



第4章 非定常熱伝導

- **伝熱工学の基礎:** 伝熱の基本要素、フーリエの法則、ニュートンの冷却則
- **1次元定常熱伝導:** 熱伝導率、熱通過率、熱伝導方程式
- **2次元定常熱伝導:** ラプラスの方程式、数値解析の基礎
- **非定常熱伝導:** 非定常熱伝導方程式、ラプラス変換、フーリエ数とビオ数
- **対流熱伝達の基礎:** 熱伝達率、速度境界層と温度境界層、層流境界層と乱流境界層、境界層厚さ、混合平均温度
- **強制対流熱伝達:** 管内乱流熱伝達、円柱および球の熱伝達、管群熱伝達
- **自然対流熱伝達:** 垂直平板自然対流熱伝達、密閉層内自然対流、共存対流熱伝達
- **輻射伝熱:** ステファン-ボルツマンの法則、黒体と灰色体、輻射率、形態係数
- **凝縮熱伝達:** 鉛直平板膜状凝縮、凝縮数、水平円管膜状凝縮、滴状凝縮
- **沸騰熱伝達:** 沸騰曲線、気泡力学、沸騰熱伝達率



非定常熱伝導とは

物体の周囲温度が急変した場合
物体内の温度が平衡状態に達するまでに
ある時間が必要。



実用的には、平衡状態に達するまでの非定常な
加熱や冷却の過程を計算することが必要。

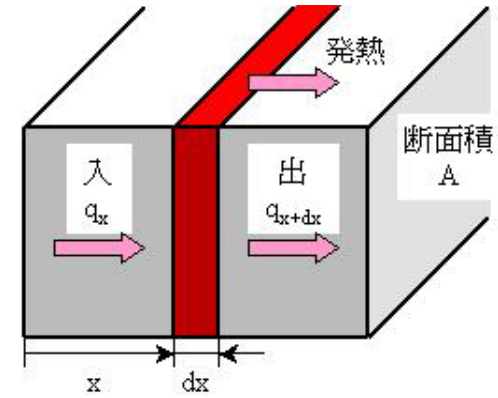


非定常熱伝導方程式(1次元)

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

非定常項

熱伝導の物理



$$\left(\begin{array}{c} \Delta x \text{ 中の} \\ \text{温度変化} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Delta x \text{ 中の} \\ \text{熱発生} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{境界 } x \text{ における} \\ \text{熱の流入} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{境界 } x + \Delta x \text{ にお} \\ \text{ける熱の流出} \end{array} \right)$$

$$\Delta x A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta x A \cdot g + q_x - q_{x+\Delta x}$$

$$q_x = -\lambda A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \quad q_{x+\Delta x} = -\lambda A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

ここで、 $q_{x+\Delta x}$ を Taylor 展開し高次の項を無視すると、

$$q_{x+\Delta x} = -\lambda A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} = -\lambda A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x - \lambda A \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_x \Delta x - \dots$$

となるから

$$\Delta x A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta x A g + \lambda A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x$$

ρ : 密度
 c : 比熱
 λ : 熱伝導率

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g^* \quad \text{ここで} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \quad g^* = \frac{g}{\rho c}$$

物体の大きさが無視できる場合 — 集中熱容量モデル —

表面積: A 体積: V の物体表面から移動する熱流束: $q = \frac{Q}{A}$
は、集中定数系近似を行うことによって、

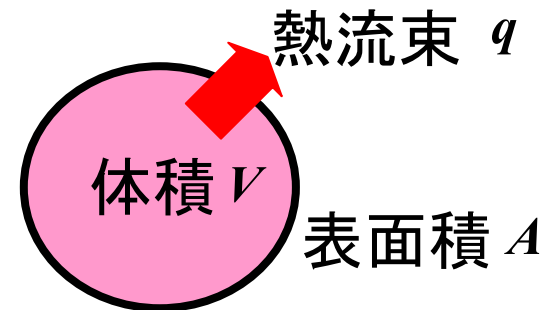
$$Q = hA(T - T_{\infty}) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau}$$

ρ : 密度
 c : 比熱
 h : 熱伝達率

と表すことができるので、

境界条件: $t = 0$ において、 $T = T_0$ とすると、
解析的に解くことができ、その解は以下となる。

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\left(\frac{hA}{c\rho V}\right) \cdot t}$$



物体からの熱移動や温度変化を支配する無次元数 — ビオ数とフーリエ数 —

$$\text{ビオ数: } Bi \equiv \frac{hs}{k} = \frac{hs \cdot sT}{k \cdot sT} = \frac{hs^2 T}{ks^2 \left(\frac{T}{s}\right)} = \frac{[\text{熱伝達による移動熱量}(W)]}{[\text{熱伝導による移動熱量}(W)]}$$

$$\text{フーリエ数: } Fo \equiv \frac{\alpha \tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho cs^2} = \frac{k\tau \cdot s\Delta T}{(\rho s^3)c \cdot \Delta T} = \frac{[\text{熱伝導による移動熱量}(J)]}{[\text{保有熱量}(J)]}$$

を定義すると、これによって、熱流束の時定数が表される。

$$\frac{hA}{\rho cV} t \approx \frac{h}{\rho cs} t = \left(\frac{hs}{k}\right) \cdot \left(\frac{k}{\rho cs^2} t\right) = Bi \cdot Fo$$

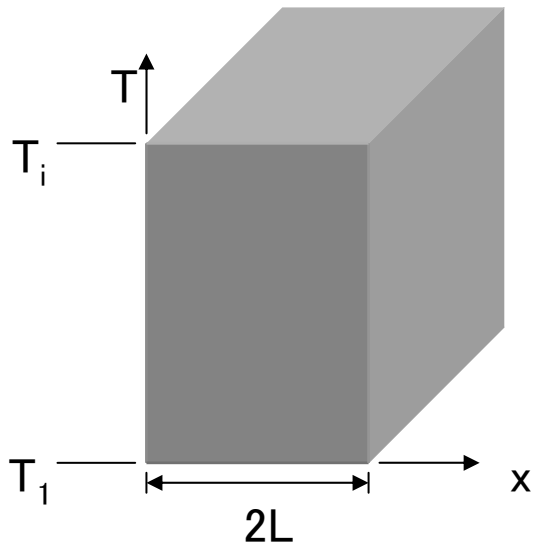
これより、集中定数系における温度変化は以下により表される。

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho cV}\right) \cdot t} = e^{-Fo \cdot Bi}$$

熱移動や温度が時間によって変化する場合、ビオ数とフーリエ数を知ることによって、その性質を特定することができる。

無限平板の非定常熱伝導

一様な温度 T_i の無限平板があり、時刻0のとき、その表面が、急に $T=T_1$ の温度に下がったとする。



非定常熱伝導方程式:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$\theta = T - T_1$ を導入すると、

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

初期条件: $\tau = 0, \quad 0 \leq x \leq 2L$ で $\theta = \theta_i = T_i - T_1$ (a)

境界条件: $x = 0, \quad \tau > 0$ で $\theta = 0$ (b)

$x = 2L, \quad \tau > 0$ で $\theta = 0$ (c)



基礎式の変形

変数分離法

$$\theta = XT \quad \text{ただし} \quad X = X(x) \\ T = T(\tau)$$

仮定した解Tを、基礎方程式に代入

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau}$$

x, tはそれぞれ独立であり、両辺はある定数 $-\lambda^2$ に等しくなければならない。よって、

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \frac{dT}{d\tau} + \alpha \lambda^2 T = 0$$



一般解

境界条件に適合するためには、 $\lambda^2 > 0$ でなければならない。従って、一般解は、

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \alpha \cdot \tau}$$

境界条件(b)より、 $\tau > 0$ において、 $C_1 = 0$ であるから、さらに、 $C_2 = 0$ とはならないことから、境界条件(c)より、 $\sin 2L\lambda = 0$ 、すなわち

$$\lambda = \frac{n\pi}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

したがって、最終的な解は級数の形で

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi/2L)^2 \alpha \tau} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$



級数解の決定

定数 C_n は初期条件(a)により次式で与えられる。

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \theta_i \sin \frac{n\pi x}{2L} dx = \frac{4}{n\pi} \theta_i, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

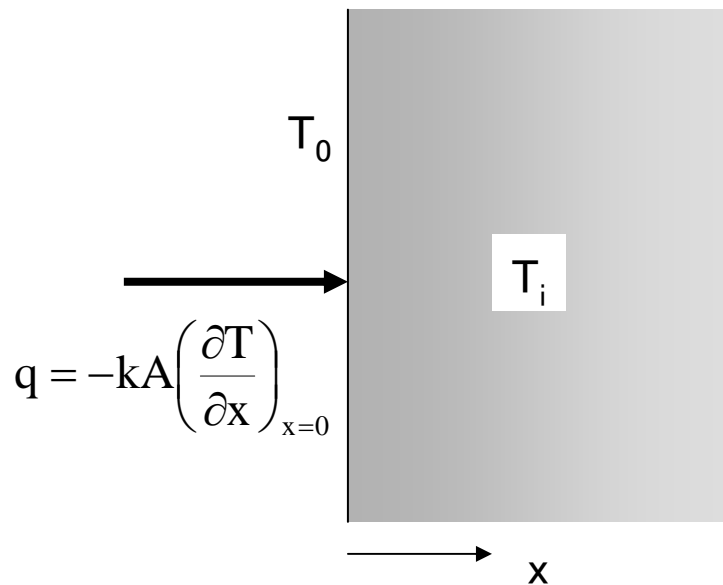
結局、級数解は

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_i}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi/2L)^2 \alpha \tau} \sin \frac{n\pi x}{2L} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

半無限物体の非定常熱伝導(解法その1)

— 関数展開による解法 —

一様な温度 T_i の半無限物体があり、時刻0のとき、その表面が急に $T=T_0$ の温度に下がり、その温度が保たれるとする。



非定常熱伝導方程式:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$\theta = T - T_0$ を導入すると、

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$



正規直交関数による展開係数の決定

正規直交関数 $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx = \delta_{mk}$

ここで $\delta_{mk} \equiv \begin{cases} 1 & (m = k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases}$ クロネッカのデルタ関数



$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx$$



$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = c_k \int_a^b \varphi_m^2(x)dx = c_m \longrightarrow \{c_m\}$$



半無限物体の非定常熱伝導

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

初期条件: $u(x, 0) = 1$

境界条件: $u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = 0$

$u(x, t)$ を $\left\{ \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2} \right\}$ で展開すると $(m=1, 2, 3, \dots)$

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}$$



一般解と係数の決定

原方程式に代入

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{2m-1}{2} \pi x \frac{dc_m}{dt} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \sin \frac{2m-1}{2} \pi x$$

直交条件より

$$\frac{dc_m}{dt} = \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 c_m$$

よって、

$$c_m = c_{m0} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t}$$

求める解は、

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{m0} e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t} \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

初期条件より $u(x, 0) = 1$ であるから

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_{m0} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}$$



解の決定

区間[0 1]における関数

$$u(x) = 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を正弦波で展開すると、

$$u(x) = 1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

ここで、展開係数 c_m は、

$$c_m = \frac{4}{(2m-1)\pi}$$

→ Program: ORTHG

であるから、よって解析解は

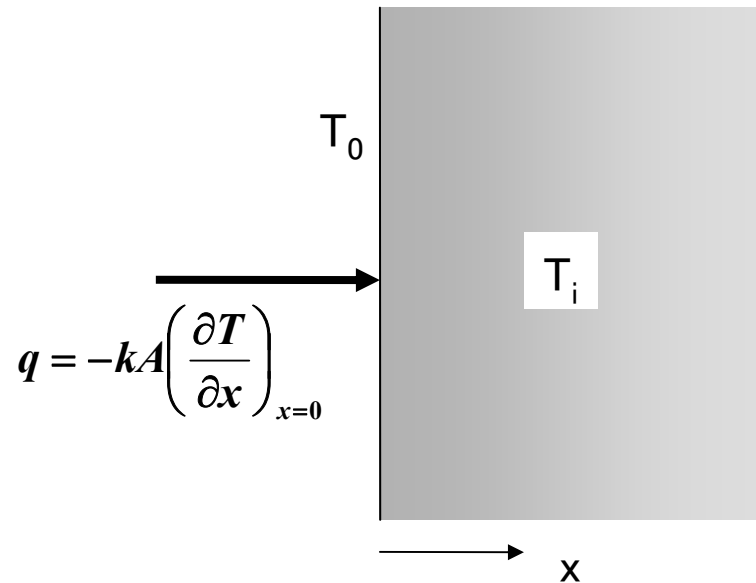
$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \exp \left[- \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 t \right] \sin \frac{2m-1}{2} \pi x$$

→ Program: HEATX

半無限物体の非定常熱伝導(解法その2)

— 変数変換による解法 —

一様な温度 T_i の半無限物体があり、時刻0のとき、その表面が急に $T=T_0$ の温度に下がり、その温度が保たれるとする。



非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

初期条件、境界条件

$$T(x, 0) = T_i$$

$$T(0, \tau) = T_0 \quad (\tau > 0)$$



変数変換による解法

以下の変数変換を行う。

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

この変数の物理的意味は、「x軸の目盛りを時々刻々変化させたとき、 $2\sqrt{at}$ を基準にして温度分布を計測すると、温度分布は時間に関わらず相似となり、一つの独立変数の関するとなる」ということを意味する。いま、

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \left(-\frac{x}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2t\sqrt{t}} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{at}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \cdot \left(\frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{at}} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4at} \cdot \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$



変数変換による解法

であるから基礎式は、

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dT}{d\eta} = 0$$

ここで更に、

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} \equiv f(\eta)$$

とおくと、基礎式は、

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad f'' + 2\eta \cdot f' = 0 \quad \left(\because f' = \frac{d^2 f}{d\eta^2}, f'' = \frac{df}{d\eta} \right)$$

また、境界条件は、

$$x = 0 \quad T = T_0 \rightarrow \eta = 0 \quad f = 0$$

$$\tau = 0 \quad T = T_i \rightarrow \eta = \infty \quad f = 1$$



変数変換による解法

であるから、

$$f'' + 2\eta \cdot f' = 0$$

$$2\eta = -\frac{f''}{f'} = -\frac{d(\ln(f'))}{d\eta}$$

$$\int 2\eta d\eta = -\int \frac{d(\ln(f'))}{d\eta} d\eta$$

$$-2 \cdot \frac{\eta^2}{2} + C_1' = \ln(f')$$

$$f' = e^{-\eta^2 + C_1'} = C_1 \cdot e^{-\eta^2}$$

$$\therefore f = C_1 \int e^{-\eta^2} d\eta + C_2$$



変数変換による解法

境界条件より

$$f(\eta = 0) = C_1 \int_0^0 e^{-\eta^2} d\eta + C_2 = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 = 0$$

$$f(\eta = \infty) = C_1 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta + C_2 = C_1 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta = 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\eta^2} d\eta = \text{erf}(\eta)$$

$$\therefore \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

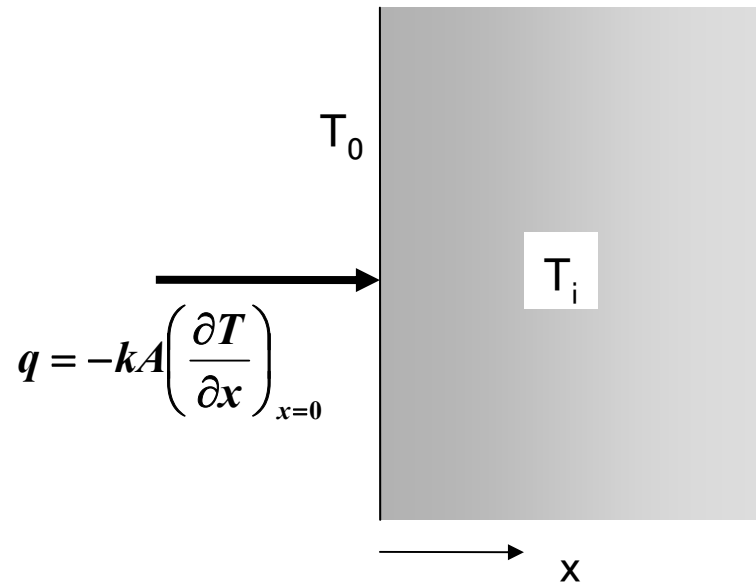
ここで、
$$\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2} d\eta$$

は、ガウスの誤差関数である。

半無限物体の非定常熱伝導(解法その3)

— ラプラス変換による解法 —

一様な温度 T_i の半無限物体があり、時刻0のとき、その表面が急に $T=T_0$ の温度に下がり、その温度が保たれるとする。



非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

初期条件、境界条件

$$T(x, 0) = T_i$$

$$T(0, \tau) = T_0 \quad (\tau > 0)$$



ラプラス変換による解法

$\theta = T - T_0$ を導入すると、基礎方程式と境界条件は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{ならびに} \quad \begin{aligned} \theta(x, 0) &= 0 \\ \theta(0, \tau) &= \theta_0 \quad (\tau > 0) \end{aligned}$$

この基礎式と境界条件をラプラス変換すると

$$F(p) \equiv \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$\text{より} \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt} dt = p\Theta - \theta(t=0) \quad \Theta(p) \equiv \int_0^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt} dt$$

であるから、

$$p\Theta - \theta(t=0) = \alpha \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \quad \text{ならびに} \quad \begin{aligned} \theta(t=0) &= 0 \\ \Theta(x=0) &= \frac{\theta_0}{p} \end{aligned}$$

上式の一般解は、

$$\Theta(p, x) = Ae^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x}$$



ラプラス変換による解法

解は無限遠で有解でなければならないから $A = 0$

また、境界条件より、 $B = \frac{\theta_0}{p}$

よって、

$$\Theta(p, x) = \frac{\theta_0}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x}$$

この式をラプラス逆変換することによって

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

ここで、

$$\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2} d\eta$$

は、ガウスの誤差関数である。

ラプラス変換表

①具体的な時間関数とラプラス変換の対応

No	f(t)	F(s)
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t ⁿ	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e ^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5	sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	e ^{bt} sin at	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
8	e ^{bt} cos at	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$

No	f(t)	F(s)
9	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
10	cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
11	te ^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
12	t sin at	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
13	t cos at	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
14	$\frac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1} \frac{a}{s}$
15	$\delta(t)$	1



