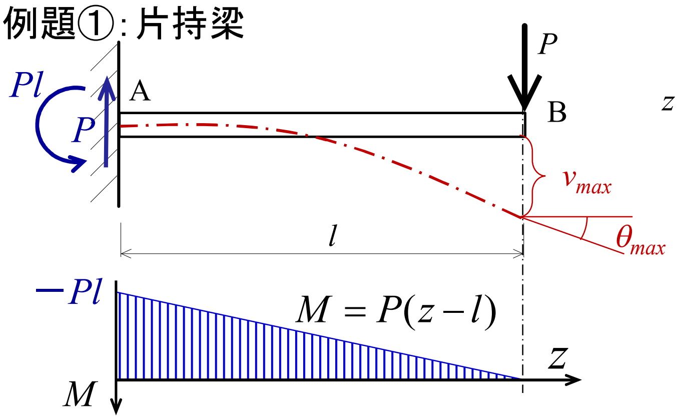
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

∵固定端

39

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題①: 片持梁



$z = l$ において、

$$\theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

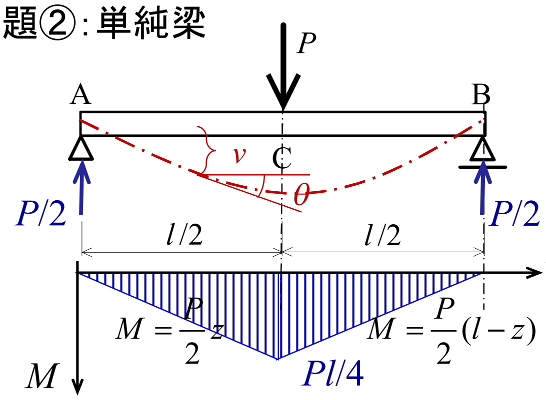
$$v_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

40

4.3 曲げモーメントによる梁のた

05:00

例題②:単純梁

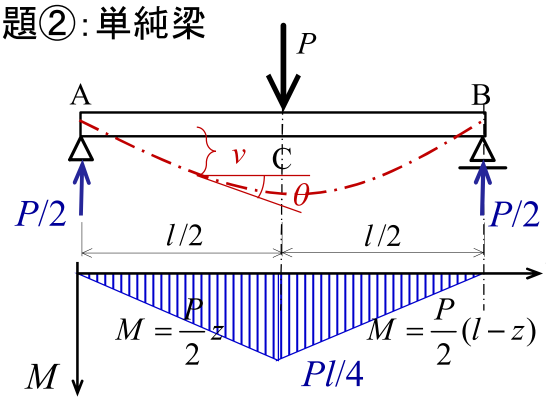


$$\boxed{\frac{d^2v}{dz^2}=-\frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dz}=\theta}$$

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題②:単純梁



$$\boxed{\frac{d^2v}{dz^2}=-\frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dz}=\theta}$$

