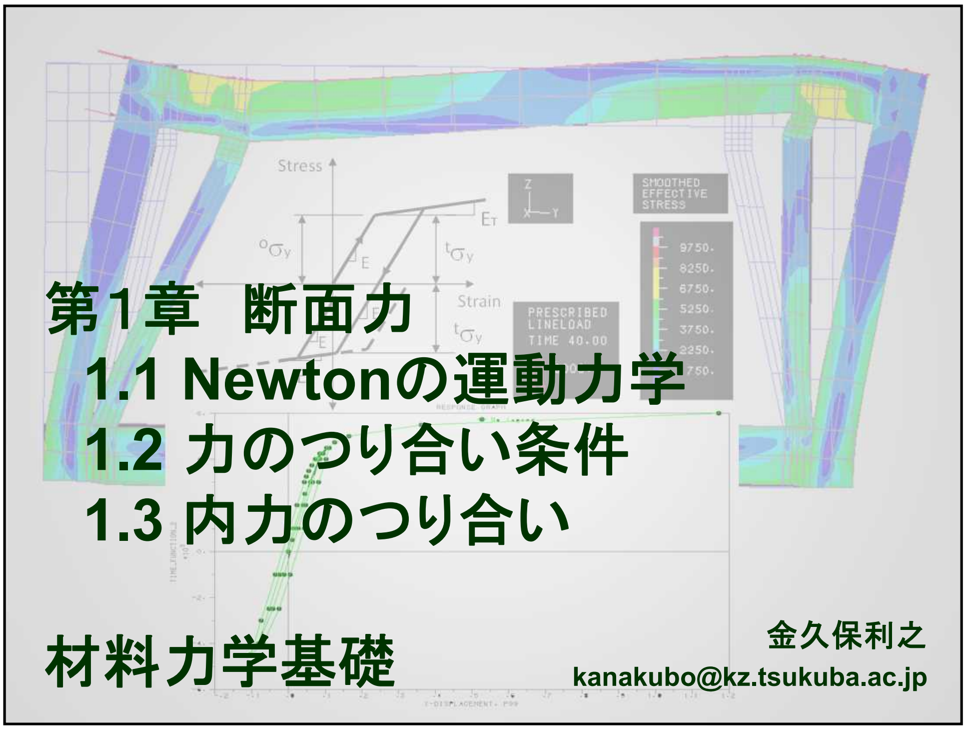


第1章　断面力

1.1 Newtonの運動力学
1.2 力のつり合い条件
1.3 内力のつり合い

材料力学基礎

金久保利之
kanakubo@kz.tsukuba.ac.jp

1

1.1 Newtonの運動力学

・ 第1法則（慣性の法則）

「すべての物体は、力を加えて、その状態を変えない限り、静止、または直線上の一様な運動を続ける。」

2

1.1 Newtonの運動力学

- 第2法則（運動量の法則）

「運動量が時間とともに変化する割合は、その物体に働く力に比例し、かつ、力が働く直線方向に起きる。」

運動量（ベクトル）: $m\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\boldsymbol{a}$$

質量 : m
速度（ベクトル） : $\boldsymbol{v}$
力（ベクトル） : $\boldsymbol{F}$
位置（ベクトル） : $\boldsymbol{r}$
加速度（ベクトル） : $\boldsymbol{a}$

3

1.1 Newtonの運動力学

- 第3法則（作用・反作用の法則）

「どのような力の作用にも、大きさが等しく方向が反対の反作用力が存在する。」

4

1.1 Newtonの運動力学

- **質点系の力学**

質量のみあって、大きさのない点：質点 m_i

質点の集合体：多質点系 $\{m_i\}$
　　質点間の距離が変わらない：剛体
　　質点間の拘束がない：自由体

多質点系の外部から質点 m_i に作用する力：**外力** $\boldsymbol{F}_i$

質点相互の拘束によって働く力：**内力**
　　m_j から m_i に作用する内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$

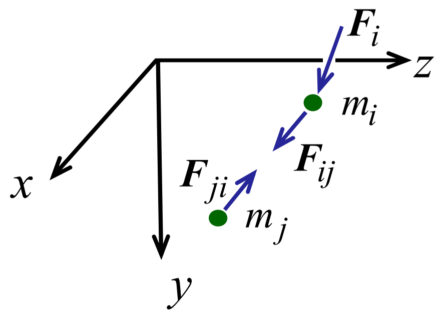
5

1.1 Newtonの運動力学

- **質点系の力学**

質量のみあって、大きさ

質点の集合体：多質点系
　　質点間の距離が変
　　質点間の拘束がな



多質点系の外部から質点 m_i に作用する力：**外力** $\boldsymbol{F}_i$

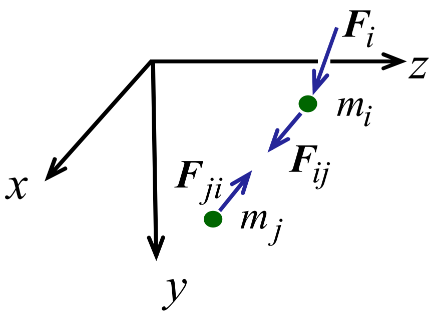
質点相互の拘束によって働く力：**内力**
　　m_j から m_i に作用する内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$

6

1.1 Newtonの運動力学

Newtonの第3法則より、

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$$



Newtonの第2法則より、
質点 m_i について、

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{d(m_i \boldsymbol{v}_i)}{dt}$$

多質点系を構成するすべての質点を足しあわせると、

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

第3法則より、左辺第2項＝0なので、

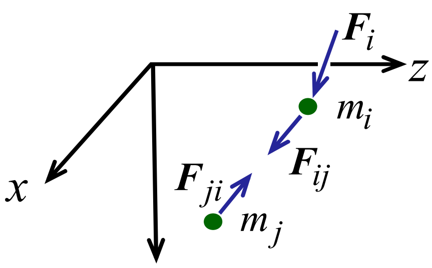
$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

7

1.1 Newtonの運動力学

Newtonの第3法則より、

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$$



Newtonの第2法則より、
質点 m_i について、

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{d(m_i \boldsymbol{v}_i)}{dt}$$