熱流束の決定

任意の点における熱流束は、

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

であるから、解に誤差関数を代入することによって、

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2} d\eta$$

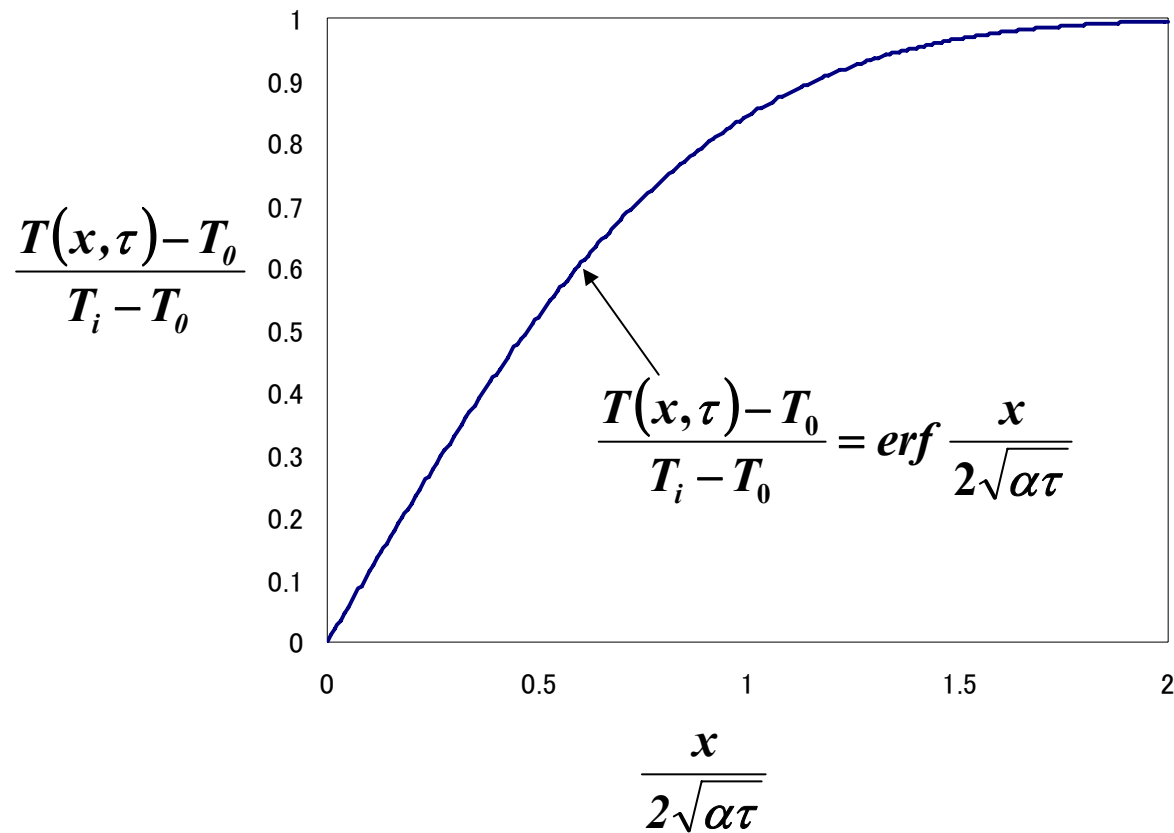
として得られる式を、偏微分すると、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) = \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} e^{-x^2/4\alpha\tau}$$

より、表面からの移動熱量が以下の式で与えられる。

$$Q_0 = q_0 A = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}$$

半無限物体内の温度分布





表面熱流束一定の場合の非定常熱伝導

初期温度分布が一様で、表面の熱流束を、突然一定の値 Q_0/A にした場合を考える。初期条件、境界条件は

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_i \\ \left. \frac{Q_0}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} & \quad (\tau > 0) \end{aligned}$$

この場合の解は

$$T - T_i = \frac{2q_0 \sqrt{\alpha\tau / \pi}}{kA} \exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{kA} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$



対流がある場合の非定常熱伝導問題

半無限物体表面で対流がある場合の境界条件:

$$hA(T_{\infty} - T)_{x=0} = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$$

この問題に対する解は

$$\frac{T - T_i}{T_{\infty} - T_i} = 1 - \operatorname{erf}X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right) \right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right) \right]$$

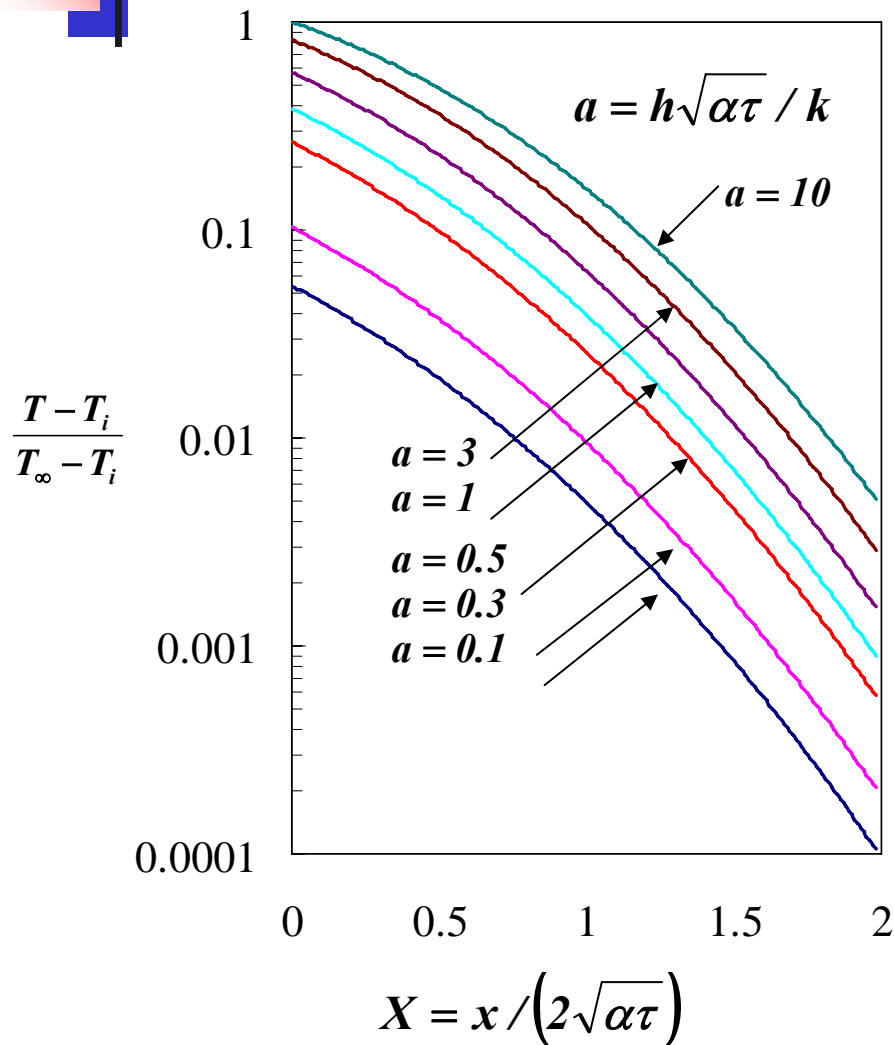
ここで、

$$X = x / (2\sqrt{\alpha\tau}), \quad a = h\sqrt{\alpha\tau} / k$$

T_i = 物体の初期温度

T_{∞} = 周囲の流体温度

表面で熱伝達が行われるときの 半無限物体内の温度分布



対流がある場合の非定常熱伝導問題

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \text{erf}X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right) \right] \left[1 - \text{erf}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right) \right]$$

物体の大きさが無視できる場合の解法

— 集中定数系近似 —

表面積: A 体積: V の物体表面からの移動熱流束を、

$$Q = hA(T - T_\infty) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau}$$

と集中定数近似し、境界条件: $\tau = 0$ において、 $T = T_0$ とすると

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left(\frac{hA}{c\rho V}\right)t}$$

が得られる。いま、物体の代表長さを s で表すと、無次元数

$$\text{ビオ一数: } Bi \equiv \frac{hs}{k} = \frac{hs \cdot sT}{k \cdot sT} = \frac{hs^2 T}{ks^2 \left(\frac{T}{s}\right)} = \frac{[\text{熱伝達による移動熱量}(W)]}{[\text{熱伝導による移動熱量}(W)]}$$

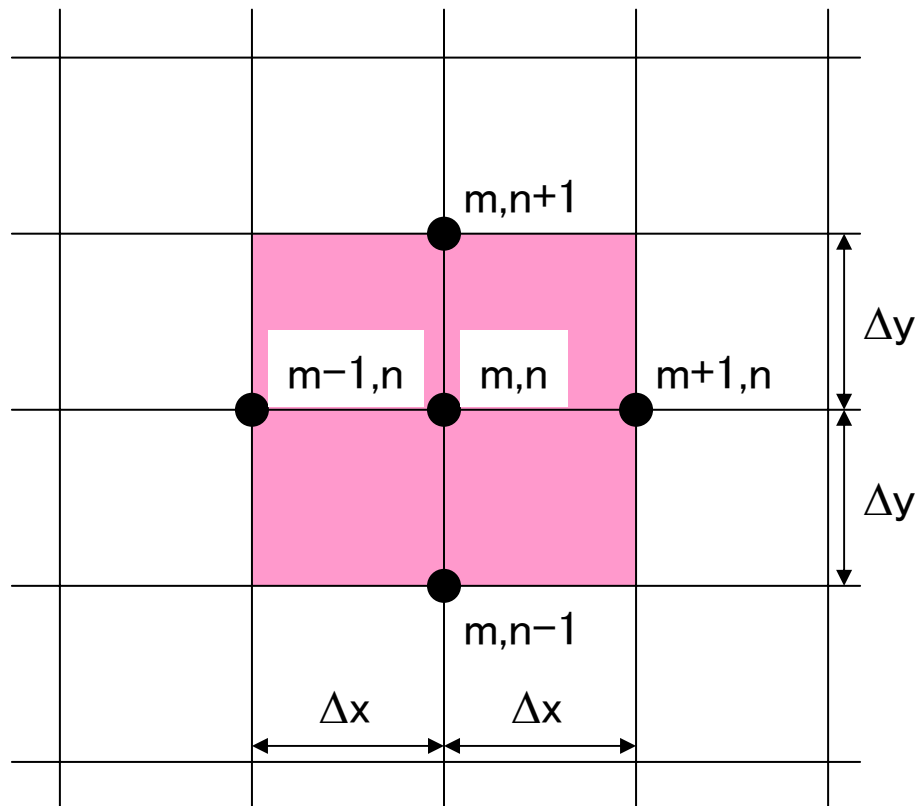
$$\text{フーリエ数: } Fo \equiv \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho cs^2} = \frac{k\tau \cdot s\Delta T}{(\rho s^3)c \cdot \Delta T} = \frac{[\text{熱伝導による移動熱量}(J)]}{[\text{保有熱量}(J)]}$$

が定義され、これによって、熱流束の時定数が表される。

$$\frac{hA}{\rho cV} \tau = \frac{h}{\rho cs} \tau = \frac{hs}{k} \frac{k}{\rho cs^2} \tau = Bi \cdot Fo$$

非定常問題の数値解法

2次元物体を微小要素に分割する。mはx座標を、nはy座標を表す。





差分近似

微分方程式

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

2階の偏微分の近似式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} (T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2} (T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1})$$

時間偏微分の近似式

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau}$$



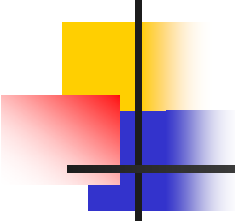
差分方程式

非定常熱伝導方程式に対する差分式

$$\frac{T_{m+1,n}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m-1,n}^p}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m,n-1}^p}{\Delta y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau}$$


$\Delta x = \Delta y$ として $T_{m,n}^{p+1}$ について解くと、

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + \left[1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \right] T_{m,n}^p$$



熱伝導とフーリエ級数ならびにその数値処理

- 伝熱工学的知識の吸収から・・・
↓
- 熱伝導の物理的意味
- フーリエの法則の意味するところ
- 熱伝導方程式の有用性の実体験
- 数学知識の有効性の実体験
- フーリエ級数の起源について
- 計算機を用いた数値処理の実体験
- より高度な数値処理や数値解析への導入
↓
- ……数値解析的応用への展開



レポート課題

- 幅 $2X$ 、初期温度 T_a の物体が、瞬時に壁温 T_w の無限平板にはさまれたとする。奥行きならびに高さ方向の温度変化を無視し、1次元 x 方向の温度変化のみを考慮することとし、温度拡散係数を α とする。この時刻以降における、この無限平板内での温度分布の時間変化を記述するための理論式を導出しなさい。
- 提出期限：平成22年6月10日(木)まで
- 提出場所：第三エリアA棟2階事務室レポート提出ボックス

(注意事項)

- レポート作成にあたっては、以下の内容を含むよう留意すること。
 - ・ レポートのタイトル、所属・学年・学籍番号・氏名
 - ・ 問題についての説明(自分の理解・問題設定として)
 - ・ 資料・情報の出典(もしあれば)

板の非定常熱伝導問題

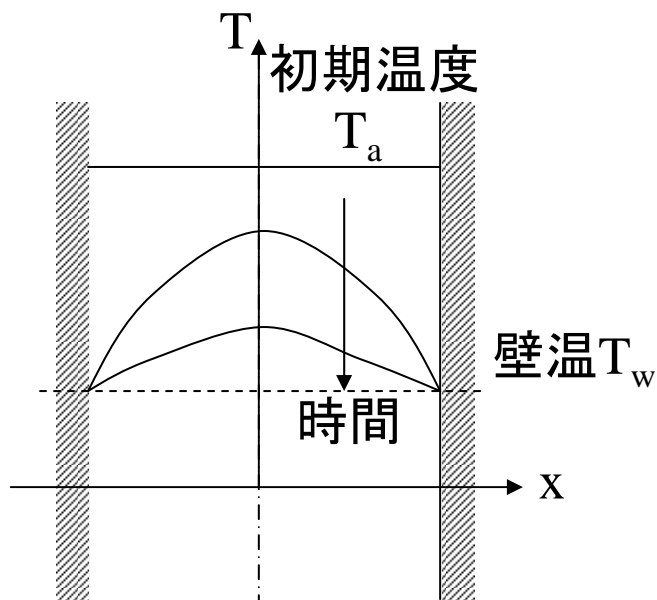


Fig.1

初期温度 T_a の物質が幅 $2X$ 、壁温 T_w の無限平板に挟まれているとする時、この物質の温度 $T(t,x)$ は以下の熱伝導方程式によって記述される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{-----} \quad (1)$$

ただし $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad \text{-----} \quad (2)$

ここで

α : 温度拡散率 (m^2 / s)

λ : 熱伝導率 ($W / m \cdot K$)

ρ : 密度 (kg / m^3)

C_p : 定圧比熱 ($J / kg \cdot K$)



非定常熱伝導の極限-水蒸気爆発-

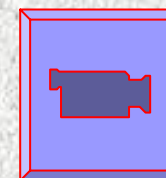
横浜国立大学(飯田、高島)特命リサーチ200X 「謎の大爆発はなぜ起こったか」

スズを用いた蒸気爆発実験

1kg、800°Cのスズを水槽内に落下

⇒ 時間遅れを伴って蒸気爆発が発生

VTR

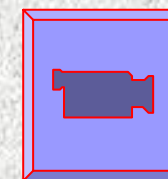


アルミニウムを用いた蒸気爆発実験

25kgの溶融アルミニウムを6m下の水槽内に落下

⇒ 水槽を破壊する規模の激しい蒸気爆発が発生

VTR

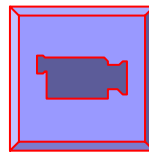


ALPHA実験

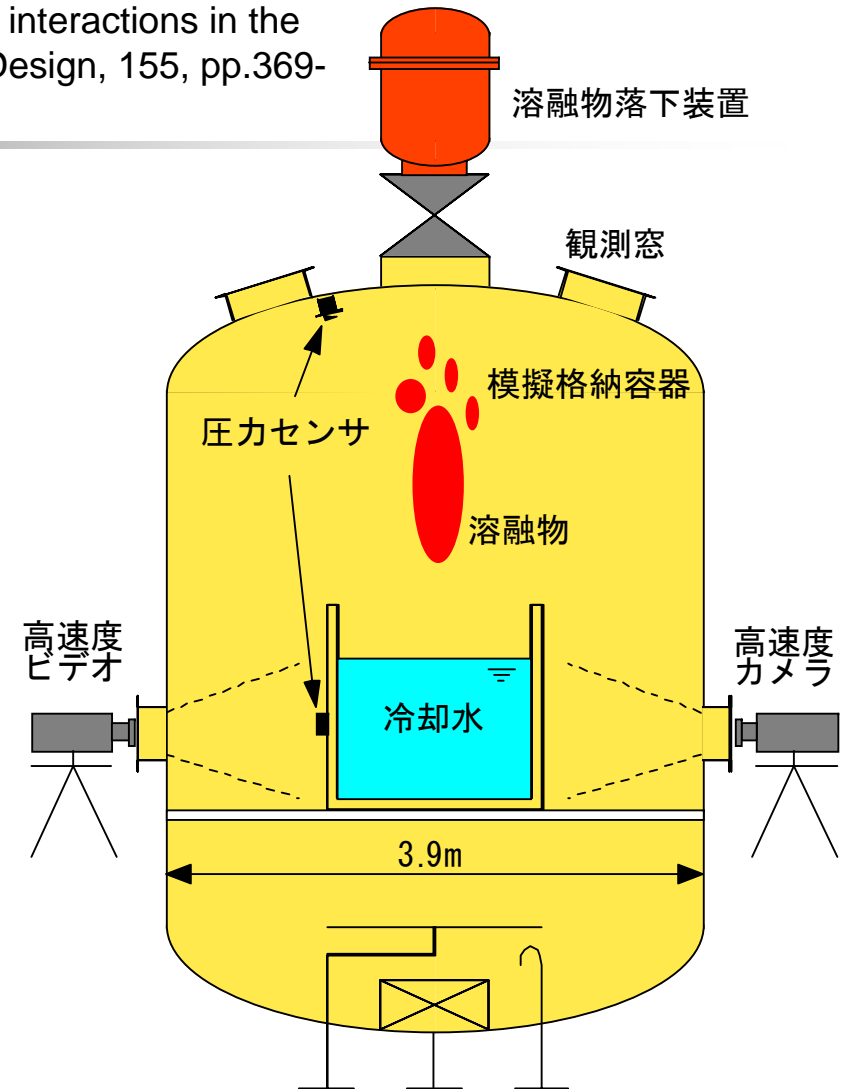
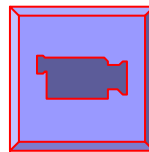
N. Yamano, Y. Maruyama, T. Kudo, A. Hidaka, J. Sugimoto,
“Phenomenological studies on melt – coolant interactions in the
ALPHA program”, Nuclear Engineering and Design, 155, pp.369-
389, (1995)