境界条件

Boundary **C**ondition

$z=0$ において、
$v=0$

$z=l$ において、
$v=0$

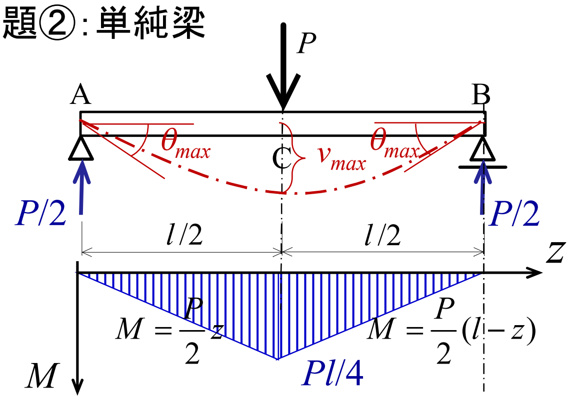
∵ピン支点

$z=l/2$ において、

$$\begin{cases}\theta_{左}=\theta_{右}\\ v_{左}=v_{右}\end{cases}$$

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題②:単純梁



$z = l/2$ において、

$$v_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

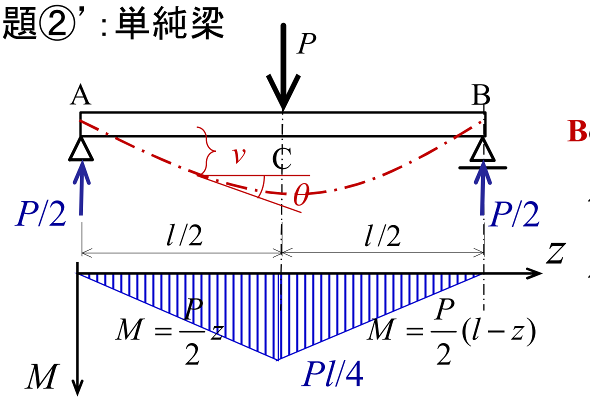
$z = 0, l$ において、

$$|\theta_{\max}| = \frac{Pl^2}{16EI}$$

43

4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

例題②’:単純梁



境界条件

Boundary **C**ondition

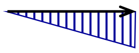
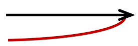
$z = 0$ において、
$v = 0$
$z = l/2$ において、
$\theta = 0$
∵左右対称

$$\boxed{\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dz} = \theta}$$

44

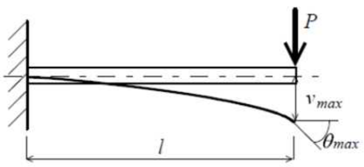
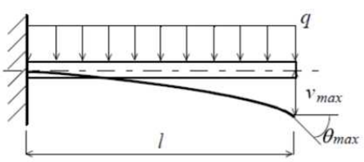
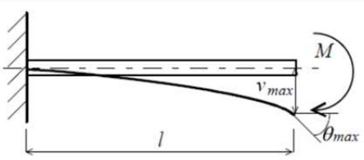
4.3 曲げモーメントによる梁のたわみ

荷重	$(EI)\dfrac{d^4v}{dz^4}$	0（集中荷重）	
せん断力	$(-EI)\dfrac{d^3v}{dz^3}$	定数	
曲げモーメント	$(-EI)\dfrac{d^2v}{dz^2}$	1次式	
回転角	$\dfrac{dv}{dz}$	2次式	
たわみ	v	3次式	

45

★ たわみ・回転角の公式

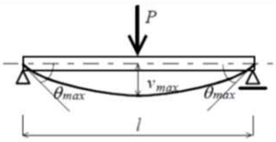
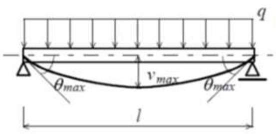
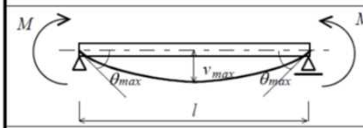
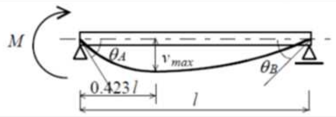
片持梁

荷重条件	最大たわみ（v_{max}）	最大回転角（θ_{max}）
	$\dfrac{Pl^3}{3EI}$	$\dfrac{Pl^2}{2EI}$
	$\dfrac{ql^4}{8EI}$	$\dfrac{ql^3}{6EI}$
	$\dfrac{Ml^2}{2EI}$	$\dfrac{Ml}{EI}$

46

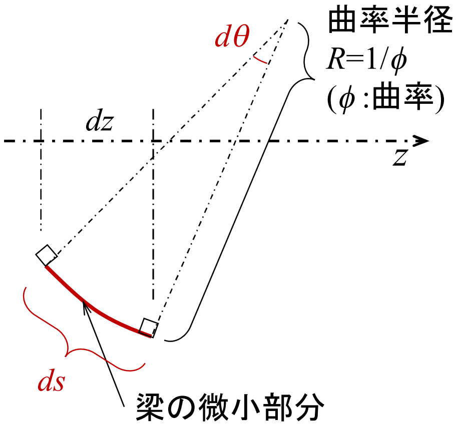
★ たわみ・回転角の公式

単純梁

荷重条件	最大たわみ（v_{max}）	最大回転角（θ_{max}）
	$\dfrac{Pl^3}{48EI}$	$\dfrac{Pl^2}{16EI}$
	$\dfrac{5ql^4}{384EI}$	$\dfrac{ql^3}{24EI}$
	$\dfrac{Ml^2}{8EI}$	$\dfrac{Ml}{2EI}$
	$\dfrac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = \dfrac{Ml}{3EI},\ \theta_B = \dfrac{Ml}{6EI}$