多質点系を構成するす

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{d}{dt}$$

第3法則より、左辺第2

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

多質点系の運動量が
時間的に変化する割合は、
外力の合力に等しく、
内力には無関係

8

1.1 Newtonの運動力学

運動量モーメント $\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) = m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i)$ に関して、
時間 t で微分すると、

$$\frac{d\boldsymbol{H}_i}{dt} = \frac{d}{dt} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \times \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{v}_i)$$

$$= m_i(\underset{\overset{\parallel}{0}}{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i}) + \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}) = \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij})$$

多質点系を構成するすべての質点を足しあわせると、

$$\sum_i \frac{d\boldsymbol{H}_i}{dt} = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) + \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \sum_j \boldsymbol{F}_{ij})$$

第3法則より、右辺第2項＝0なので、

$$\frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{H}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)$$

9

1.1 Newtonの運動力学

運動量モーメント $\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) = m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i)$ に関して、
時間 t で微分すると、

$$\frac{d\boldsymbol{H}_i}{dt} = \frac{d}{dt} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \times \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{v}_i)$$

$$= m_i(\underset{\overset{\parallel}{0}}{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i}) + \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{F}_{ij}) = \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{F}_{ij})$$

多質点系を構成

$$\sum_i \frac{d\boldsymbol{H}_i}{dt} = \sum_i (\boldsymbol{r}_i$$

第3法則より、右

多質点系の運動量モーメントが
時間的に変化する割合は、
外力のモーメントの総和に等しく、
内力のモーメントには無関係

$$\frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{H}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)$$

10

1.2 力のつり合い条件

多質点系の運動量について、$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \dfrac{d}{dt}\sum_i (m_i \boldsymbol{v}_i)$

運動量モーメントについて、 $\sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \dfrac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{H}_i$

Newton力学 $\begin{cases} \boxed{\text{静力学・・・運動量の時間的変化を無視}} \\ \text{動力学・・・時間的変化を無視できない} \end{cases}$

したがって、上2式の右辺＝0なので、

$$\begin{cases} \boxed{\sum \boldsymbol{F}_i = 0} \\ \boxed{\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0} \end{cases}$$

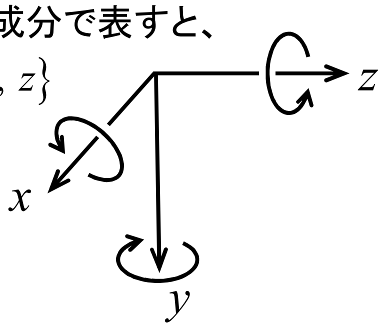
外力のつり合い条件

11

1.2 力のつり合い条件

力（ベクトル）、位置（ベクトル）を成分で表すと、

$\boldsymbol{F} = \{F_x, F_y, F_z\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$



$$\sum \boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0 & \text{・・}x\text{軸} \\ \sum (z \cdot F_x - x \cdot F_z) = 0 & \text{・・}y\text{軸} \\ \sum (x \cdot F_y - y \cdot F_x) = 0 & \text{・・}z\text{軸} \end{cases}$$

まわり

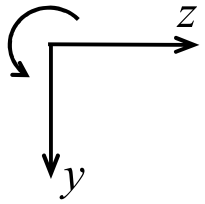
12

1.2 力のつり合い条件

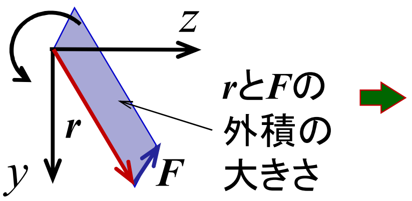
本講義で主に扱う2次元平面(y-z平面)では、

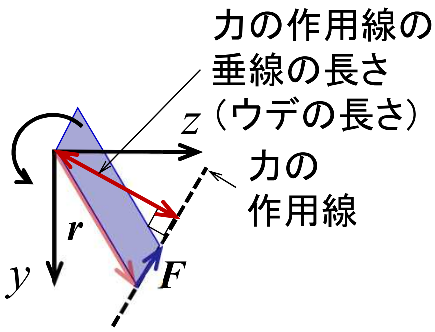
$$\sum \boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0 \Rightarrow \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0$$



※モーメントの求め方





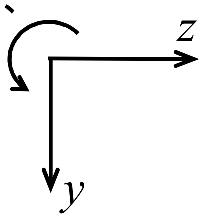
13

1.2 力のつり合い条件

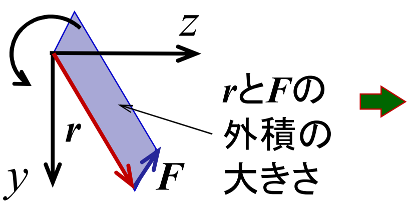
本講義で主に扱う2次元平面(y-z平面)では、

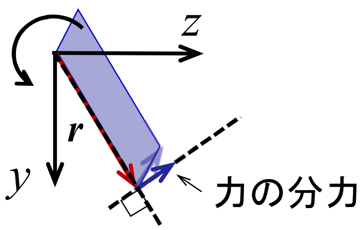
$$\sum \boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0 \Rightarrow \sum (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0$$