観測結果

1. STX018 ⇒

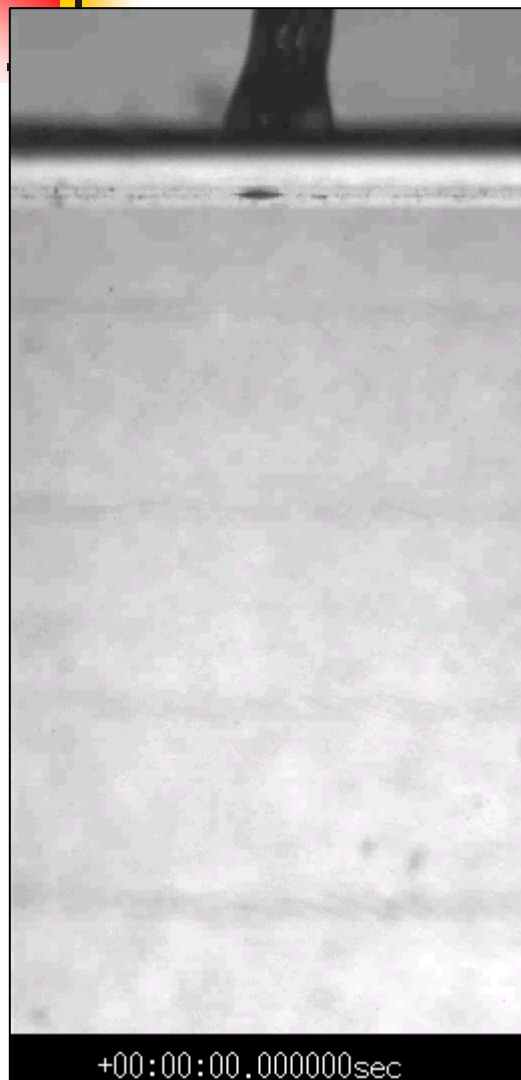


2. STX022 ⇒

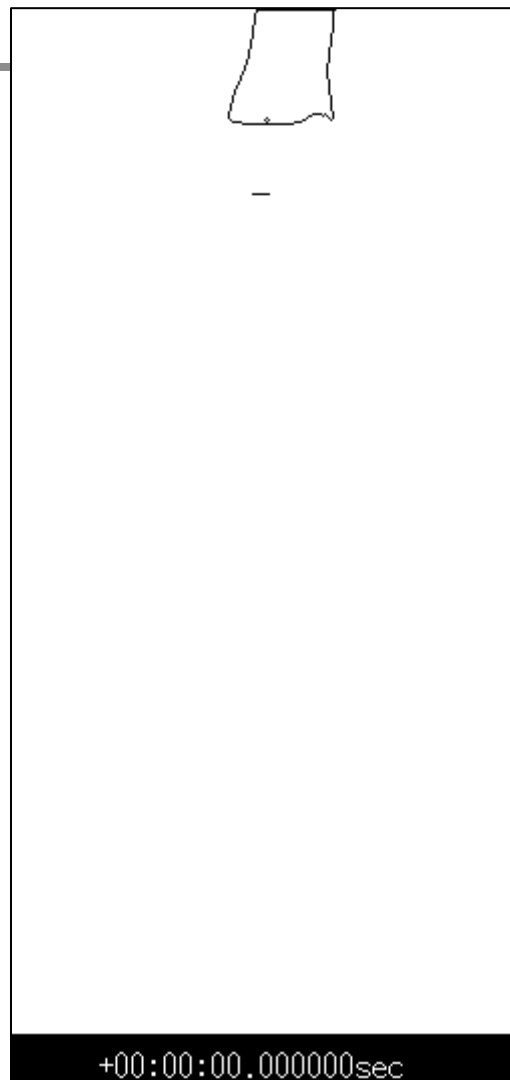


水蒸気爆発実験 (溶融錫→水 投入実験)

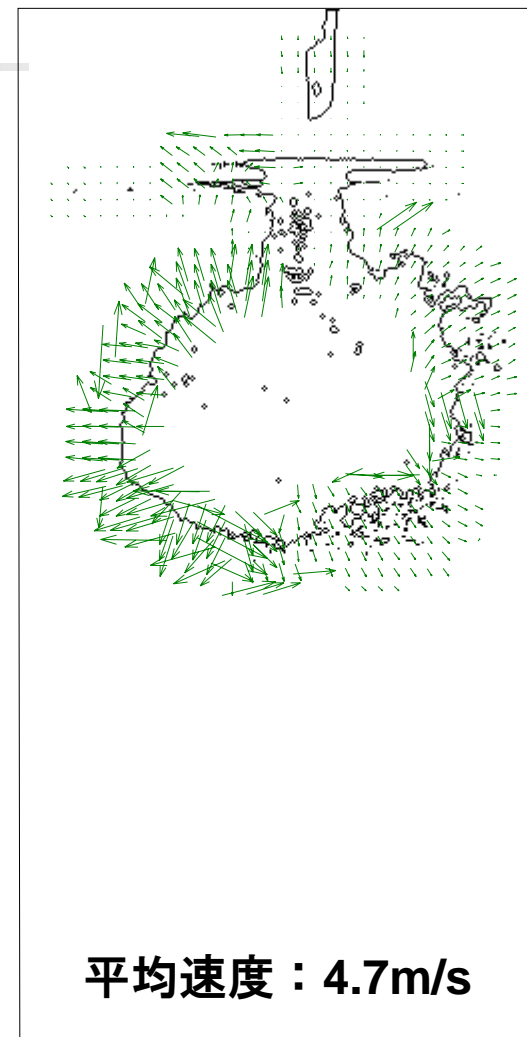
観測画像



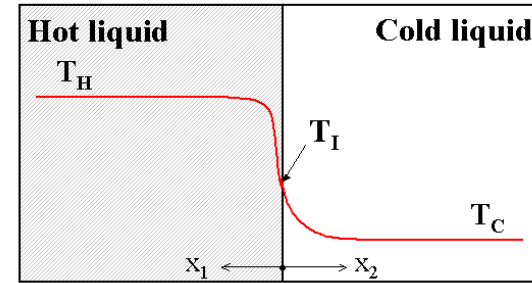
輪郭抽出画像



PIV解析結果



水蒸気爆発を記述する式： 均質核生成モデル



Explosion criterion: $T_I > T_{HN}$

- 1次元非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- 初期条件と境界条件

$$T = T_o \quad (t = 0)$$

$$T = T_s \quad (x = 0)$$

$$T = T_o \quad (x = \infty)$$

- 半無限物体内温度は、

$$T = T_s + (T_o - T_s) \text{erf}(\eta)$$

- 2つの半無限物体が接触した接触後のそれぞれの温度分布は

$$T_H(x,t) = T_I + (T_H - T_I) \text{erf} \left(\frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_H t}} \right)$$

$$T_C(x,t) = T_I + (T_C - T_I) \text{erf} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{\alpha_C t}} \right)$$

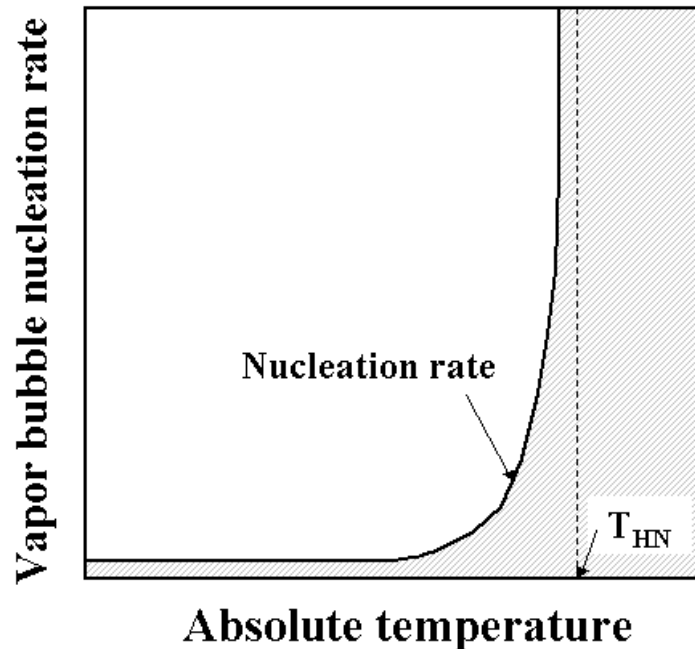
- 接触界面での熱流束が連続とすると、

$$-\lambda_H \left(\frac{\partial T_H(x,t)}{\partial x_1} \right) = \lambda_C \left(\frac{\partial T_C(x,t)}{\partial x_2} \right)$$

- 接触界面温度は次のように求まる。

$$T_I = \frac{T_H - T_C}{1 + \sqrt{\beta}} + T_C \quad \beta = \frac{(\rho C_p \lambda)_C}{(\rho C_p \lambda)_H}$$

均質核生成温度: T_{HN}



液体同士の伝熱面のように**気泡核が存在しない**とき、低温液体側が飽和温度以上にまで加熱されていき、**自発的に核が生成**され、瞬間的に激しく気泡が発生する温度

Lienhardの半理論式より

$$T_{HN} = T_{SAT} + \left(0.905 - \vartheta_{SAT} + 0.095\vartheta_{SAT}^8\right)T_{CRIT}$$

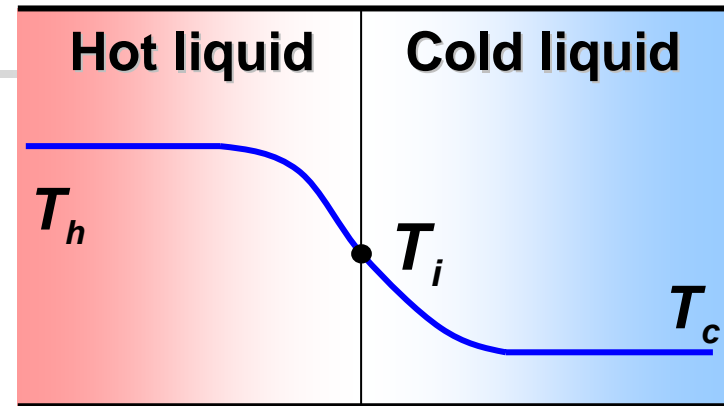
$$\vartheta_{SAT} = \frac{T_{SAT}}{T_{CRIT}}$$

大気圧下での水の均質核生成温度は、 $T_{HN} = 315.6$ [°C]

水蒸気爆発の発生条件(TIZ)

[接触界面温度 T_i] \geq [水の均質核生成温度 T_{hn} (314°C)]

- 接触界面温度 T_i が均質核生成温度 T_{hn} 以上の場合、界面において蒸気が瞬間的に生成され、蒸気爆発に至る可能性がある。

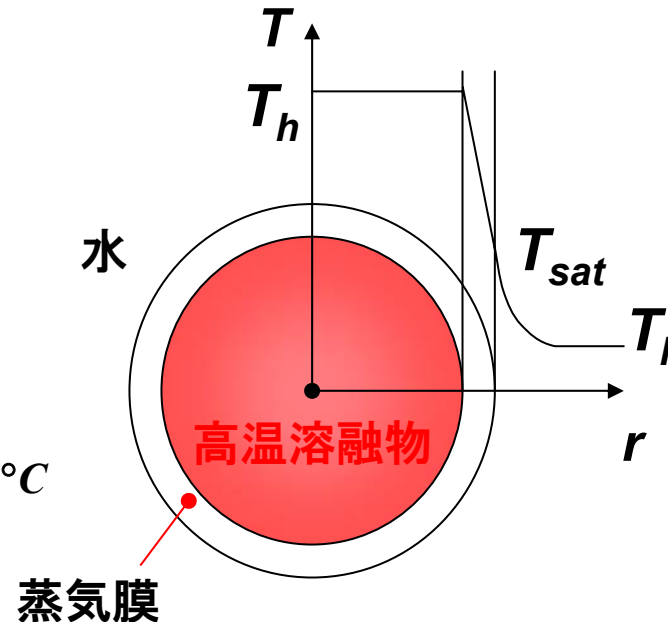


接触界面温度

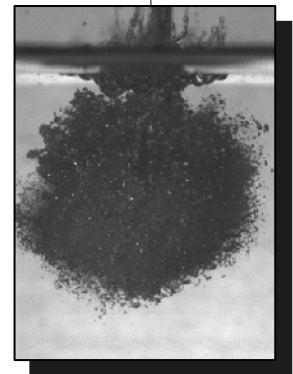
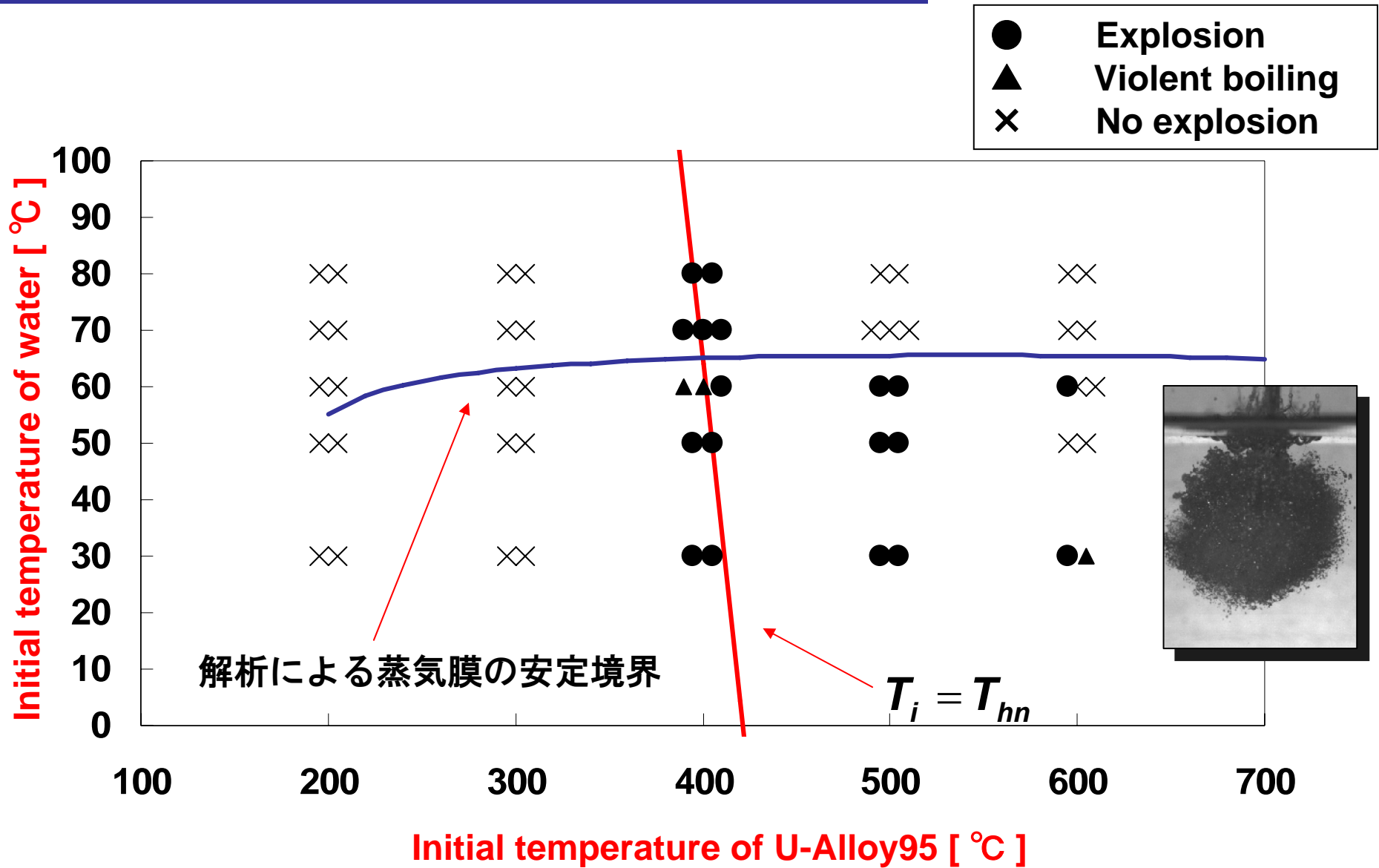
$$T_i = \frac{T_h - T_c}{1 + \sqrt{\frac{(\rho c_p \lambda)_c}{(\rho c_p \lambda)_h}}} + T_c$$

水の均質核生成温度(314°C)

$$T_{HN} = T_{SAT} + (0.905 - \vartheta_{SAT} + 0.095\vartheta_{SAT}^8) T_{CRIT} \Rightarrow 315.6^\circ\text{C}$$

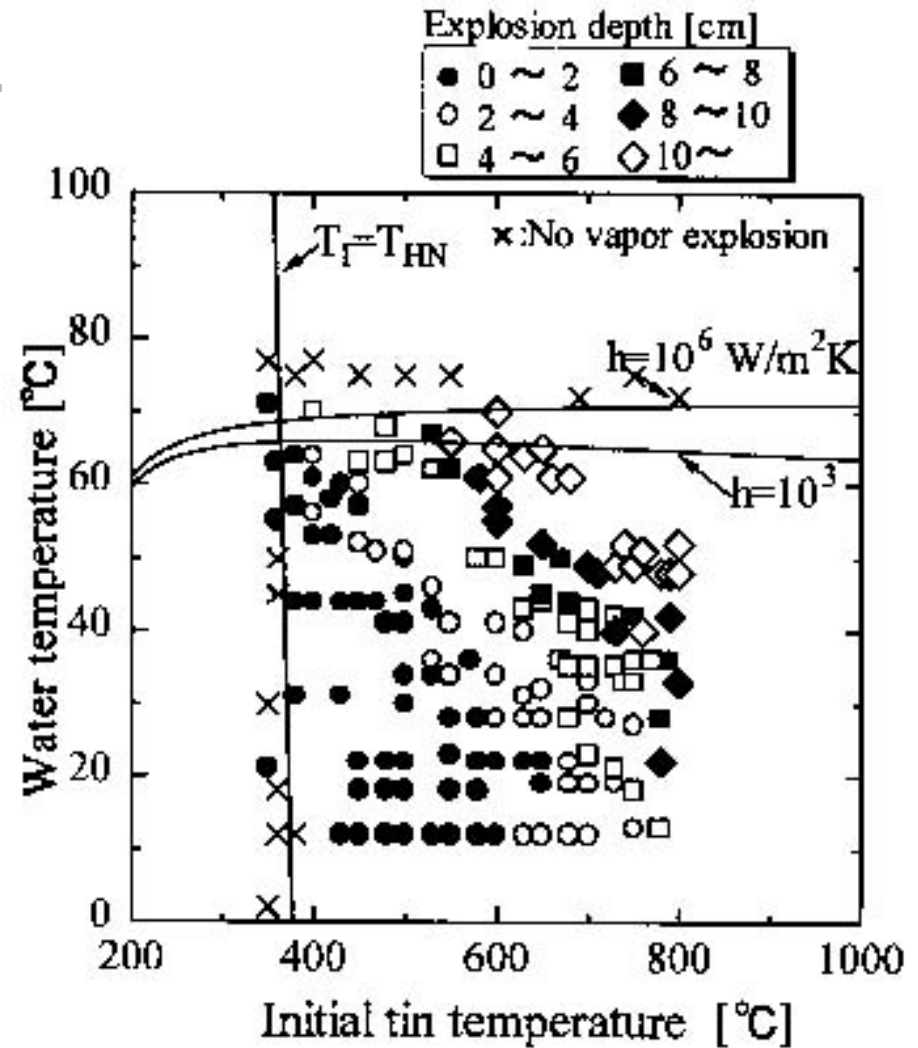
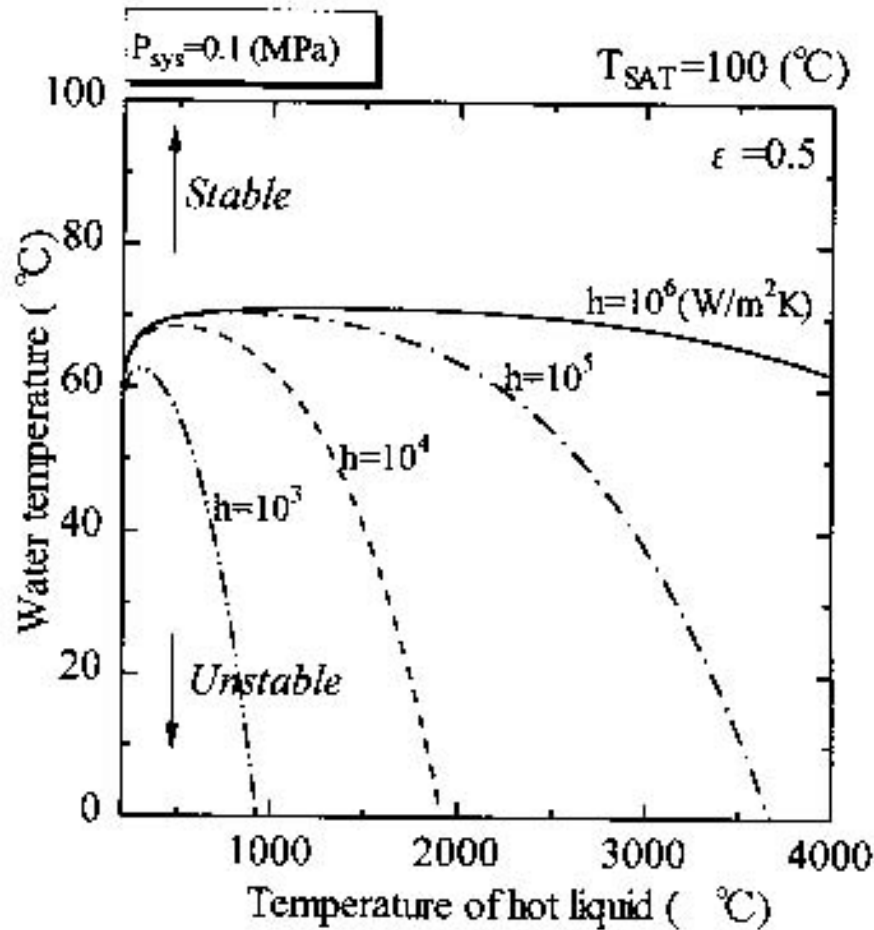