47

★ モーメント面積法



微小変形で、 $ds \approx dz$ ならば、

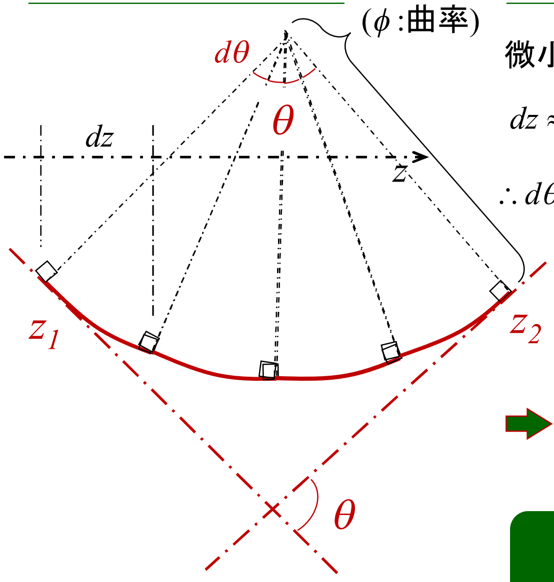
$$dz \approx R \cdot d\theta = \frac{1}{\phi} d\theta$$

$$\therefore d\theta = \phi \cdot dz = \frac{M}{EI} dz \quad \left(\because \phi = \frac{M}{EI} \right)$$

48

★ モーメン 法

曲率半径
$R=1/\phi$
(ϕ :曲率)



微小変形で、 $ds \approx dz$ ならば、

$$dz \approx R \cdot d\theta = \frac{1}{\phi} d\theta$$

$$\therefore d\theta = \phi \cdot dz = \frac{M}{EI} dz \quad \left(\because \phi = \frac{M}{EI} \right)$$

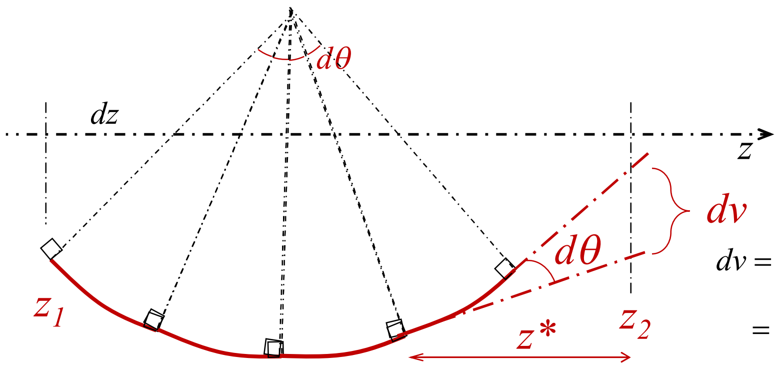
$$\theta = \int_{z_1}^{z_2} d\theta = \int_{z_1}^{z_2} \frac{M}{EI} dz$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{EI} \left[\text{BMDの面積} \right]}$$

注意：θ は、z_1 での接線と z_2 での接線とのなす角

49

★ モーメント面積法



$$dv = z^* \cdot d\theta$$

$$= z^* \cdot \frac{M}{EI} dz$$

$$v = \int_{z_1}^{z_2} z^* \cdot \frac{M}{EI} dz$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \int_{z_1}^{z_2} Mdz \cdot \frac{\int_{z_1}^{z_2} z^* \cdot Mdz}{\int_{z_1}^{z_2} Mdz}$$

BMDの図心の位置
(z_2からの距離)

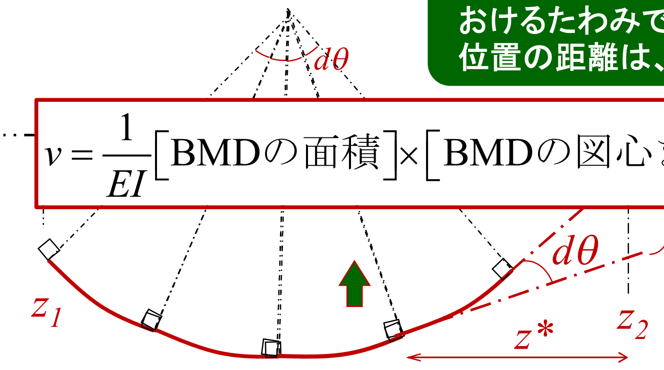
BMDの面積

50

★ モーメント面積法

注意：v は、z_1 での接線と z_2 におけるたわみで、BMDの図心位置の距離は、z_2 からの距離

$$v=\frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]\times\left[\text{BMDの図心までの距離}\right]$$