※モーメントの求め方

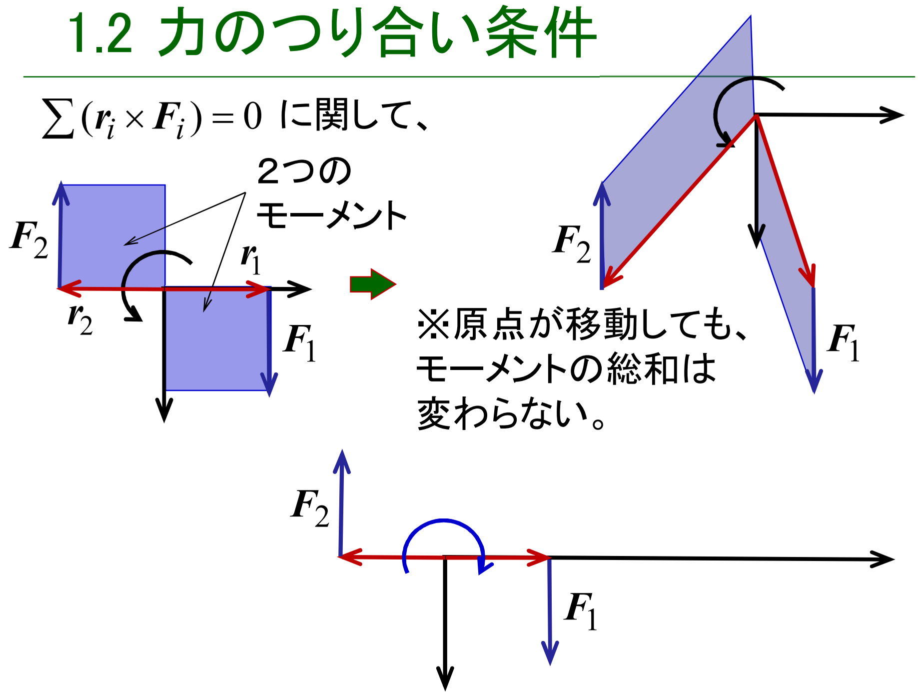




14

1.2 力のつり合い条件

$\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0$ に関して、

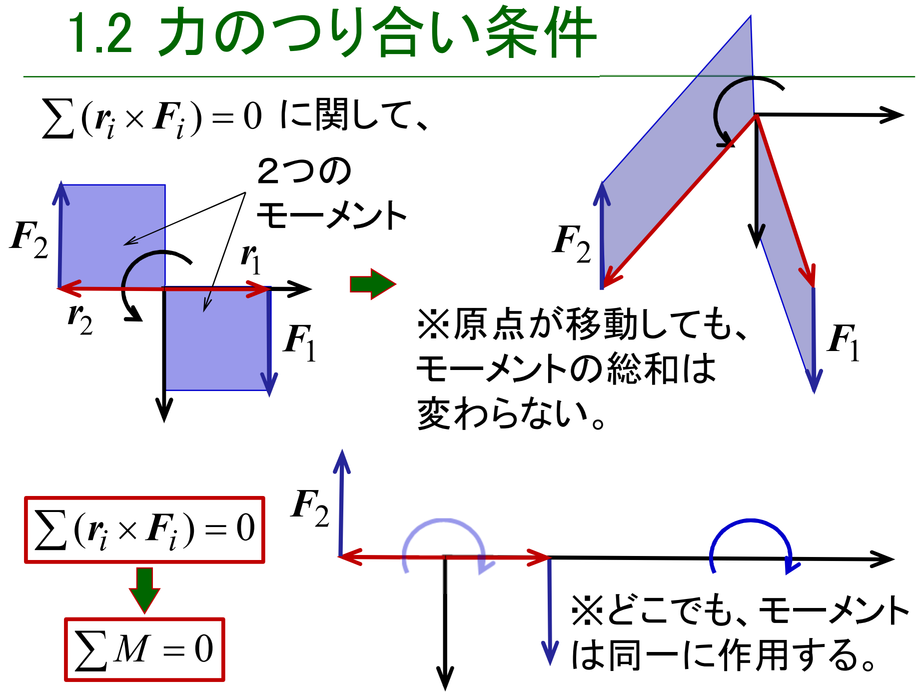


※原点が移動しても、モーメントの総和は変わらない。

15

1.2 力のつり合い条件

$\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0$ に関して、



※原点が移動しても、モーメントの総和は変わらない。

$$\boxed{\sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = 0}$$

$$\boxed{\sum M = 0}$$

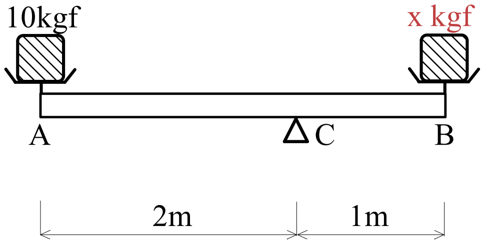
※どこでも、モーメントは同一に作用する。

16

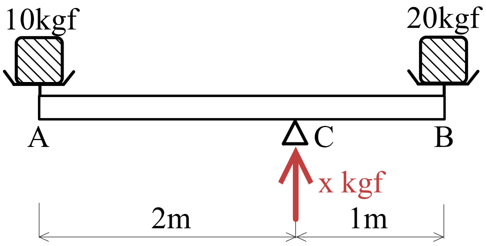
1.2 力のつり合い条件

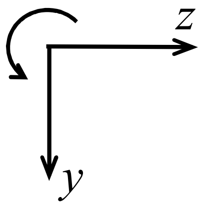
01:00

例題①



例題①’



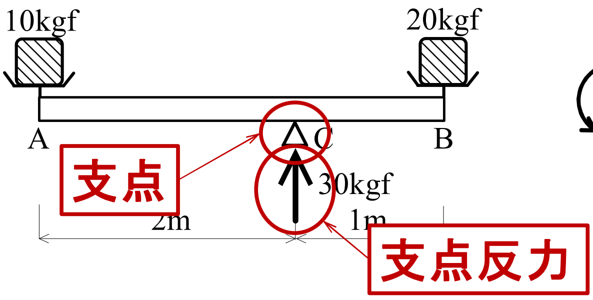


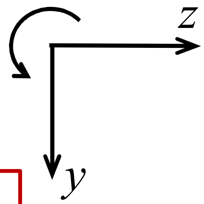
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

17

1.2 力のつり合い条件

例題①





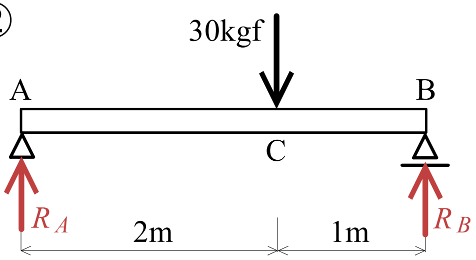
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

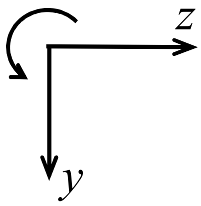
18

1.2 力のつり合い条件

03:00

例題②



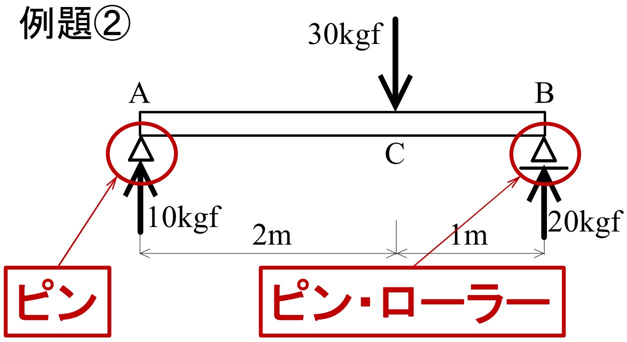


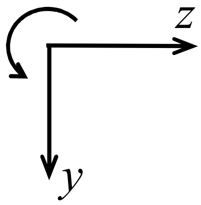
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