蒸気爆発実験結果とTIZの比較



水蒸気爆発の発生条件

成合, 松村, “各種条件下における自発的蒸気爆発の発生条件”,
蒸気爆発の動力学, 研究成果報告書 (1997)





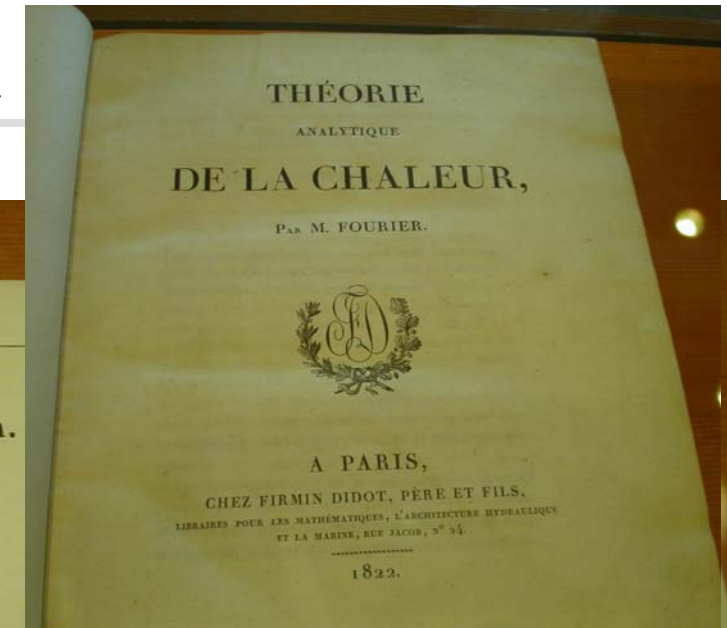
ジャン・バティスト・ジョセフ・フーリエ(1768-1839)

金沢工業大学「工学の曙文庫」蔵

ジャン・バティスト・ジョセフ・フーリエ著「熱の理論的解析」初版本

Fourier, Jean Baptiste Josef, Baron de. (1768-1839)
Théorie Analytique de la Chaleur. Paris, 1822, First edition.

ジャン・バティスト・ジョセフ・フーリエ (1768-1839)
熱の解析的理論, パリ, 1822年, 初版.



フーリエはナポレオンの同僚でエジプト総督だったが、また固体中の熱伝導を研究した数学者でもあった。彼は固体の中の熱伝導が非常に複雑な現象であって、二点間の温度差、熱伝導率、固体の形態など様々な要因によることを発見した。彼はこの問題を解く為に新しい数学的解析法を考案した。それは、どんな複雑な現象でも単純な個別現象の複合と考えられ、どんな複雑な周期振動や関数でも単純な正規運動や単純な関数の重畳したものとして解けるというものであった。彼はどんな関数でも正弦と余弦の関数の一次式として級数に展開できることを示した。彼は複雑な熱伝導を偏微分方程式に表わし、それをこの方法で解き、移動する熱量は温度差（温度勾配）に比例し、その物資の熱伝導率に依存するという熱伝導法則を確立した。現在この級数、展開の方法や熱伝導の法則はいづれもフーリエ級数、フーリエ変換、フーリエの法則と呼ばれている。本書はこれらの研究の初版である。



理論解析の回答例

板の非定常熱伝導問題

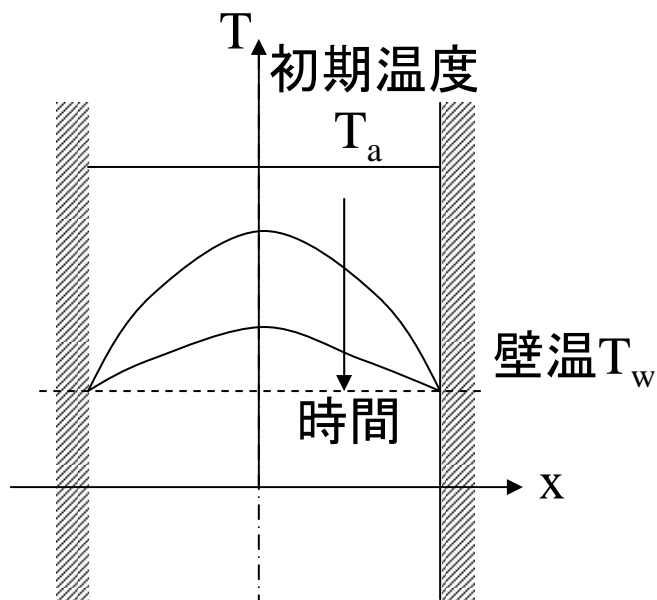


Fig.1

初期温度 T_a の物質が幅 $2X$,壁温 T_w の無限平板に挟まれているとする時、この物質の温度 $T(t,x)$ は以下の熱伝導方程式によって記述される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{-----} \quad (1)$$

ただし $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad \text{-----} \quad (2)$

ここで

α : 温度拡散率 (m^2 / s)

λ : 熱伝導率 ($W / m \cdot K$)

ρ : 密度 (kg / m^3)

C_p : 定圧比熱 ($J / kg \cdot K$)

板の非定常熱伝導(1/15)

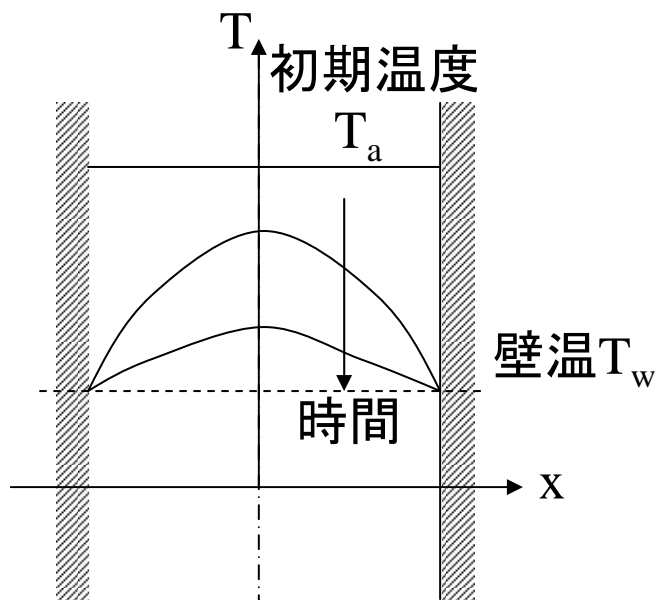


Fig.1

初期温度 T_a の物質が幅 $2X$,壁温 T_w の無限平板に挟まれているとする時、この物質の温度 $T(t,x)$ は以下の熱伝導方程式によって記述される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{-----} \quad (1)$$

ただし $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad \text{-----} \quad (2)$

α : 温度拡散率(m^2 / s)

λ : 熱伝導率($W / m \cdot K$)

ρ : 密度(kg / m^3)

C_p : 低圧低圧比熱($J / kg \cdot K$)



板の非定常熱伝導(2/15)

初期条件としては、 $t = 0$ において $T(0, x) = T_a$ ——— (3)

境界条件としては、
$$\left. \begin{array}{l} x = -X \quad \text{において} \quad T(t, -X) = T_w \\ x = X \quad \text{において} \quad T(t, X) = T_w \end{array} \right\} \text{————— (4)}$$



板の非定常熱伝導(3/15)

今、簡単の為に変数変換を行う

$$T^* = \frac{T(t, x) - T_w}{T_a - T_w} \quad (5)$$

(5)式より

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (T_a - T_w) \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_a - T_w) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}$$

よって(1)式は
$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} \quad (6)$$

また、(3)式の初期条件は

$$T^*(0, x) = 1 \quad (7)$$

(4)式の境界条件は

$$T^*(t, -x) = T^*(t, x) = 0 \quad (8)$$



板の非定常熱伝導(4/15)

今、温度 $T^*(t,x)$ が時間のみの関数 $\theta(t)$ と位置のみの関数 $X(x)$ の積によって表せるものと仮定する、即ち、

$$T^*(t,x) = \theta(t) \cdot X(x) \quad \text{————— (9)}$$

(9)式より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t} &= \frac{d\theta}{dt} \cdot X \\ \frac{\partial T^*}{\partial x} &= \theta \frac{dX}{dx}, \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \theta \frac{d^2 X}{dx^2} \end{aligned} \right\} \text{————— (10)}$$

(6)式、(10)式より、

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} \cdot X &= \alpha \cdot \theta \frac{d^2 X}{dx^2} \\ \frac{1}{\alpha\theta} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad \text{————— (11)} \end{aligned}$$



板の非定常熱伝導(5/15)

(11)式の左辺は t のみの関数であり、(11)式の右辺は x のみの関数であるから、(11)式が成り立つ為には、両者は t, x いずれからも独立な定数でなければならない。この定数のうち物理的に意味のあるものは、負の定数であるから、これを $-P^2(P>0)$ とおくことにすると、(11)式は、以下の2つの常微分方程式となる。

$$\frac{d\theta}{dt} + P^2 \alpha \theta = 0 \quad \text{————— (12)}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + P^2 X = 0 \quad \text{————— (13)}$$



板の非定常熱伝導(6/15)

(12)式的一般解は、

$$\int \frac{d\theta}{\theta} = -P^2\alpha \int dt$$

より、

$$\ln \theta = -P^2\alpha t + A'$$

$$\theta = e^{-P^2\alpha t + A'} = e^{-P^2\alpha t} \cdot e^{A'}$$

$$\theta(t) = Ae^{-P^2\alpha t} \quad \text{—————} \quad (14)$$

また(13)式的一般解は、

$$X(x) = B \sin(Px) + C \cos(Px) \quad \text{—————} \quad (15)$$



板の非定常熱伝導(7/15)

(14)式、(15)式より、(9)式は、

$$T^*(t, x) = A \cdot e^{-P^2 \alpha t} \{B \sin(Px) + C \cos(Px)\} \text{ ————— (16)}$$

(16)式は、 $x=0$ において左右対称でなければならないから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial x}(t, 0) &= A \cdot e^{-P^2 \alpha t} \{B \cdot P \cos(Px) - C \cdot P \sin(Px)\}_{x=0} \\ &= A \cdot e^{-P^2 \alpha t} \cdot B \cdot P = 0 \end{aligned}$$

$P > 0, e^{-P^2 \alpha t} > 0$, かつ $A=0$ は有意な解ではないから、

$$B = 0 \text{ ————— (17) でなければならない}$$



板の非定常熱伝導(8/15)

また(8)式より

$T^*(t, -X) = 0$ は、 $X(-x) = 0$ であり

$T^*(t, X) = 0$ は、 $X(x) = 0$ であるから

(15)式より

$$X(-x) = -B \sin(PX) + C \cos(PX) = 0$$

$$X(x) = B \sin(PX) + C \cos(PX) = 0$$

上記の2式を足し合わせると、 $2C \cos(PX) = 0$

有意な解であるためには、 $C \neq 0$ であり、

$\cos(PX) = 0$ でなければならないから

$$P_n = \frac{(2n-1)\pi}{2X} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \text{————— (18)}$$



板の非定常熱伝導(9/15)

(16),(17),(18)式より、 $D=AC$ とおくと(6)式の一般解は

$$T_n^*(t, x) = D_n e^{-P_n^2 \alpha t} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \text{—— (19)}$$

(19)式の線形結合により求める解が表わされる。即ち、

$$T^*(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-P_n^2 \alpha t} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \quad \text{—— (20)}$$

である。(20)式中の係数 D_n を初期条件(7)式を満足するように決定する。

$$\begin{aligned} T^*(0, x) = 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \\ &= D_1 \cos\frac{\pi x}{2X} + D_2 \cos\frac{3\pi x}{2X} + D_3 \cos\frac{5\pi x}{2X} + \dots \quad \text{—— (21)} \end{aligned}$$

板の非定常熱伝導(10/15)

(21)式の両辺に $\cos \frac{(2m-1)\pi}{2X}x$ を掛け、 $-X$ から X まで積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-X}^X \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2X} dx &= D_1 \int_{-X}^X \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2X} \cos \frac{\pi x}{2X} dx \\ &+ D_2 \int_{-X}^X \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2X} \cos \frac{3\pi x}{2X} dx \\ &+ D_3 \int_{-X}^X \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2X} \cos \frac{5\pi x}{2X} dx + \dots \quad \text{————— (22)} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{-X}^X \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2X} dx &= \left[\frac{2X}{(2m-1)\pi} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2X} \right]_{-X}^X \\ &= \frac{2X}{(2m-1)\pi} \left\{ \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} - \left(-\sin \frac{(2m-1)\pi}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{4X}{(2m-1)\pi} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} \\ &= \frac{4X \cdot (-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi} \quad \text{————— (23)} \end{aligned}$$

板の非定常熱伝導(11/15)

また右辺は、

(A) $m \neq n$ の時

$$\begin{aligned} \int_{-X}^X \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2X} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-X}^X \left\{ \cos \frac{\pi x(m+n-1)}{X} + \cos \frac{\pi(m-n)x}{X} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{X}{(m+n-1)\pi} \sin \frac{\pi x(m+n-1)}{X} + \frac{X}{(m-n)\pi} \sin \frac{\pi x(m-n)}{X} \right]_{-X}^X \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{X}{(m+n-1)\pi} \sin(m+n-1)\pi + \frac{X}{(m-n)\pi} \sin(m-n)\pi \right. \\ &\quad \left. - \left\{ -\frac{X}{(m+n-1)\pi} \sin(m+n-1)\pi - \frac{X}{(m-n)\pi} \sin(m-n)\pi \right\} \right] \\ &= \frac{X}{(m+n-1)\pi} \underbrace{\sin(m+n-1)\pi}_0 + \frac{X}{(m-n)\pi} \underbrace{\sin(m-n)\pi}_0 \equiv 0 \quad (24) \end{aligned}$$

板の非定常熱伝導(12/15)

(B) $m = n$ の時

$$\begin{aligned}
 \int_{-X}^X \cos\left\{\frac{(2m-1)\pi x}{2x}\right\} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right\} dx &= \int_{-X}^X \cos^2\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2X}\right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-X}^X \left[\cos\left\{2 \cdot \frac{(2n-1)\pi x}{2X}\right\} + 1 \right] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{X}{(2n-1)\pi} \sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{X}\right\} + x \right]_{-X}^X \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{X}{(2n-1)\pi} \{ \sin(2n-1)\pi + \sin(2n-1)\pi \} + \{ X - (-X) \} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{X}{(2n-1)\pi} 2 \sin(2n-1)\pi + 2X \right] = \frac{X}{(2n-1)\pi} \underbrace{\sin(2n-1)\pi}_{0} + X = X \quad \text{————— (25)}
 \end{aligned}$$

よって(22)式は(23),(24),(25)式より $m=n$ の時のみ

$$D_n = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \quad \text{————— (26)}$$

板の非定常熱伝導(13/15)

(20),(26)式より、(6)式の解は

$$T^*(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} e^{-P_n^2 \alpha t} \cos\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right\} \quad (27)$$

となる。(5)式より、

$$\frac{T - T_w}{T_a - T_w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4X^2} \alpha t} \cos\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right\} \quad (28)$$

または、

$$T = T_w + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4X^2} \alpha t} \cos\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right\} \quad (29)$$

ここで

$$a_1 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \quad (30) \quad F_0 = \frac{\alpha t}{X^2} : \text{フーリエ数} \quad (31)$$

とおくと、温度分布の時間変化を表わす式: $T(x, t)$

$$T = T_w + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \cos\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right\} \quad (32)$$

板の非定常熱伝導(14/15)

時刻 t における平均温度は次式によって定義される。

$$\bar{T} \equiv \frac{\int_{-X}^X T(t, x) dx}{\int_{-X}^X dx} \quad \text{————— (33)}$$

(32)式より

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \left[T_w + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \cos \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right\} \right] dx \\ &= \frac{1}{2X} \left[T_w \int_{-X}^X dx + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \int_{-X}^X \cos \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right\} dx \right] \\ &= \frac{1}{2X} \left\{ T_w [x]_{-X}^X + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \cdot \frac{2X}{(2n-1)\pi} \left[\sin \frac{(2n-1)\pi}{2X} x \right]_{-X}^X \right\} \\ &= T_w + (T_a - T_w) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2(n-1)}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \quad \text{————— (34)} \end{aligned}$$



板の非定常熱伝導(15/15)

よって、

$$\frac{\bar{T} - T_w}{T_a - T_w} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \quad (35)$$

上式は、

$$\frac{T_w - \bar{T}}{T_w - T_a} = \frac{8}{\pi^2} \left(e^{a_1 F_0} + \frac{1}{9} e^{-9a_1 F_0} + \frac{1}{25} e^{-25a_1 F_0} + \dots \right)$$

(32)式はFig.1に示す温度分布を表す式であり、

(35)式はこの温度分布をx方向に積分平均した値の変化を示すものである。

レポート回答例：理論解析結果

(20),(26)式より、(6)式の解は

$$T^*(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} e^{-P_n^2 \alpha t} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \quad (27)$$

となる。(5)式より、

$$\frac{T - T_w}{T_a - T_w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4X^2} \alpha t} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \quad (28)$$

または、

$$T = T_w + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4X^2} \alpha t} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \quad (29)$$

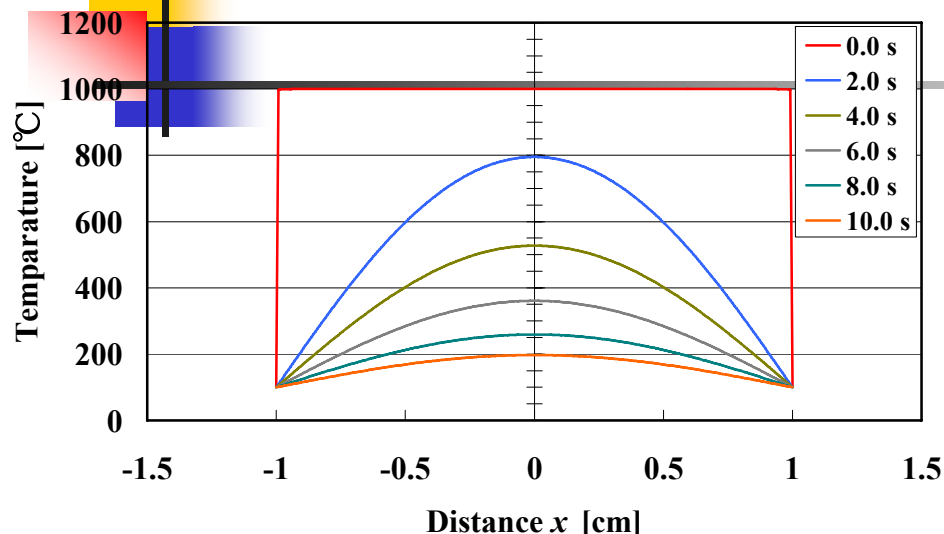
ここで

$$a_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (30) \quad F_0 = \frac{\alpha t}{X^2} : \text{フーリエ数} \quad (31)$$