$$dv=z^*\cdot d\theta$$
$$=z^*\cdot\frac{M}{EI}dz$$

$$v=\int_{z1}^{z2}z^*\cdot\frac{M}{EI}dz$$
$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_{z1}^{z2}Mdz\cdot\frac{\int_{z1}^{z2}z^*\cdot Mdz}{\int_{z1}^{z2}Mdz}$$

BMDの図心の位置（z_2からの距離）

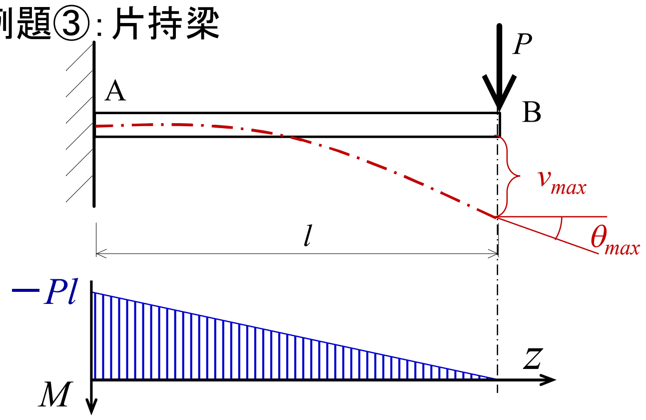
BMDの面積

51

★ モーメント面積法

03:00

例題③：片持梁



$$\theta=\frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]$$

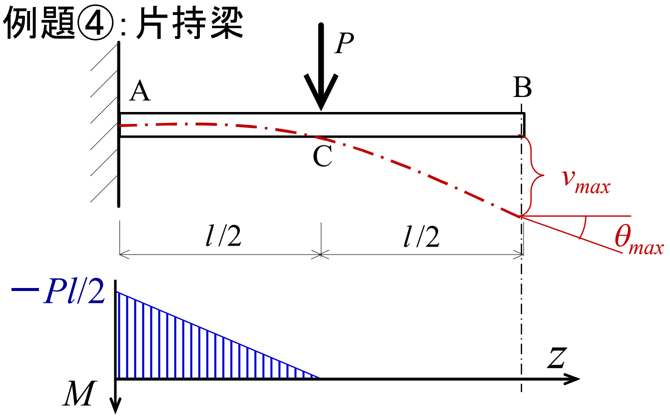
$$v=\frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]\times\left[\text{BMDの図心までの距離}\right]$$

52

★ モーメント面積法

03:00

例題④：片持梁



$$\theta = \frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]$$

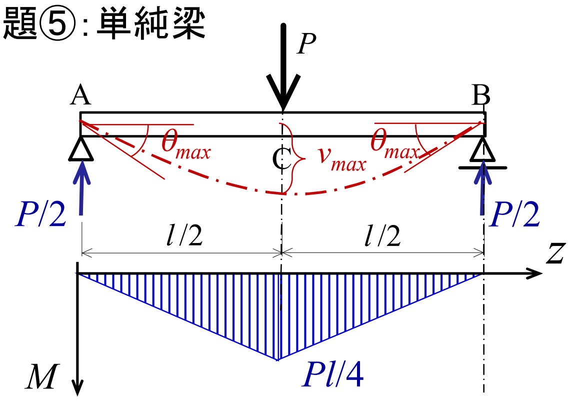
$$v = \frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]\times\left[\text{BMDの図心までの距離}\right]$$

53

★ モーメント面積法

03:00

例題⑤：単純梁



$$\theta = \frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]$$

$$v = \frac{1}{EI}\left[\text{BMDの面積}\right]\times\left[\text{BMDの図心までの距離}\right]$$