19

1.2 力のつり合い条件

例題②





$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

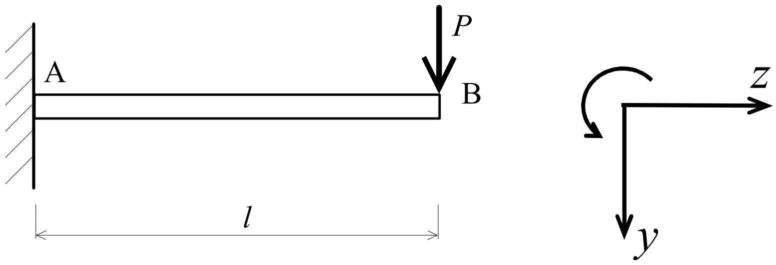
ピンとピン・ローラーで支持された梁を、単純梁と呼ぶ

20

1.2 力のつり合い条件

05:00

例題③

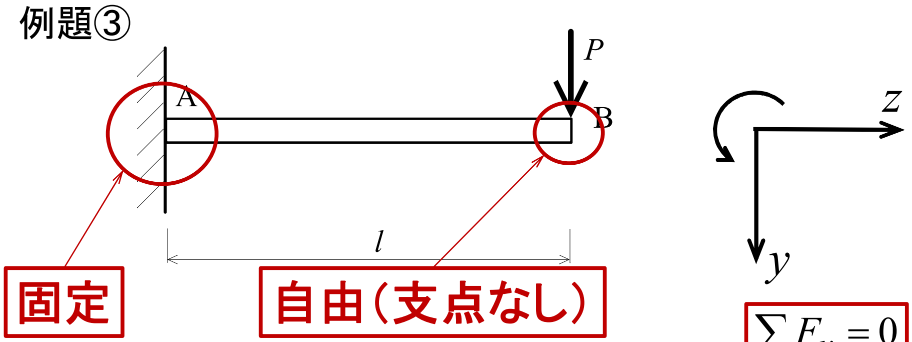


$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

21

1.2 力のつり合い条件

例題③



$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

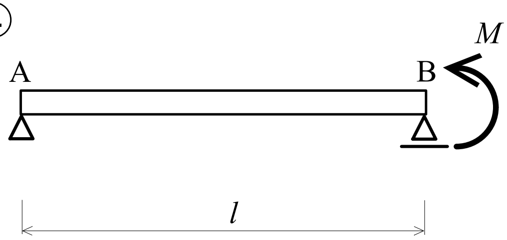
固定で支持され、他端が自由の梁を、片持梁(かたもちばり)と呼ぶ

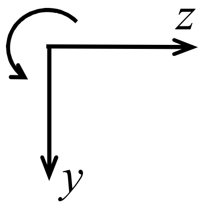
22

1.2 力のつり合い条件

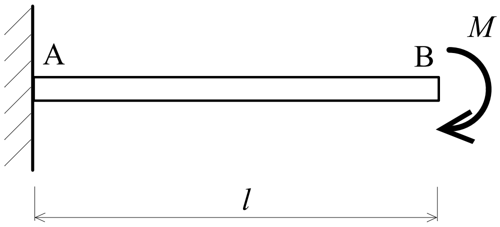
05:00

例題④





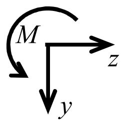
例題⑤

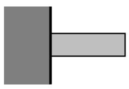
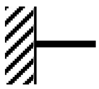
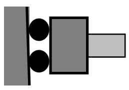
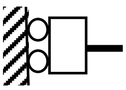
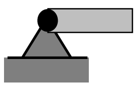
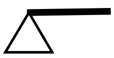
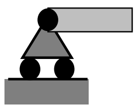
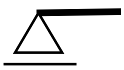


$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

23

1.2 力のつり合い条件



材料力学での支持条件			支点反力		
名称	イメージ	記号	R_y	R_z	M
固定			↓あり	→あり	あり
ローラー			なし	→あり	あり
ピン			↓あり	→あり	なし
ピン・ローラー			↓あり	なし	なし
自由			なし	なし	なし

24

1.3 内力のつり合い

・ Newtonの第3法則（作用・反作用の法則）

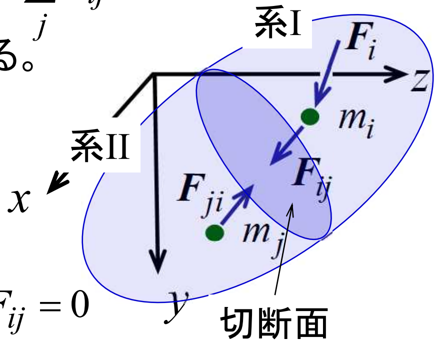
「どのような力の作用にも、大きさが等しく方向が反対の反作用力が存在する。」

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \Rightarrow \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} = 0$$

質点系を、系Iと系IIに分ける。

⇒ 仮想的に切断する。

$$\sum_i^{I} \sum_j^{I} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i^{I} \sum_j^{II} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i^{II} \sum_j^{I} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i^{II} \sum_j^{II} \boldsymbol{F}_{ij} = 0$$



25

1.3 内力のつり合い

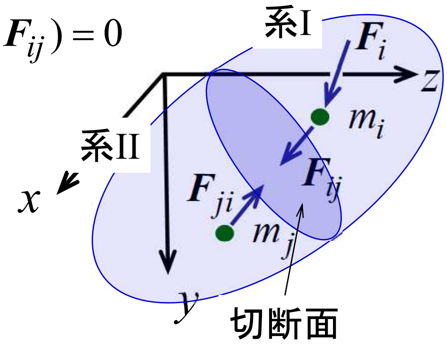
したがって、

$$\sum_i^{I} \sum_j^{II} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i^{II} \sum_j^{I} \boldsymbol{F}_{ij} = 0$$