とおくと、温度分布の時間変化を表わす式：T(x,t)

$$T = T_w + (T_a - T_w) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} e^{-(2n-1)^2 a_1 F_0} \cos\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2X} x\right\} \quad (32)$$

数値計算結果例



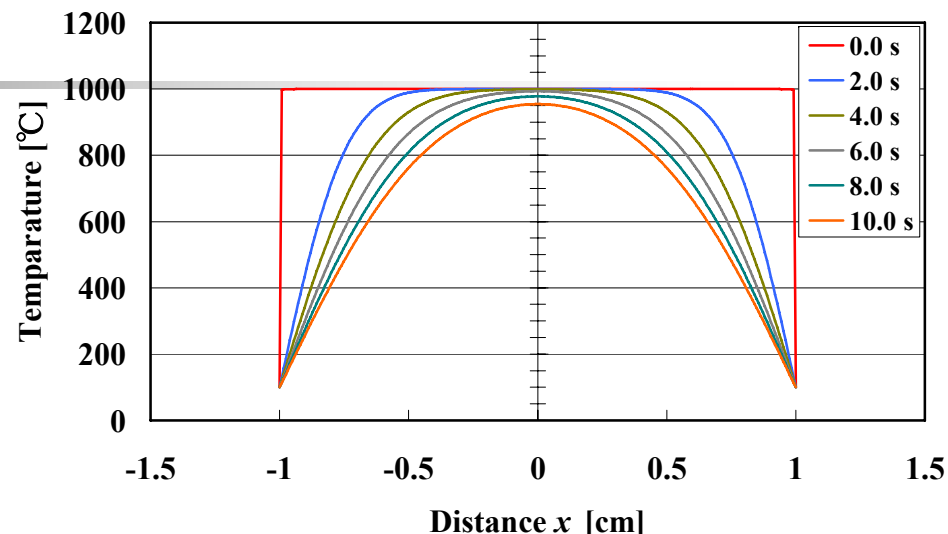
温度熱拡散係数: 10^{-5} [m²/s]

計算回数: 10000回

X方向の刻み幅: 0.008 [cm]



10^{-5} [m²/s]は、金属の温度熱拡散係数、鉄などの金属は、高温であっても、10秒後には殆ど冷えていることが分かる。



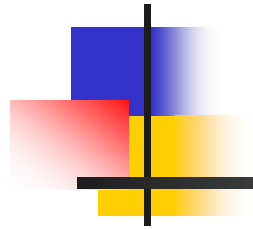
温度熱拡散係数: 10^{-7} [m²/s]

計算回数: 10000回

X方向の刻み幅: 0.008 [cm]



10^{-7} [m²/s]は、生体の温度熱拡散係数、例えばマグロなどは、10秒経過しても冷えているのは表面のみであることが分かる。



プログラムリスト

プログラムリスト例

```
//無限平板間の温度変化//
//2007.12.01

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

//初期設定項目//
#define X 1 //幅 [cm] (実際の幅は 2X)
#define Ta 1000 //初期温度 [°C]
#define Tw 100 //壁面温度 [°C]
#define M_PI 3.14159265358979323846264338327950288 //円周率

//program
//初期設定
int main(){
    FILE *sample;
    int no, n, xn, sn, DT1, DT2;
    double alpha, SIGMA, SIGMA_1, SIGMA_2, SIGMA_3;
    double x, t, m, T, dx, dt;

//グラフ出力条件決定
    printf("Q.1/4 温度拡散率  $\alpha$  を選択して下さい。  $1.0 \times 10^{-5}$  [m**2/s]、  

 $1.0 \times 10^{-7}$  [m**2/s] どちらかを選んで下さい。 ");
    scanf("%d", &no);
    if((no<1)||(no>2)){
        printf("Please select the specified number !%n");
        exit(1);
    }
    if(no==1){
        alpha = 0.1;
        sample = fopen("1e-5.csv", "w");
    }
    if(no==2){
        alpha = 0.01;
        sample = fopen("1e-7.csv", "w");
    }

    printf("Q.2/4 平板間距離は 2cm です。平板間距離を刻む数を入力して下さい。 %n [ 1~  

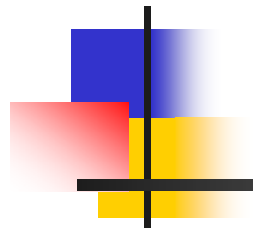
250 ] ");
    scanf("%d", &xn);
    if((xn<1)||(xn>250)){
        printf("Please select the specified number !%n");
        exit(1);
    }
    dx = 2.0 / xn;

    printf("Q.3/4  $\Sigma$ 内を何回計算するか。 %n [ 1~10000 ] ");
    scanf("%d", &sn);
    if((sn < 1) || (sn > 10000)){
        printf("Please select the specified number !%n");
        exit(1);
    }
}
```

```
printf(" Q.4/4 グラフ上に線は何本引きますか？。 %n [ 2~11 (整数で!) ] ");
scanf("%d", &DT1);
if((DT1 < 2) || (DT1 > 11)){
    printf("Please select the specified number !%n");
    exit(1);
}
DT2 = DT1 - 1;
dt = 10.0 / DT2;
```

//計算とグラフ出力

```
fprintf(sample, "%t, x, %n ");
fprintf(sample, " t, ");
for(x = -X; x <= X + dx; x += dx){
    fprintf(sample, "%f, ", x);
}
fprintf(sample, "%n ");
for(t = 0; t <= 10; t += dt){
    fprintf(sample, "%2.3f, ", t);
    for(x = -X; x <= X + dx; x += dx){
        SIGMA = 0;
        for(n = 1; n <= sn; n++){
            m = 2 * n - 1;
            SIGMA_1 = pow(-1, n-1) / m;
            SIGMA_2 = exp((-1) * alpha / 4 * t * pow((m *
M_PI / X), 2));
            SIGMA_3 = cos(m * M_PI * x / 2 / X);
            SIGMA += SIGMA_1 * SIGMA_2 * SIGMA_3;
        }
        T = Tw + (Ta - Tw) * 4 / M_PI * SIGMA;
        fprintf(sample, "%f, ", T);
    }
    fprintf(sample, "%n");
}
fclose(sample);
return 0;
}
```



計算結果例

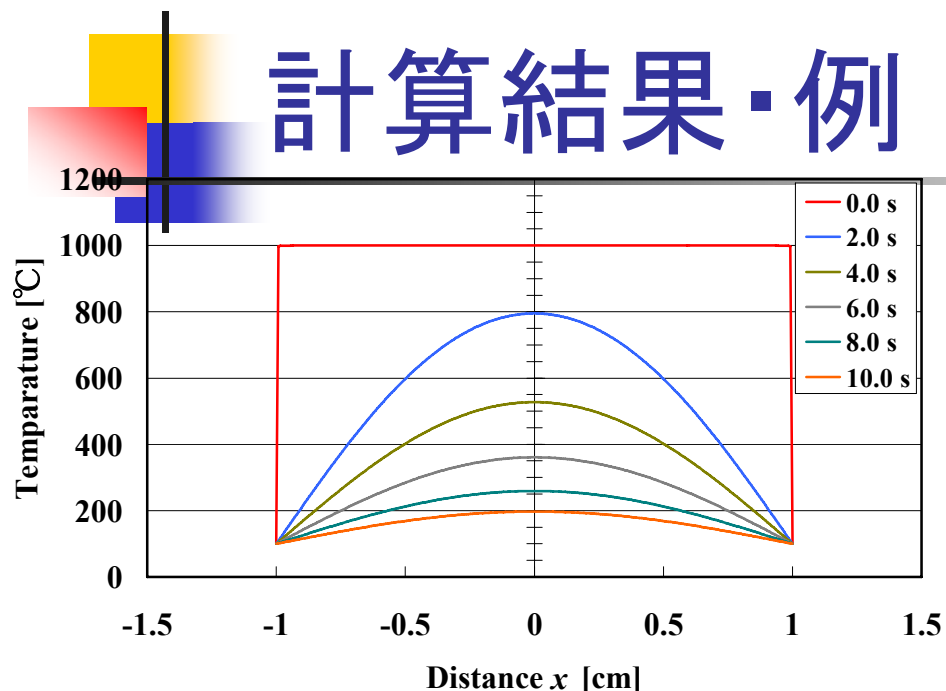


計算条件

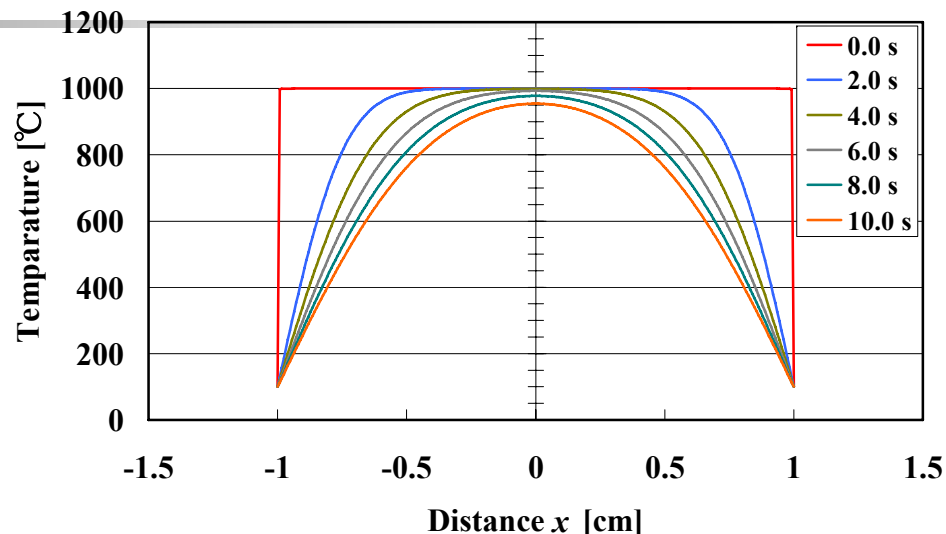
- $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$
 - Σ 内を10回、100回、1000回、10000回計算
 - それぞれ平板間距離を10、25、100、250個分割
- $\alpha = 1.0 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ のとき、
 - Σ 内を10回、100回、1000回、10000回計算
 - それぞれ平板間距離を10、25、100、250個分割

※ それぞれのグラフは2.0(sec)ごとの結果を出力する。

計算結果・例

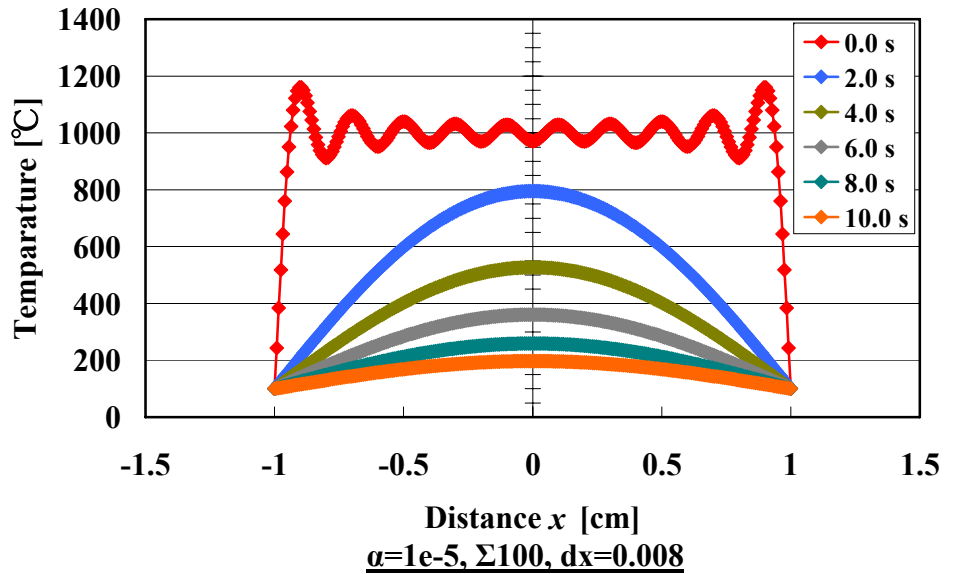
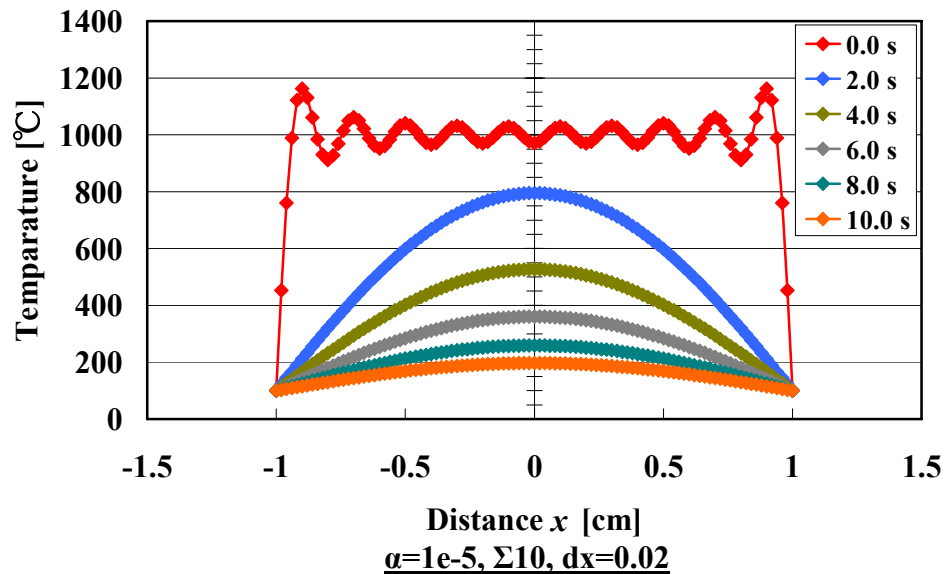
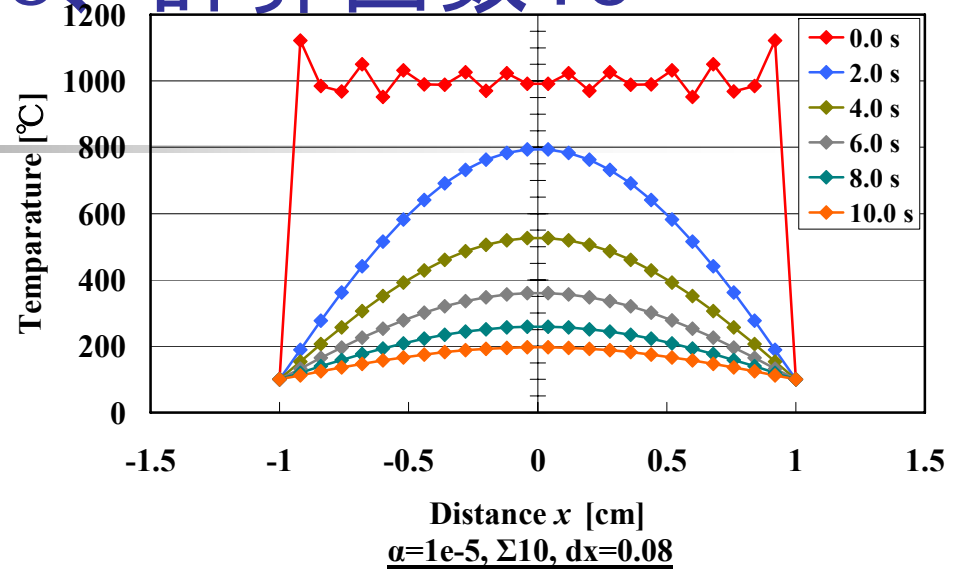
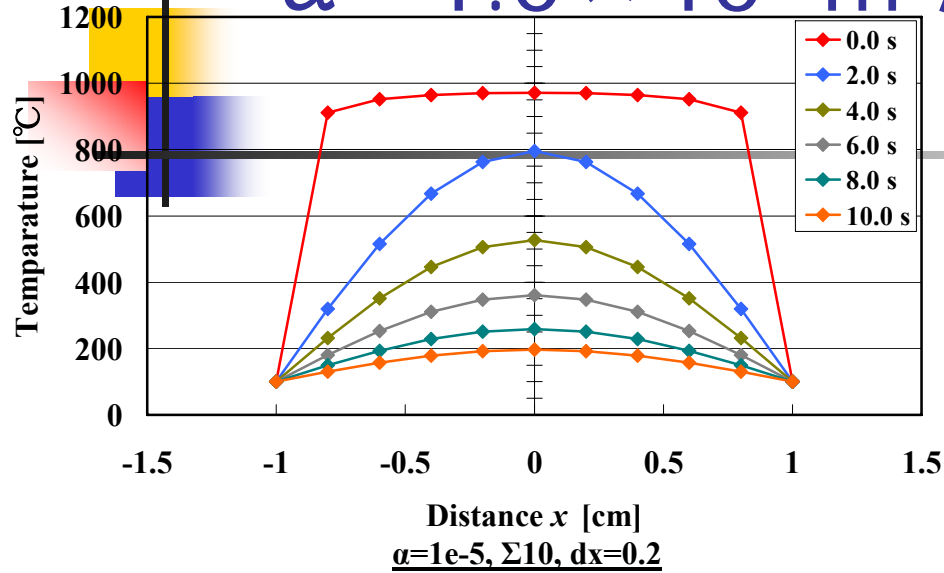


温度熱拡散係数: $10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s]}$
計算回数: 10000回
X方向の刻み幅: 0.008 [cm]