54

第4章　おしまい

55

おまけ：BMDの描き方のコツ

$$\boxed{\frac{dS(z)}{dz} = -q(z), \quad \frac{dM(z)}{dz} = S(z)}$$

荷重条件	せん断力 S.F.D.	曲げモーメント B.M.D.
モーメント	0	定数
集中荷重	定数	1次式
等分布荷重	1次式	2次式

56

おまけ：BMDの描き方のコツ

曲げモーメントの微分＝せん断力

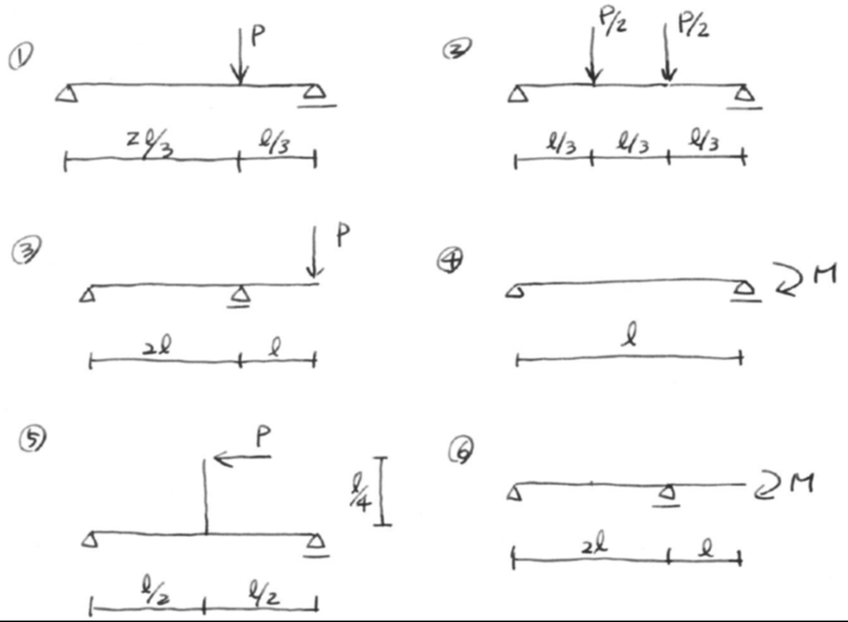
↓

集中荷重が作用している場所で、その分、傾きが変化する

- ※ 凸の方向に描く
- ※ 荷重がない部分は、直線
- ※ 端部は、モーメント荷重とつり合う（ピン、自由端で、Mがなければ0）
- ※ モーメント荷重が作用していれば、その分、値が変わる

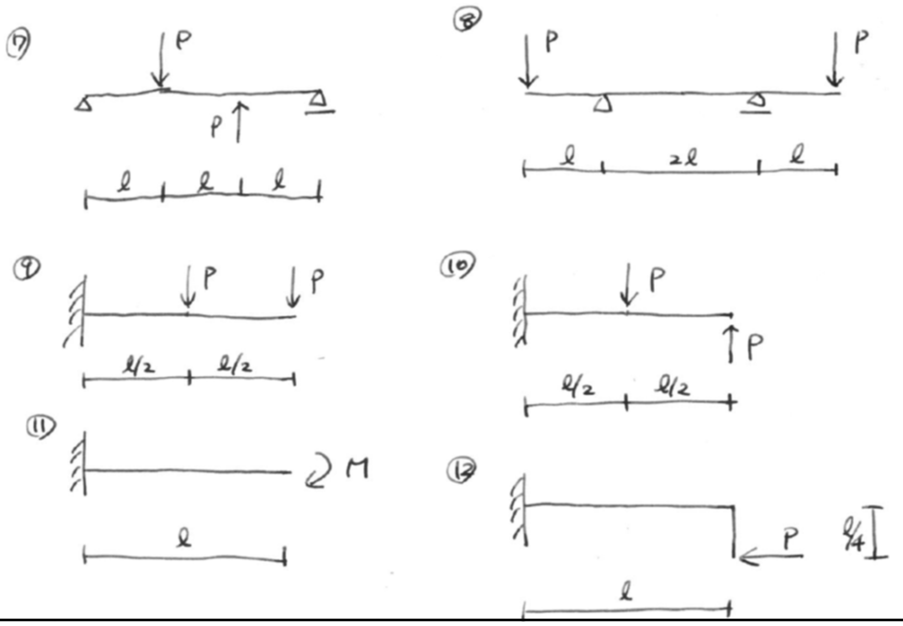
57

おまけ：BMDの描き方のコツ



58

おまけ：BMDの描き方のコツ



59