物体を仮想の断面で切断したとき、断面に作用する内力を**断面力**といい、断面力の総和はつり合っている

モーメントに関しても、

$$\sum_i^{I} \sum_j^{II} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}) + \sum_i^{I} \sum_j^{II} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}) = 0$$



26

1.3 内力のつり合い

系Iに着目すると、

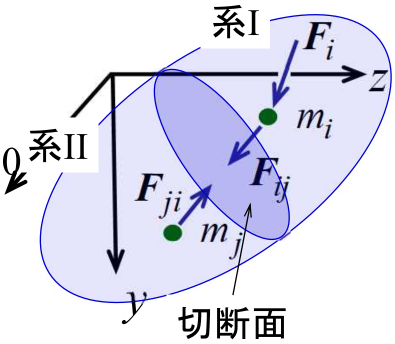
$$\sum_{i}^{I} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i}^{I}\sum_{j}^{I} \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i}^{I}\sum_{j}^{II} \boldsymbol{F}_{ij} = 0$$

系Iに作用する外力　=0　系IIから系Iに作用する内力

切断面に作用する断面力と、その切断した系に作用する外力はつり合っている

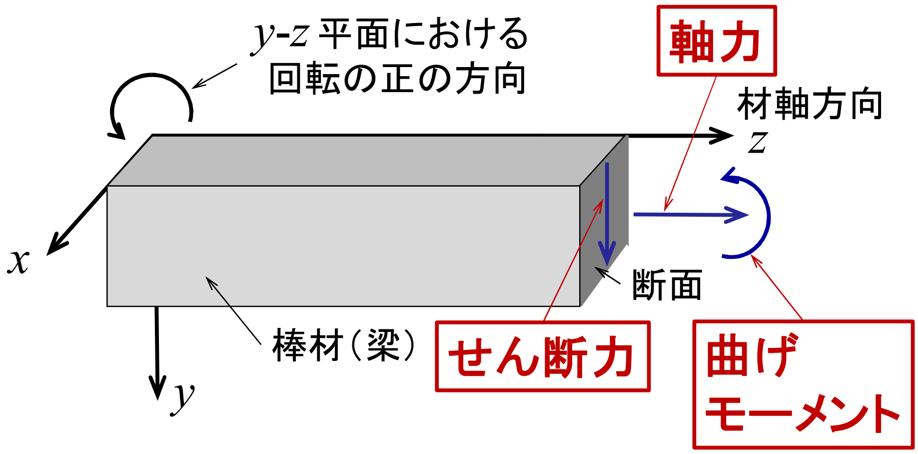
モーメントに関しても、

$$\sum_{i}^{I} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) + \sum_{i}^{I}\sum_{j}^{II} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}) = 0$$