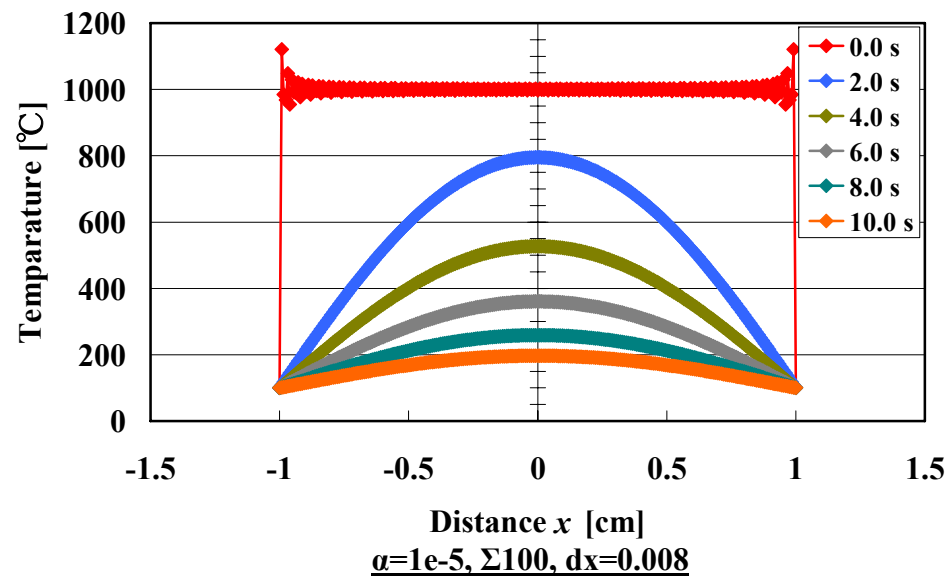
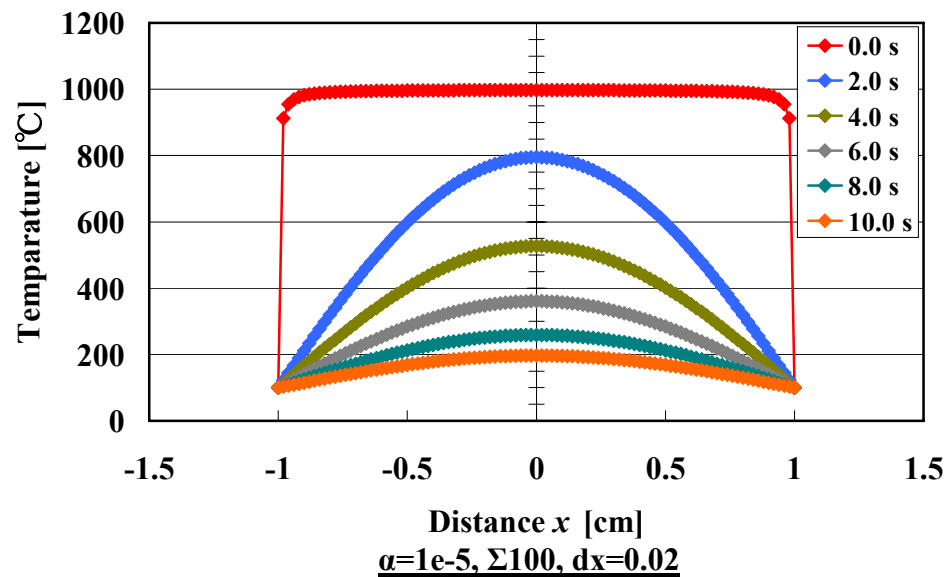
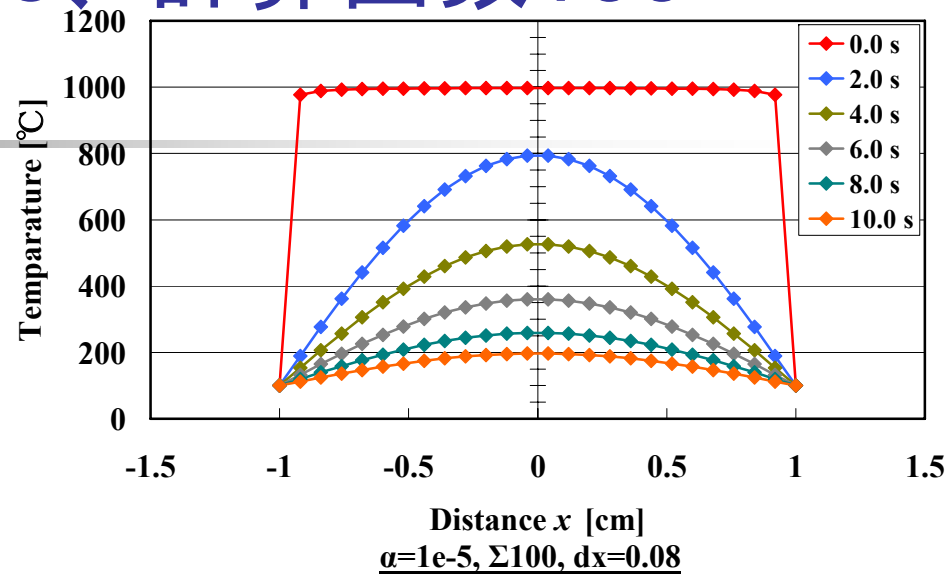
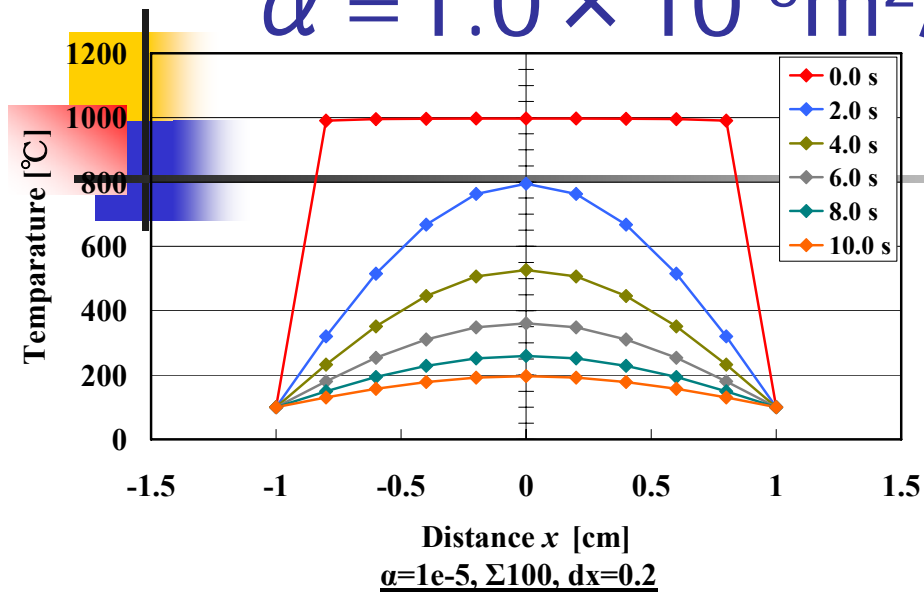


温度熱拡散係数: $10^{-7} \text{ [m}^2/\text{s]}$
計算回数: 10000回
X方向の刻み幅: 0.008 [cm]

$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 、計算回数10

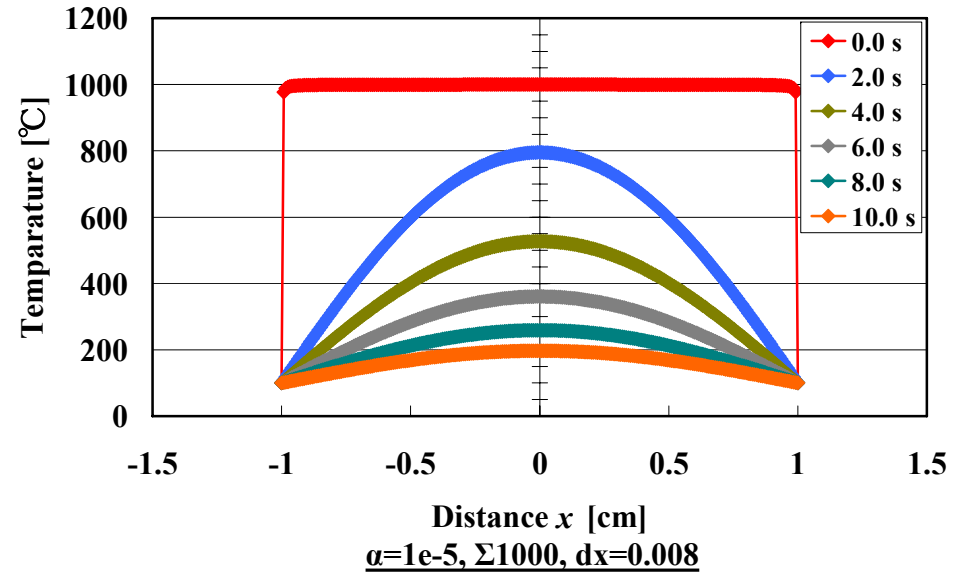
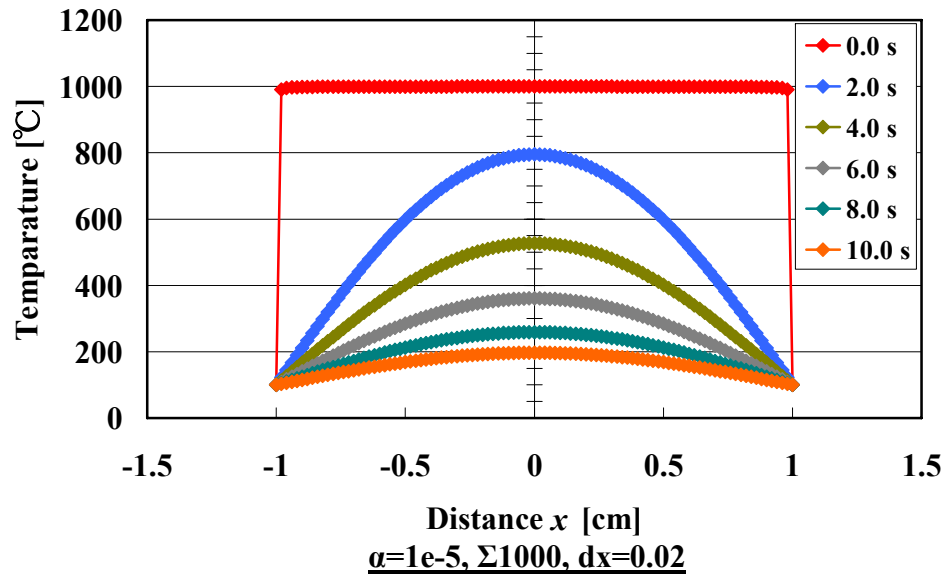
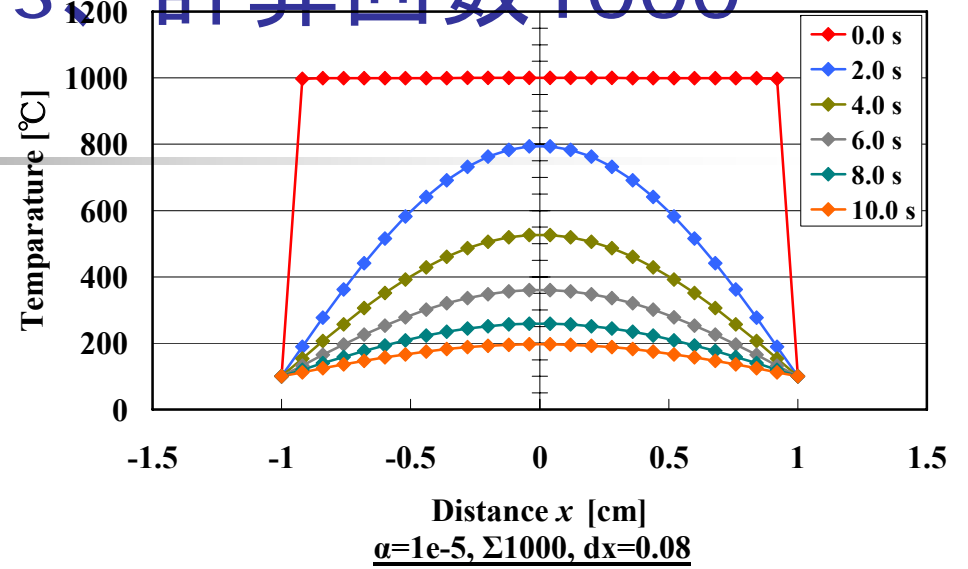
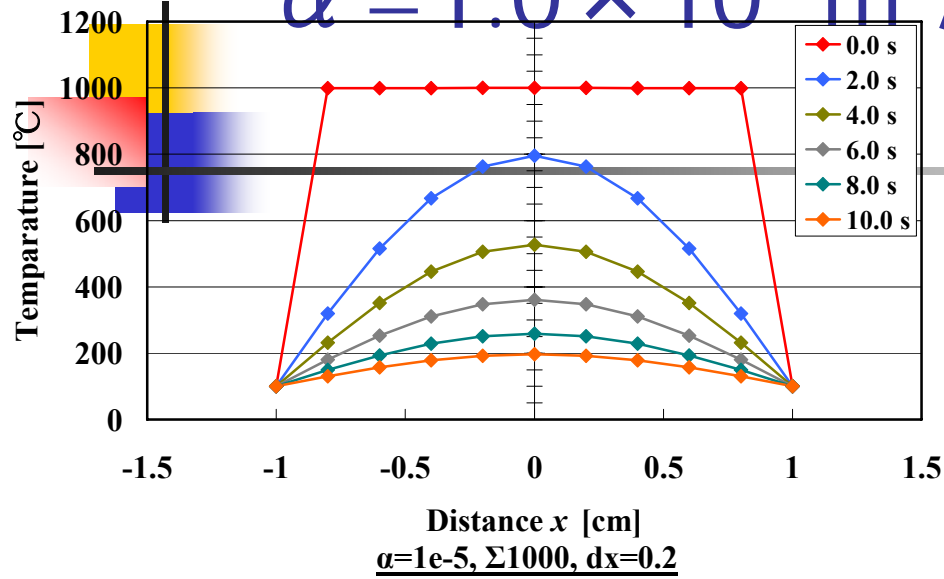


$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 、計算回数100



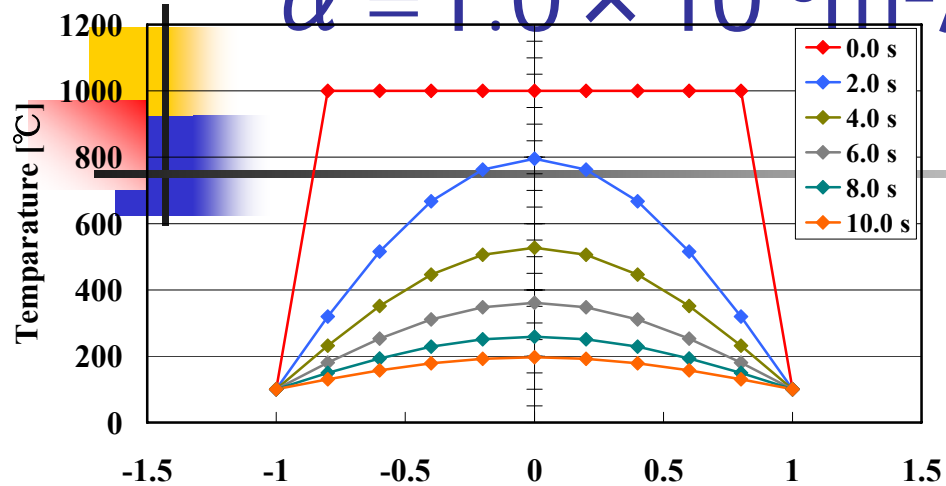
$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$

計算回数1000

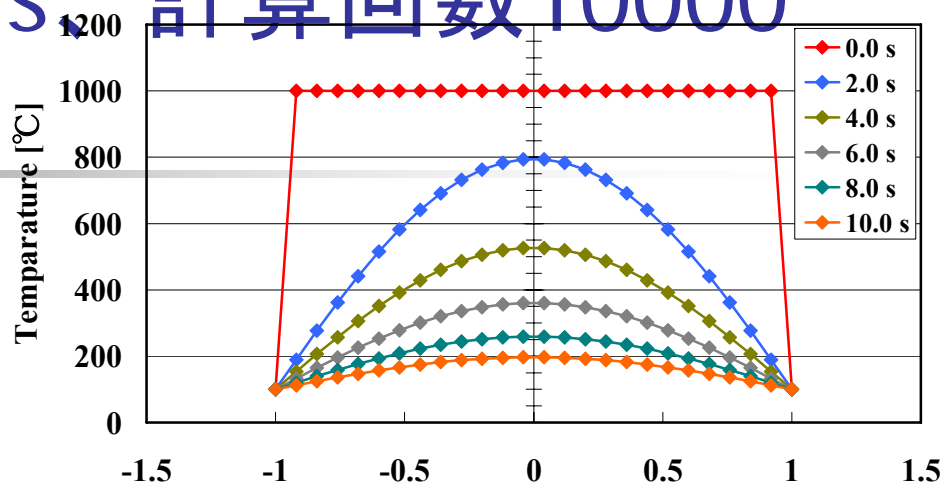


$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$

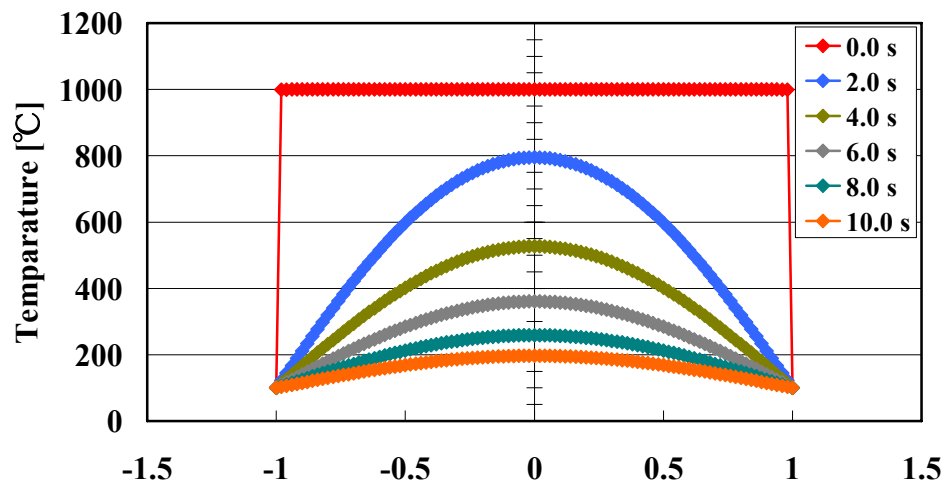
計算回数10000



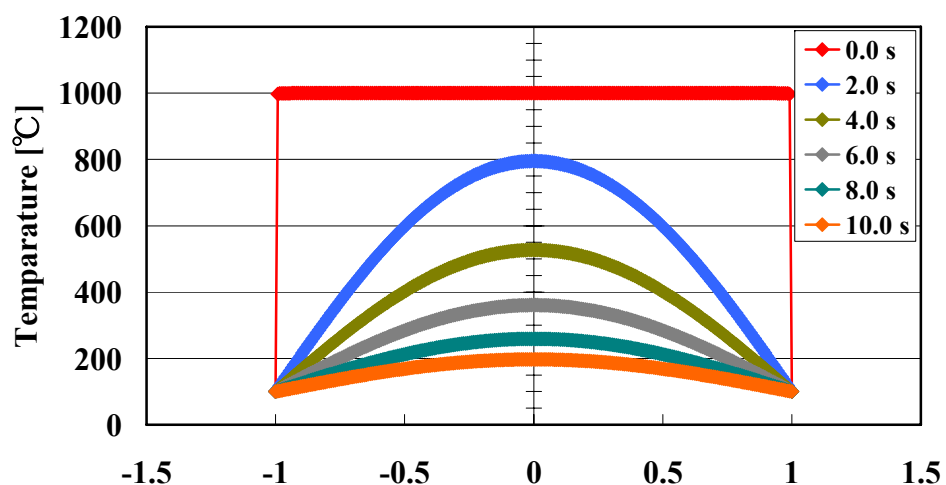
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-5, \Sigma 10000, dx = 0.2$



Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-5, \Sigma 10000, dx = 0.08$