1.3 内力のつり合い

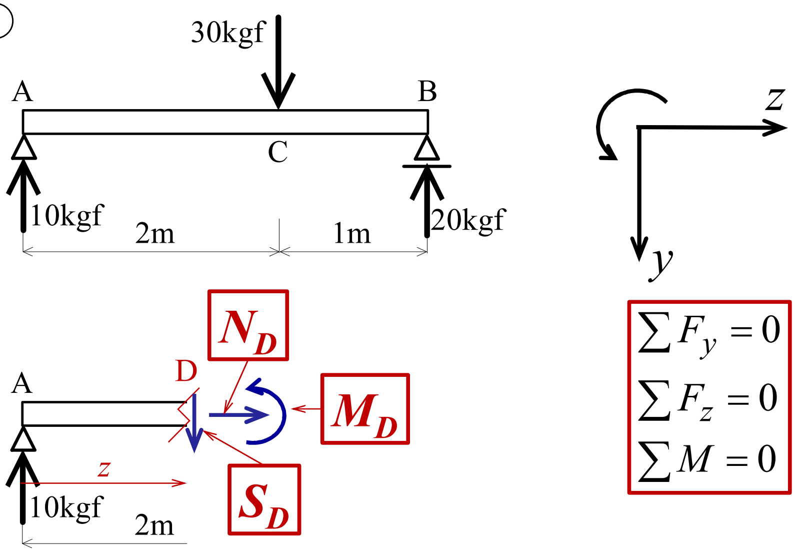
部材の断面力



1.3 内力のつり合い

05:00

例題①



$\sum F_y = 0$

$\sum F_z = 0$

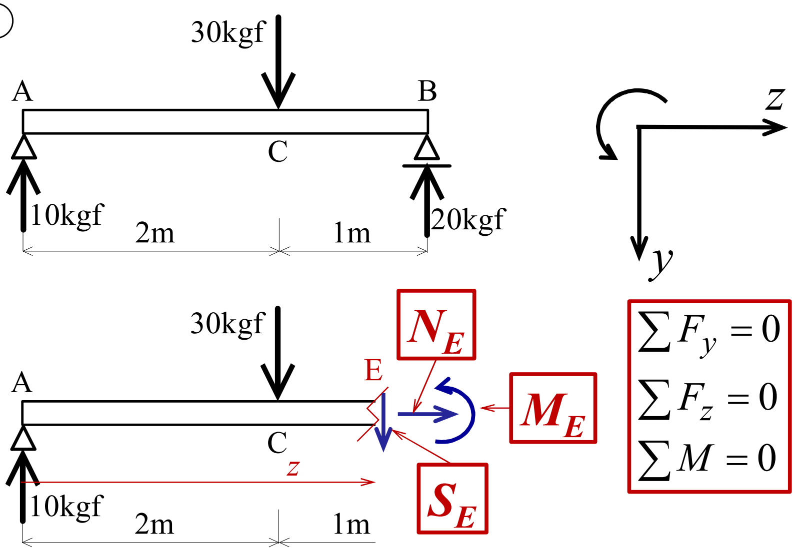
$\sum M = 0$

29

1.3 内力のつり合い

05:00

例題①



$\sum F_y = 0$

$\sum F_z = 0$

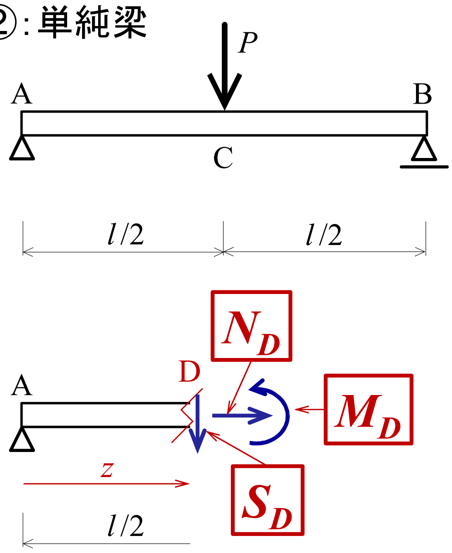
$\sum M = 0$

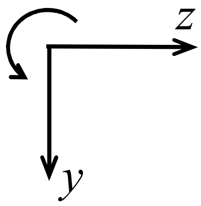
30

1.3 内力のつり合い

05:00

例題②：単純梁





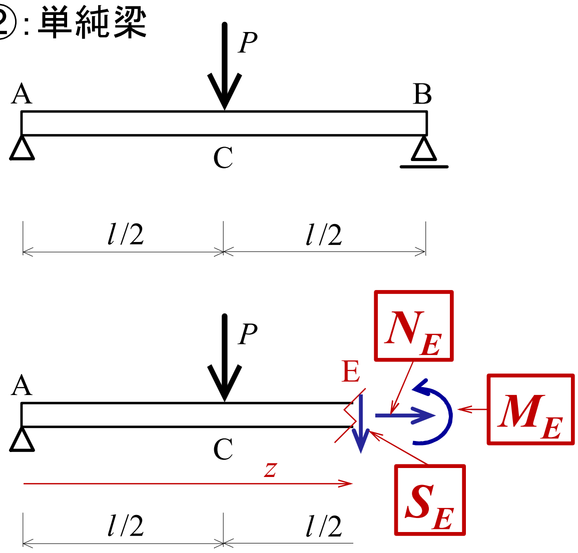
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

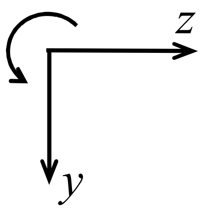
31

1.3 内力のつり合い

05:00

例題②：単純梁



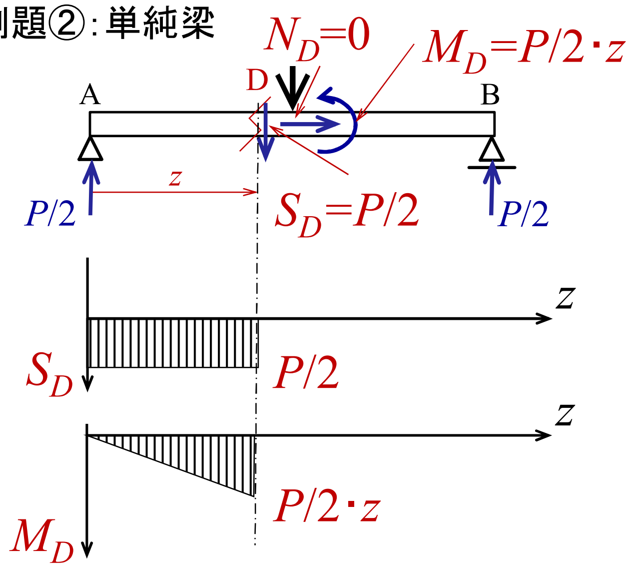


$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

32

1.3 内力のつり合い

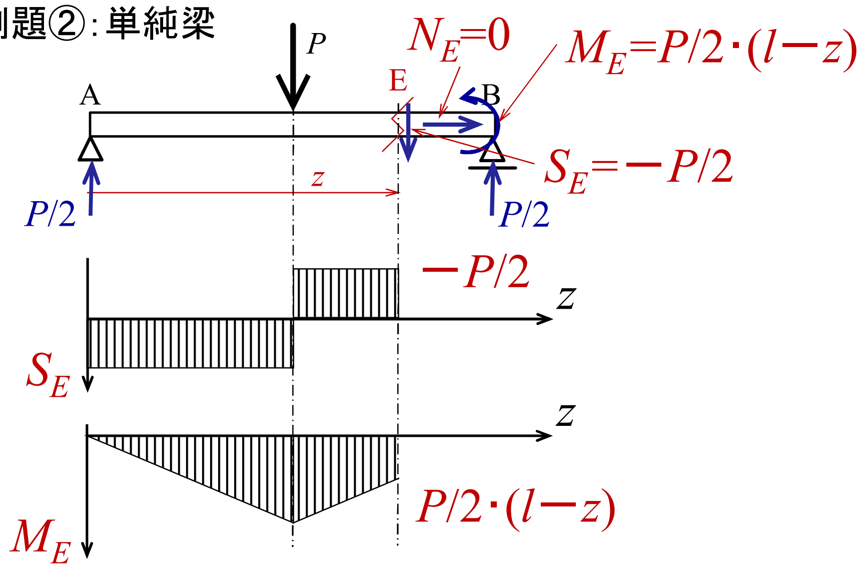
例題②：単純梁



33

1.3 内力のつり合い

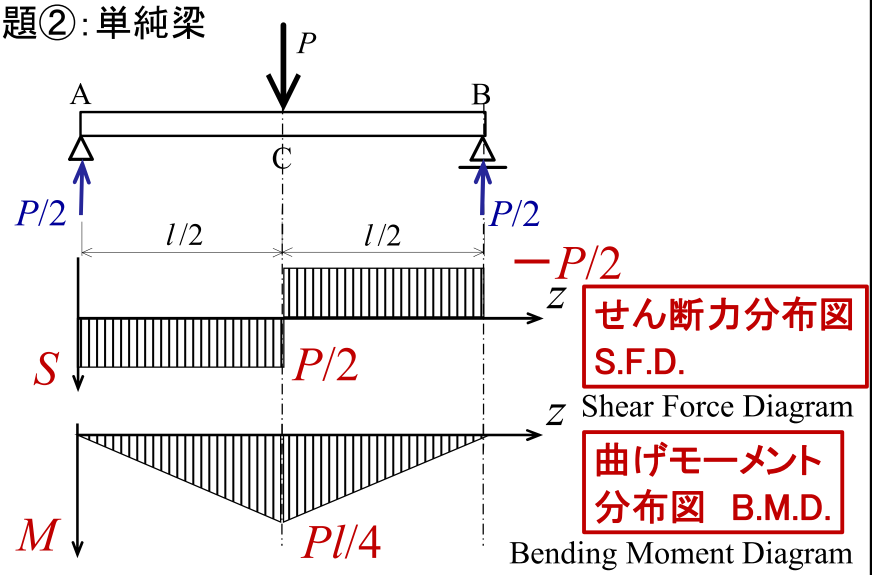
例題②：単純梁



34

1.3 内力のつり合い

例題②:単純梁

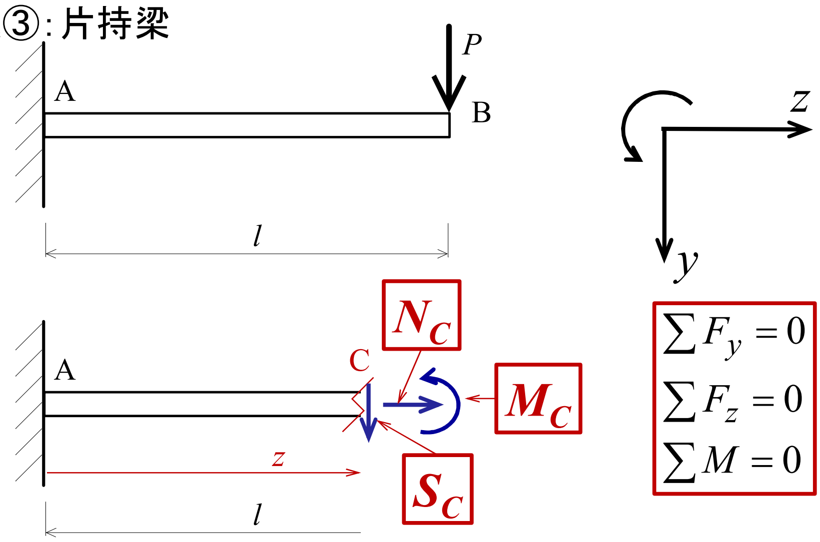


35

1.3 内力のつり合い

05:00

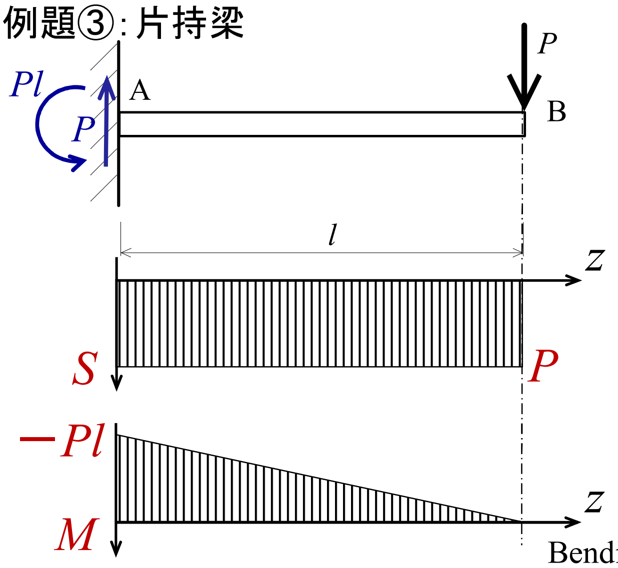
例題③:片持梁



36

1.3 内力のつり合い

例題③: 片持梁



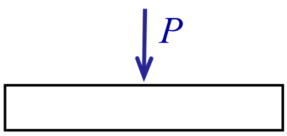
せん断力分布図
S.F.D.
Shear Force Diagram

曲げモーメント分布図　B.M.D.
Bending Moment Diagram

37

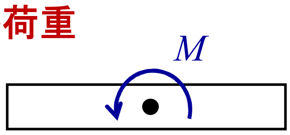
★ 外力の種類

集中荷重



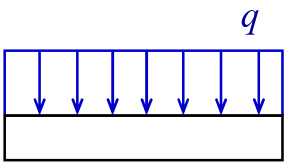
一点に作用する力

モーメント荷重



一点に作用するモーメント

分布荷重



ある範囲に作用する力
棒材の場合、単位長さあたりの力で表す

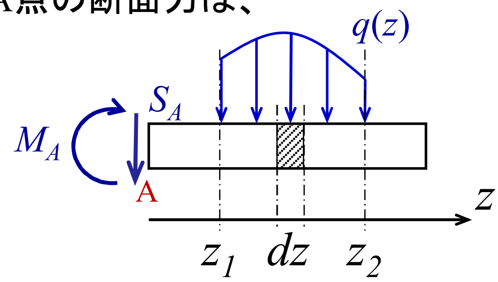
38

★ 分布荷重の考え方

分布荷重が作用する部材の微小部分dzを考える。
微小部分によって生じるA点の断面力は、

$$dS_A = q(z)dz$$

$$dM_A = q(z)dz \cdot z$$



$$S_A = \int_{z_1}^{z_2} q(z)dz$$

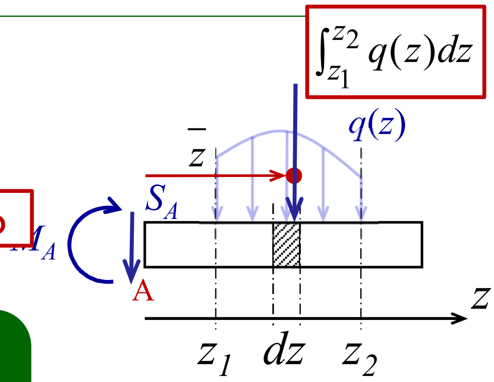
$$M_A = \int_{z_1}^{z_2} q(z) \cdot zdz$$

ここで、 $\dfrac{M_A}{S_A}$ を考えると、・・・

39

★ 分布荷重の考え方

$$\frac{M_A}{S_A} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} q(z) \cdot zdz}{\int_{z_1}^{z_2} q(z)dz} = \bar{z}$$