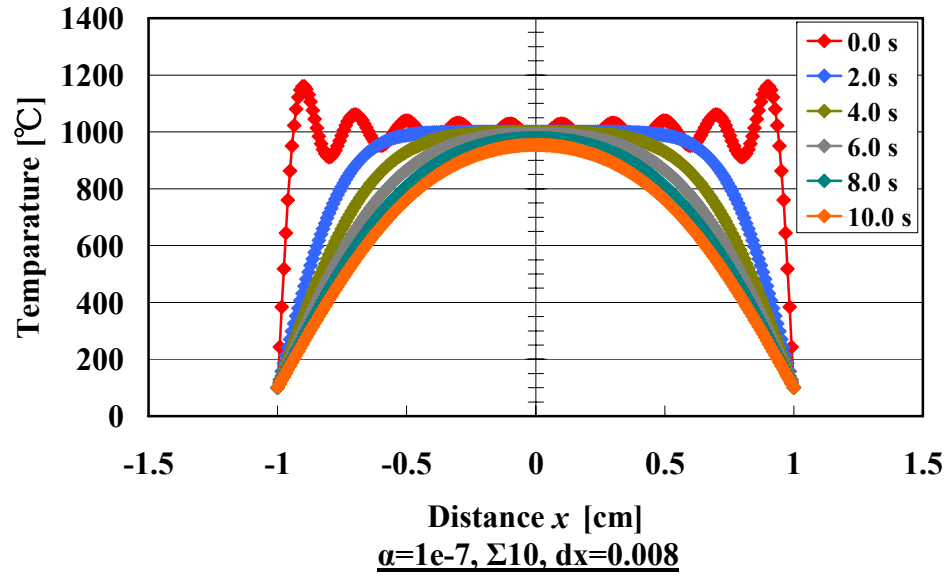
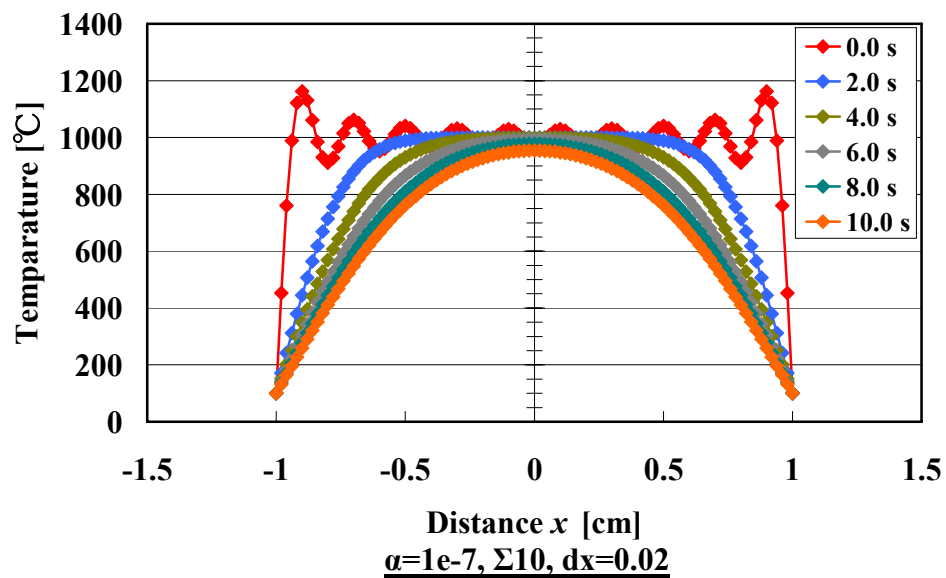
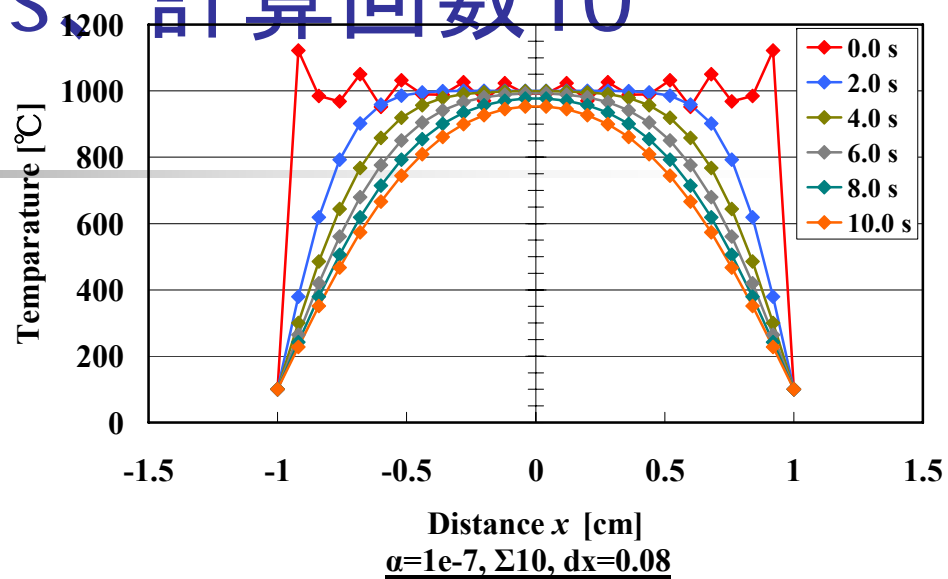
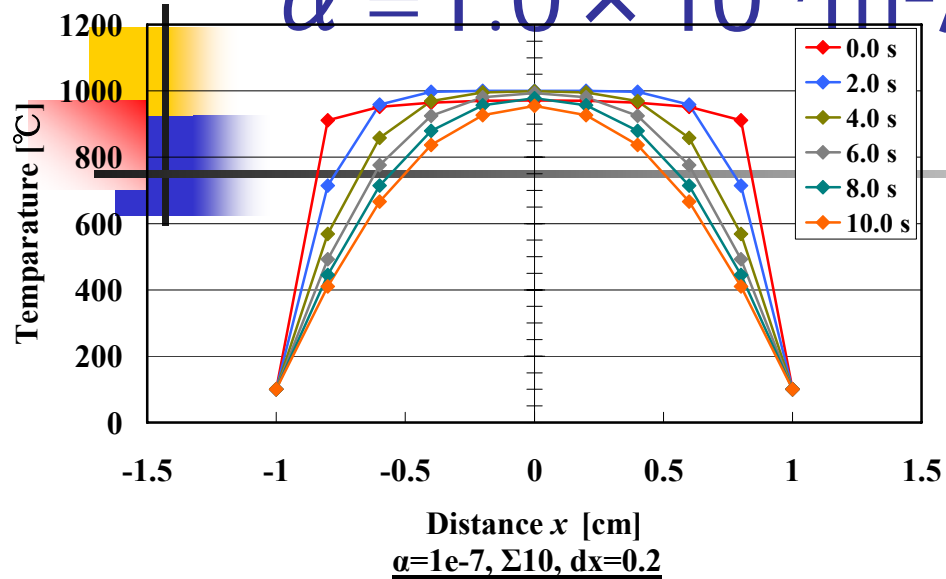
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-5, \Sigma 10000, dx = 0.02$



Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-5, \Sigma 10000, dx = 0.008$

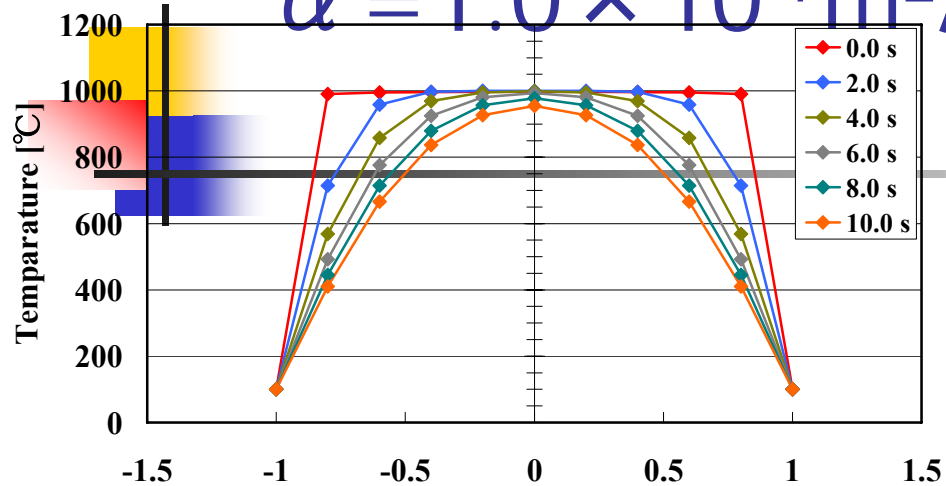
$\alpha = 1.0 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$

計算回数10

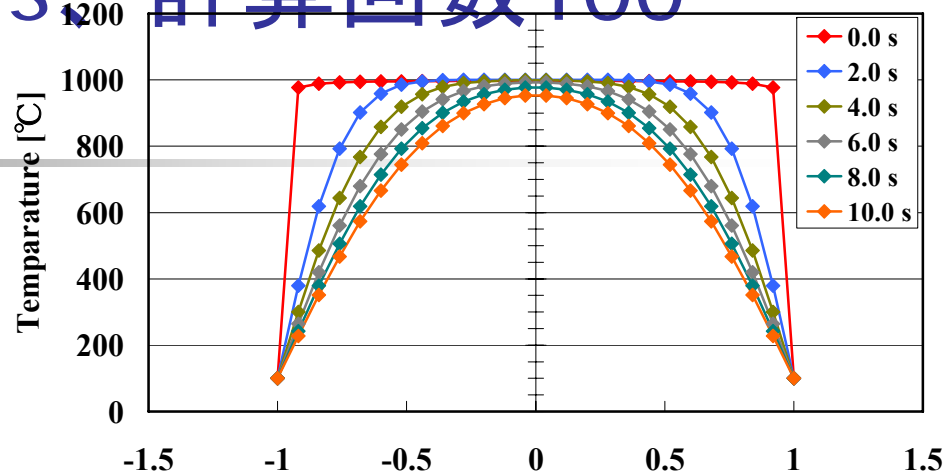


$\alpha = 1.0 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$

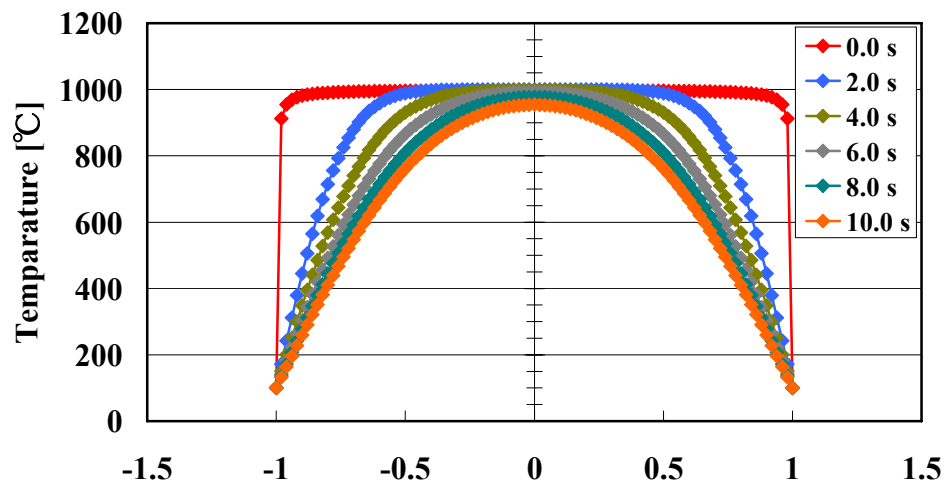
計算回数100



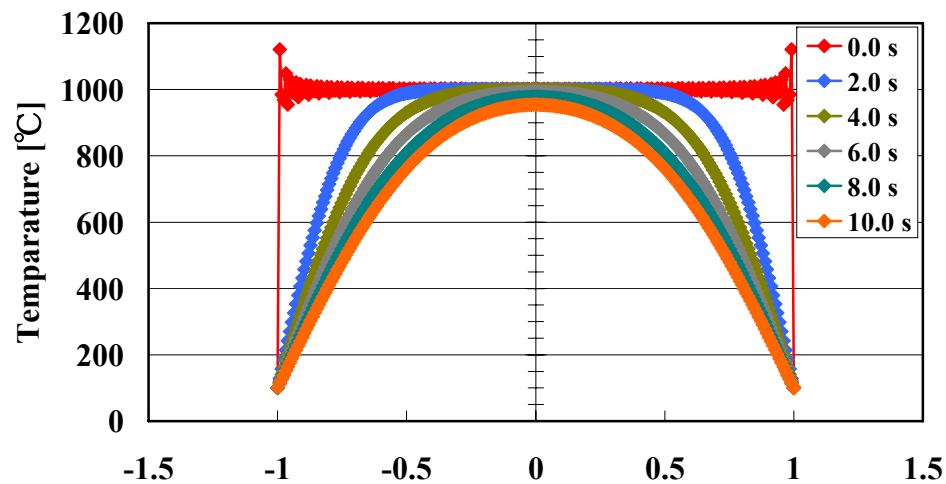
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 100, dx = 0.2$



Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 100, dx = 0.08$



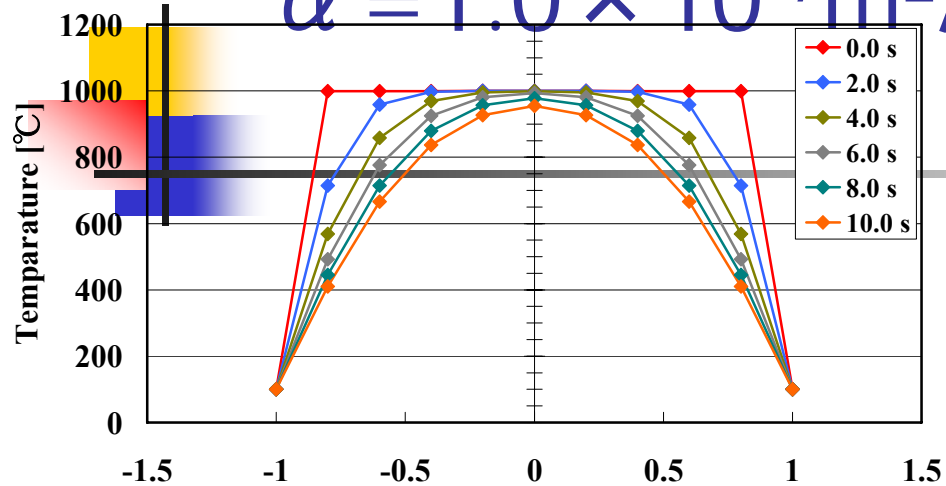
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 100, dx = 0.02$



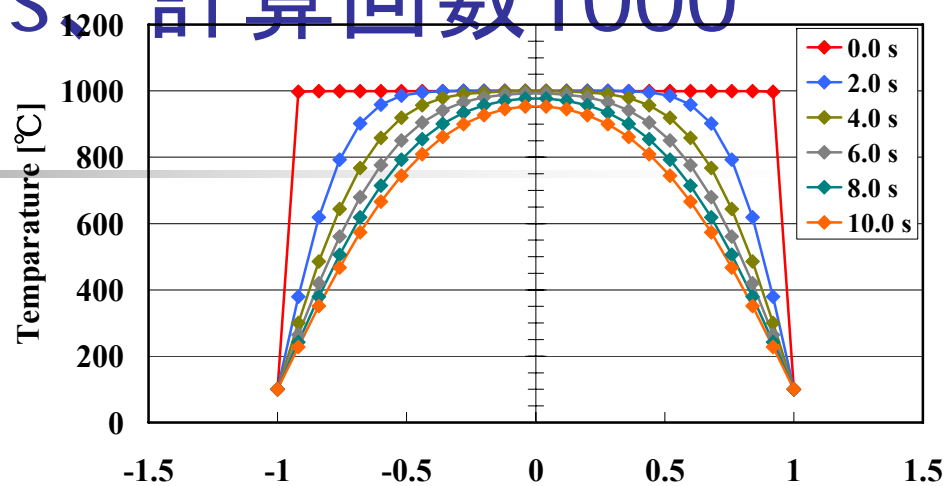
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 100, dx = 0.008$

$\alpha = 1.0 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$

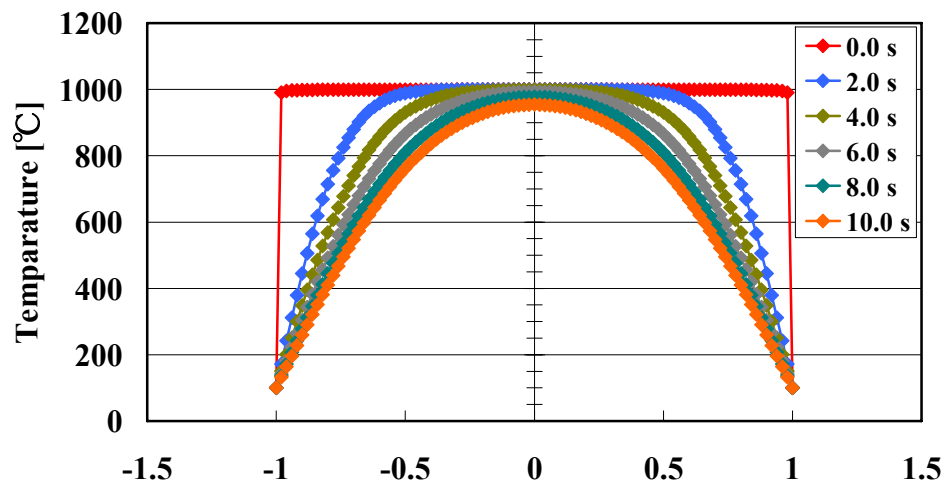
計算回数1000



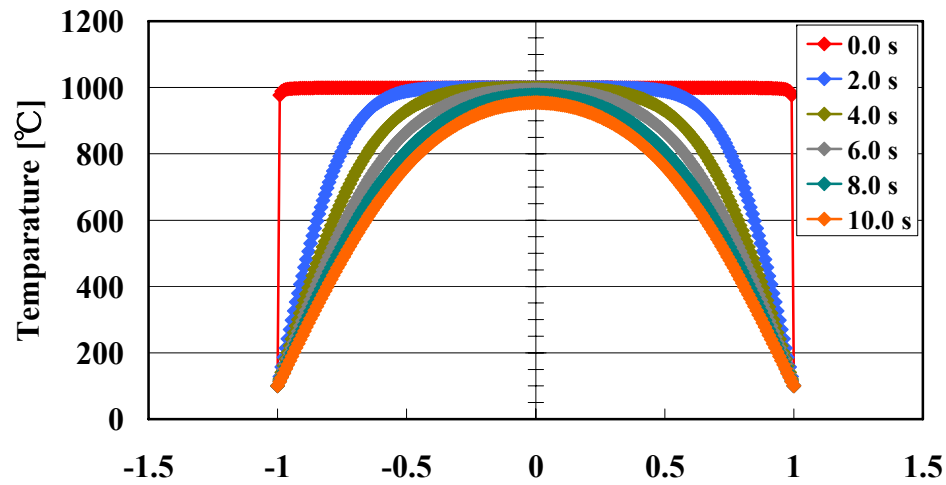
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 1000, dx = 0.2$



Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 1000, dx = 0.08$



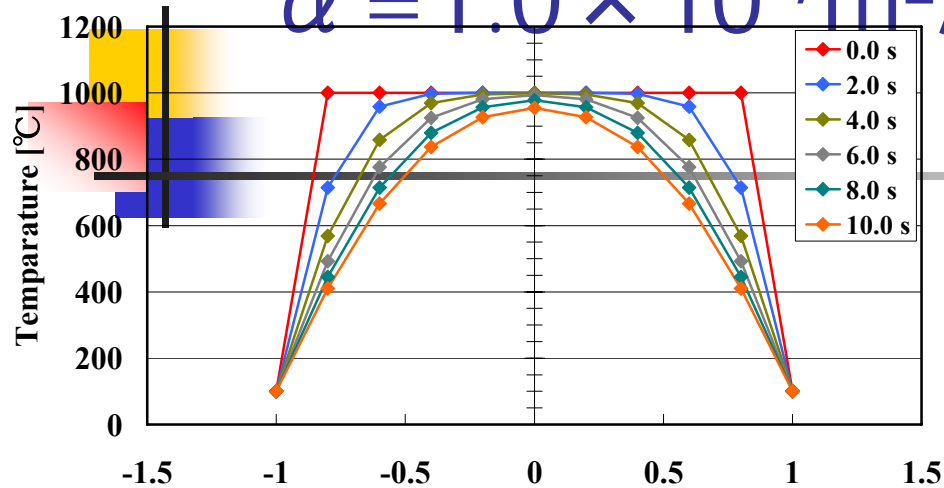
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 1000, dx = 0.02$



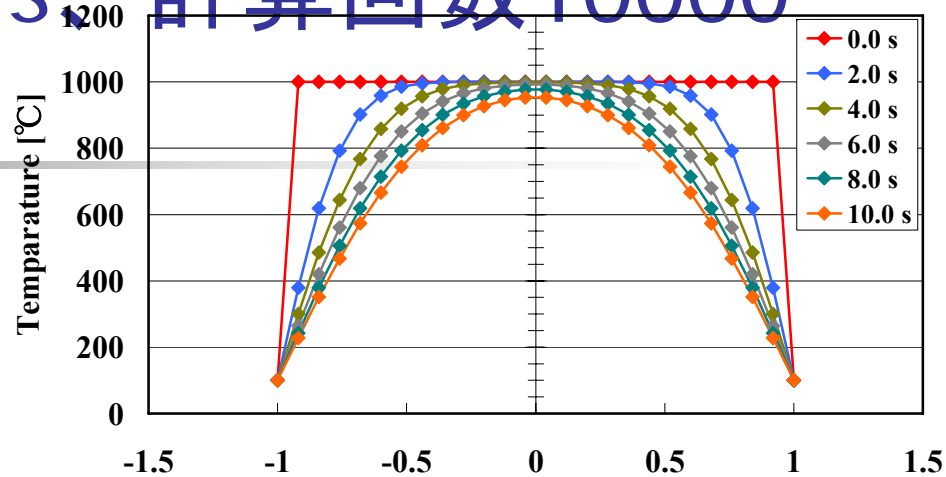
Distance x [cm]
 $\alpha = 1e-7, \Sigma 1000, dx = 0.008$

$\alpha = 1.0 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$

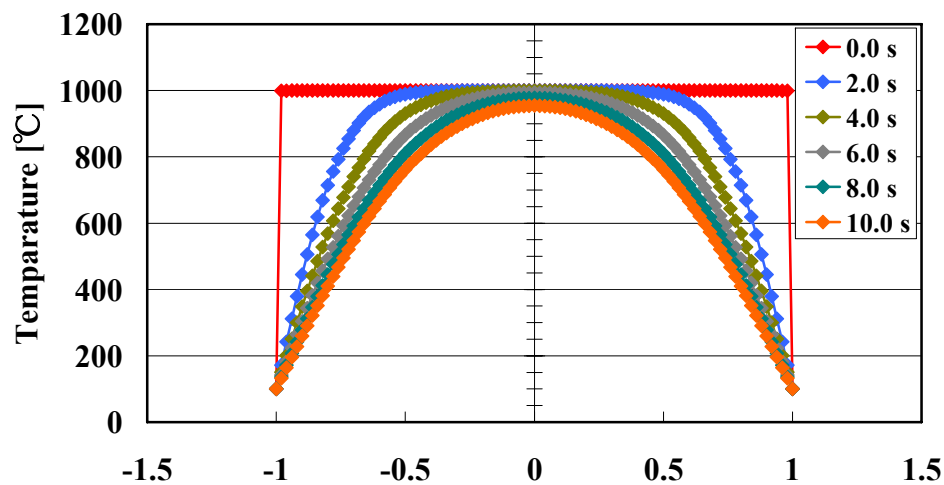
計算回数10000



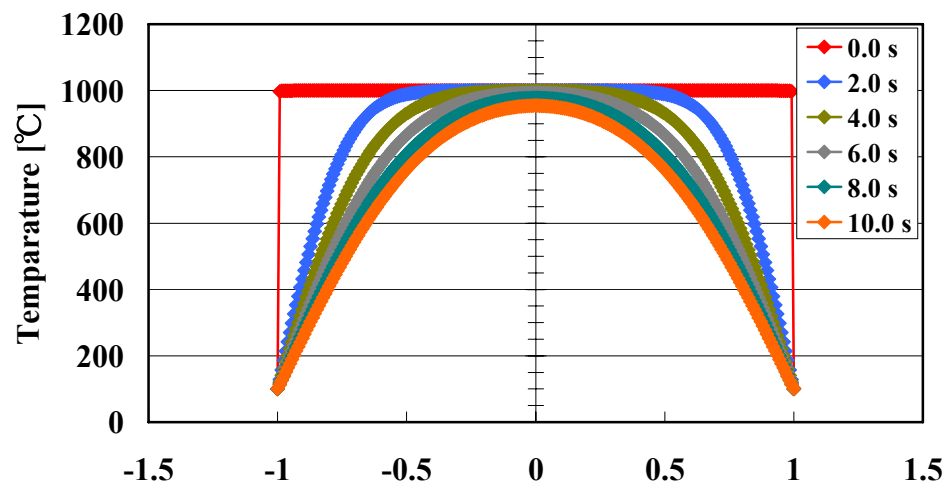
Distance x [cm]
 $\alpha=1e-7, \Sigma 10000, dx=0.2$



Distance x [cm]
 $\alpha=1e-7, \Sigma 10000, dx=0.08$



Distance x [cm]
 $\alpha=1e-7, \Sigma 10000, dx=0.02$

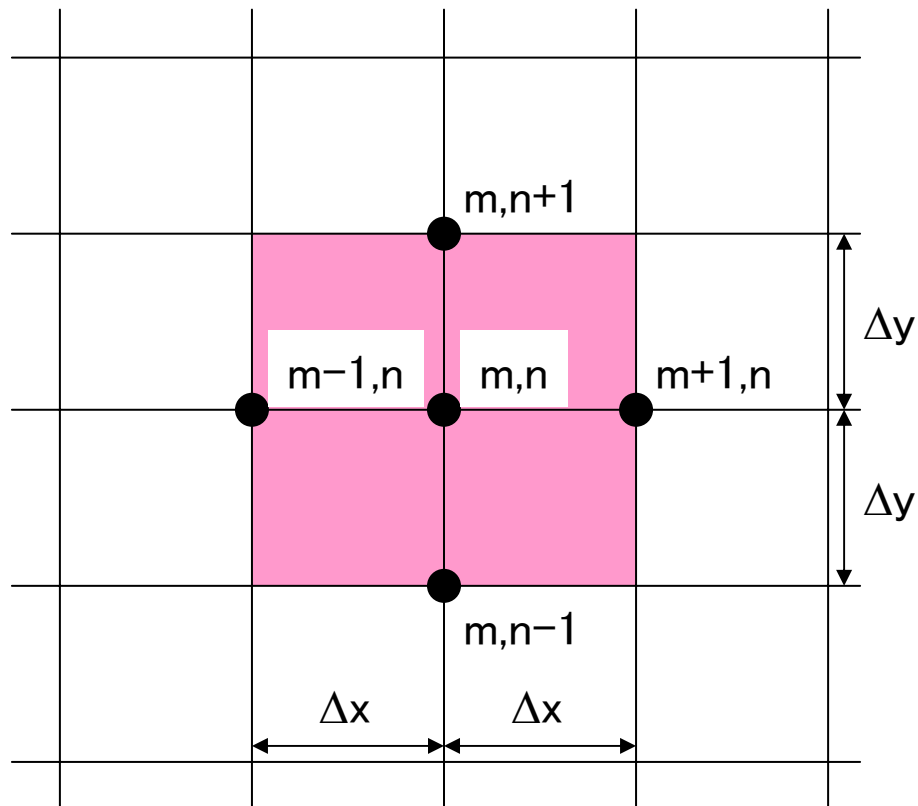


Distance x [cm]
 $\alpha=1e-7, \Sigma 10000, dx=0.008$



非定常問題の数値解法

2次元物体を微小要素に分割する。mはx座標を、nはy座標を表す。





差分近似

微分方程式

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

2階の偏微分の近似式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} (T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y^2} (T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1})$$

時間偏微分の近似式

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau}$$



差分方程式

非定常熱伝導方程式に対する差分式

$$\frac{T_{m+1,n}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m-1,n}^p}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m,n-1}^p}{\Delta y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau}$$

$\Delta x = \Delta y$ として $T_{m,n}^{p+1}$ について解くと、

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + \left[1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \right] T_{m,n}^p$$



1次元差分方程式

時間増分と空間増分の大きさを

$$\Delta x^2 / (\alpha \Delta \tau) = 4$$

となるように選ぶと、ある時間における格子点の温度はその周囲の4格子点の1ステップ前の時間の算術平均になる。1次元問題の場合には、差分方程式は

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + \left[1 - \frac{2\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \right] T_m^p$$

時間増分と空間増分の大きさを

$$\Delta x^2 / (\alpha \Delta \tau) = 2$$

となるように選ぶと、ある時間における格子点の温度はその周囲の2格子点の1ステップ前の時間の算術平均になる。



数値解の収束性

以下のパラメータの選択により、数値解を得るやさしさが異なる。

$$M = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta \tau}$$

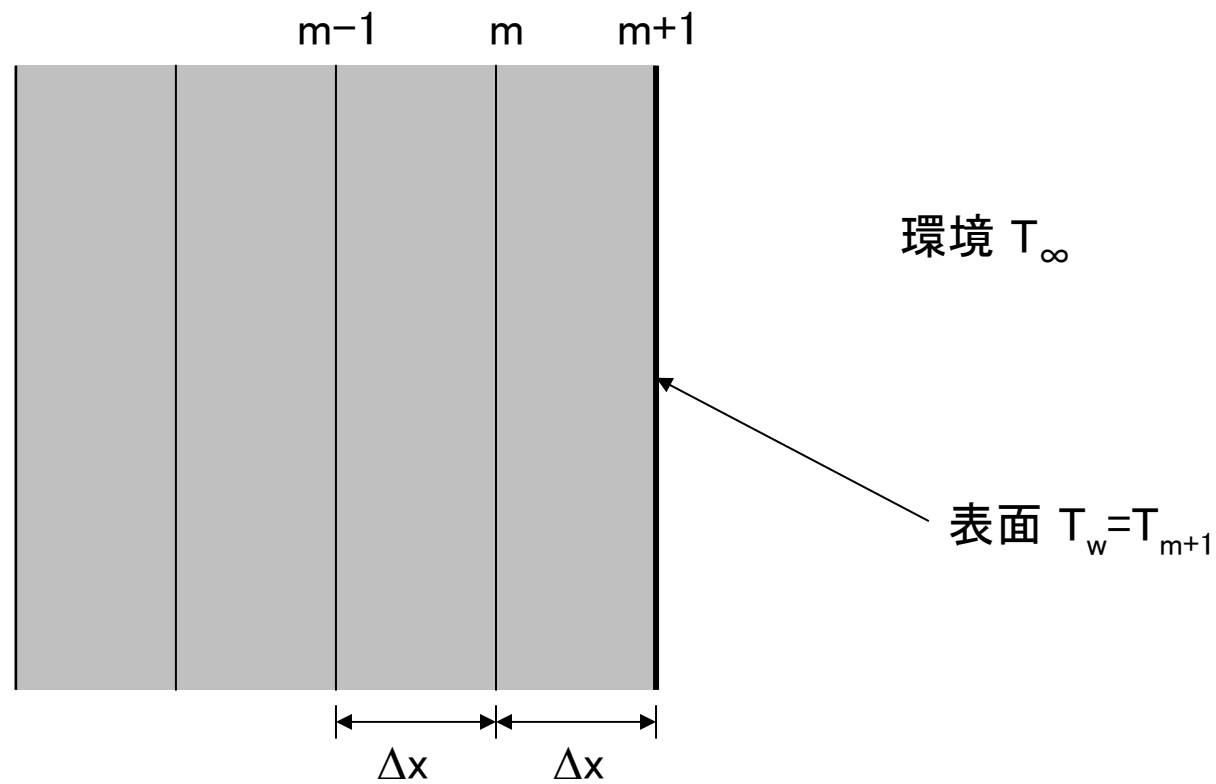
例えば、1次元問題において、 $M < 2$ とすると、 $T_{m,n}^p$ の係数が負になり、熱力学第二法則に反することになる。従って

$$\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} M \geq 2 & \text{(1次元系)} \\ M \geq 4 & \text{(2次元系)} \end{cases}$$

のようにmを制限することとする。

平らな壁の場合の数値解析

平らな壁を考える。





平らな壁の場合の境界条件

1次元系で、境界におけるエネルギーバランスを考えると

$$\left. -kA \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{壁}} = hA(T_w - T_\infty)$$

差分近似は

$$-k \frac{\Delta y}{\Delta x} (T_{m+1} - T_m) = hA(T_{m+1} - T_\infty)$$

すなわち、

$$T_{m+1} = \frac{T_m + (h\Delta x/k) T_\infty}{1 + (h\Delta x/k)}$$

これは境界面での壁要素の熱容量を無視している。



エネルギーバランズ1

格子点(m,n)での非定常のエネルギーバランズは、熱伝導と対流により流れ込むエネルギーの合計が格子点の内部エネルギーの増加に等しいとおくことにより、次式のようになる

$$\begin{aligned} & k\Delta y \frac{T_{m-1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n+1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n-1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} + h\Delta y (T_\infty - T_{m,n}^p) \\ & = \rho C \frac{\Delta x}{2} \Delta y \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau} \end{aligned}$$



エネルギーバランス2

$\Delta x = \Delta y$ のとき $T_{m,n}^{p+1}$ は

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \left\{ 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + 2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + \left[\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta \tau} - 2 \frac{h \Delta x}{k} - 4 \right] T_{m,n}^p \right\}$$

1次元問題では

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \left\{ 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + 2T_{m-1}^p + \left[\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta \tau} - 2 \frac{h \Delta x}{k} - 2 \right] T_m^p \right\}$$



パラメータの選択

パラメータの選択

$$\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) & \text{1次元の場合} \\ 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) & \text{2次元の場合} \end{cases}$$

解が収束するためには

$$\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta \tau} \geq \begin{cases} 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) & \text{1次元の場合} \\ 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) & \text{2次元の場合} \end{cases}$$



前進差分と後退差分

時間微分を後退差分すると、非定常熱伝導方程式は

$$\frac{T_{m+1,n}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau}$$

$\Delta x = \Delta y$ として $T_{m,n}^{p+1}$ について解くと、

$$T_{m,n}^p = -\frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} (T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) + \left[1 + \frac{4\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2} \right] T_{m,n}^{p+1}$$



非定常熱伝導問題の陽解法

非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

初期条件

$$u(x, 0) = 1$$

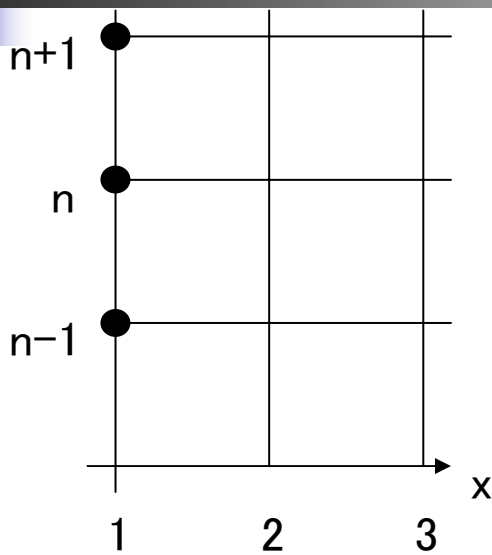
境界条件

$$u(0, t) = 0, \quad \partial u(1, t) / \partial x = 0$$

非定常熱伝導方程式に対するFTCSスキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n \right)$$

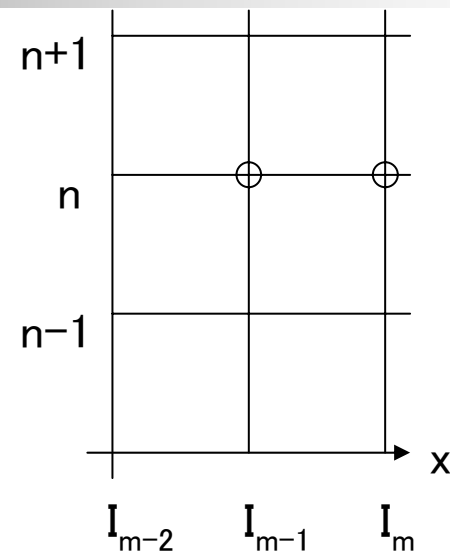
境界条件の与え方



$$u(0, t) = 0$$

$$\rightarrow u_1^n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Dirichlet条件:



$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0$$

$$\rightarrow u_{I_m} = u_{I_m-1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Neumann条件:

Program: HEAT



非定常熱伝導問題の陰解法

時間に後退、空間に中心差分近似するスキーム

$$-du_{i-1}^{n+1} + (1+2d)u_i^{n+1} - du_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad d = \alpha\Delta t / \Delta x^2$$
$$(i = 2, 3, \dots, I_m - 1, \quad n = 1, 2, \dots)$$

境界を $i = 1, i = I_m + 2$ とすると、点2と点 $I_m - 1$ では

$$(1+2d)u_2^{n+1} - du_3^{n+1} = u_2^n + du_1^{n+1}$$
$$-du_{I_m-2}^{n+1} + (1+2d)u_{I_m-1}^{n+1} = u_{I_m-1}^n + du_{I_m+2}^{n+1}$$

この場合、 $u_1^{n+1} = u_{I_m+2}^{n+1} = 0$ である。非定常熱伝導問題も定常熱伝導問題と同じく $Au^{n+1} = b$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の形の連立一次方程式の数値解法に帰着される。



境界条件: Neumann条件

格子系は $i=1,2,3,\dots,I_m-1$ の格子点からなり、境界点は $i=1, i=I_m-1$ とする。

$x=0$ における条件: $u_1^n = 0$

$x=1$ におけるNeumann条件: $\frac{u_{I_m}^{n+1} - u_{I_m-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$ あるいは
 $u_{I_m}^{n+1} = u_{I_m-1}^{n+1}$

$i=2, I_m-1$ における差分スキーム

$$(1+2d)u_2^{n+1} - du_3^{n+1} = u_2^n + du_1^{n+1} = u_2^n$$

$$-du_{I_m-2}^{n+1} + (1+2d)u_{I_m-1}^{n+1} - du_{I_m}^{n+1} = -du_{I_m-2}^{n+1} + (1+d)u_{I_m-1}^{n+1} = u_{I_m-1}^n$$

Program: HEATIM