$\bar{z}$ **:q(z)の図心を与える**

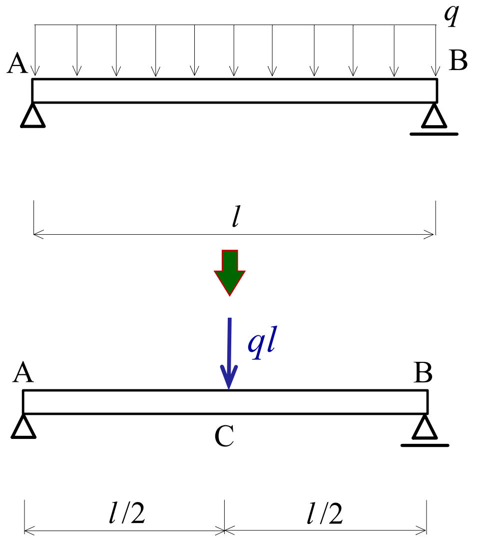
大きさがq(z)の面積、作用位置が図心の集中荷重に置き換えればよい

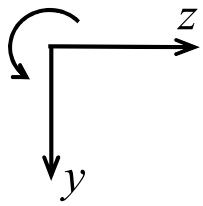
40

★ 分布荷重の考え方

01:00

例題④：等分布荷重が作用する単純梁





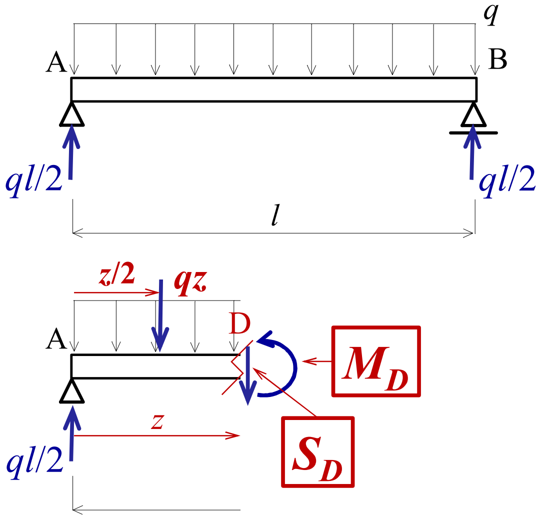
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

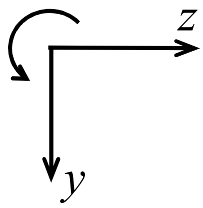
41

★ 分布荷重の考え方

05:00

例題④：等分布荷重が作用する単純梁



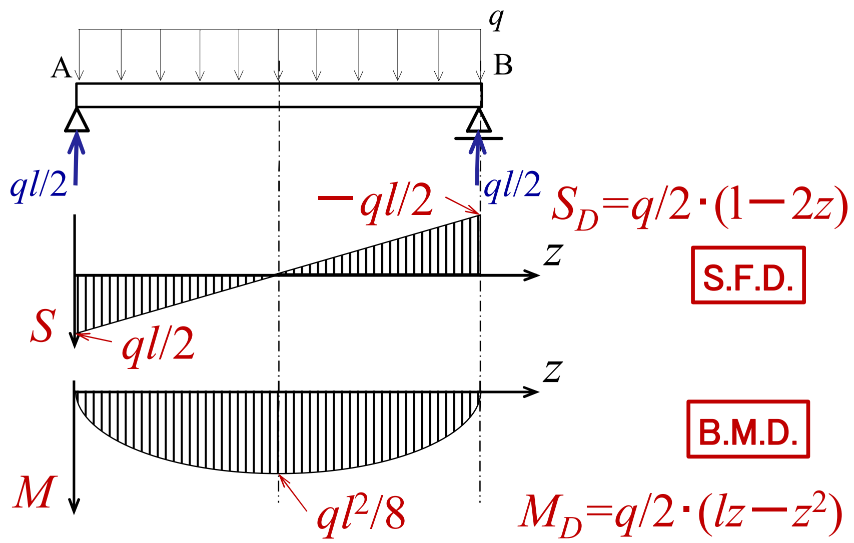


$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$\sum M = 0$$

42

★ 分布荷重の考え方

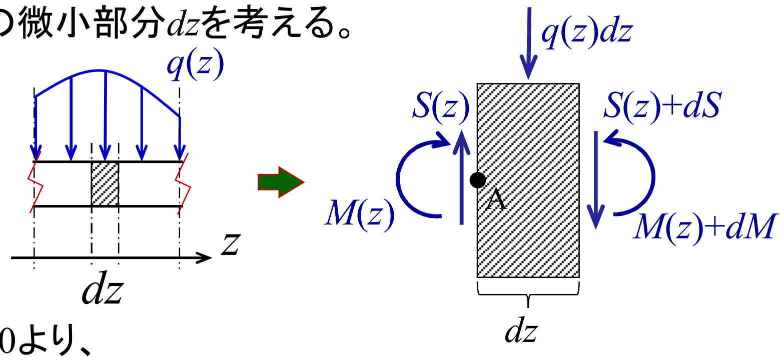
例題④：等分布荷重が作用する単純梁



43

★ 荷重・せん断力・曲げモーメントの関係

部材の微小部分dzを考える。



$\Sigma F_y=0$より、

$$-S(z)+S(z)+dS+q(z)dz=0$$

$\Sigma M=0$（A点まわり）より、

$$-M(z)+M(z)+dM-(S(z)+dS)dz-q(z)dz(dz/2)=0$$

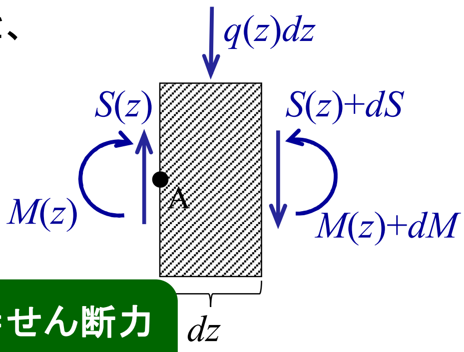
$$\therefore dM-S(z)dz-dSdz-q(z)\cdot(dz)^2/2=0$$

44

★ 荷重・せん断力・曲げモーメントの関係

2次の微小項を省略すると、

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dS(z)}{dz} &= -q(z)\\ \frac{dM(z)}{dz} &= S(z)\end{aligned}}$$



曲げモーメントの微分＝せん断力
せん断力の微分＝荷重

荷重の積分＝せん断力
せん断力の積分＝曲げモーメント

★ 荷重・せん断力・曲げモーメントの関係

荷重条件	せん断力 S.F.D.	曲げモーメント B.M.D.
モーメント	0	定数
集中荷重	定数	1次式
等分布荷重	1次式	2次式
分布荷重（1次式）	2次式	3次式
・ ・	・ ・	・ ・

第1章　おしまい

47