# 問題5-1

拡大管(Diffuser)の中を20(℃)の水が、10(kg/s)の割合で流れている。管の内径は、入り口断面で3.0(cm)、出口断面で9.0(cm)である。摩擦のない流れとして、出入り口での静圧上昇を計算しなさい。
ただし、ベルヌーイの法則

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

が成り立つとし、水の密度を1000(kg/m³)する。

# 解法の方針5-1

ベルヌーイの法則:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

出入り口での静圧上昇は、ベルヌーイの法則より

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 - \frac{1}{2}\rho u_2^2 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$

出入り口での速度は、質量速度を、$G(kg/s)$ とすると、

連続の式

$$\boxed{G = \rho A_1 u_1 = \rho A_2 u_2}$$ より $$u_1 = \frac{G}{\rho A_1}, \quad u_2 = \frac{G}{\rho A_2}$$

また $A_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$, $A_2 = \dfrac{\pi d_2^2}{4}$ であるから、

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{G}{\rho A_1}\right)^2 - \left(\frac{G}{\rho A_2}\right)^2\right\} =$$

# 回答5-1

ベルヌーイの法則:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

出入り口での静圧上昇は、ベルヌーイの法則より

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 - \frac{1}{2}\rho u_2^2 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$

出入り口での速度は、質量速度を、$G(kg/s)$　とすると、

$$G = \rho A_1 u_1 = \rho A_2 u_2 \quad \text{より} \quad u_1 = \frac{G}{\rho A_1}, \quad u_2 = \frac{G}{\rho A_2}$$

また　$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$　であるから、

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{G}{\rho A_1}\right)^2 - \left(\frac{G}{\rho A_2}\right)^2\right\} = \frac{G^2}{2\rho}\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

$$= \frac{8G^2}{\rho\pi^2}\left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4}\right) = \frac{8(10)^2}{(1000)(3.14)^2}\left(\frac{1}{(0.03)^4} - \frac{1}{(0.09)^4}\right)$$

$$= 0.81\times 10^7 \times \left(\frac{1}{81} - \frac{1}{6561}\right) = 0.099\times 10^6 (Pa) = 0.099(MPa)$$

# 問題5-2

27℃で1atm(=1.0132×$10^5$Pa)の空気が平板に沿って2m/sの流速で流れている。平板の前縁からの距離が20cmにおける境界層厚さを計算せよ。ただし、空気のガス定数は287J/kgKであり、27℃における粘性係数は1.98×$10^{-5}$kg/msである。

# 解法の方針5-2

空気の密度は

$$\rho = \frac{p}{RT} =$$

であるから、レイノルズ数は、

$$Re_x = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} =$$

無次元境界層厚さは、

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} =$$

であるから、よって、境界層厚さは、

$$\delta = \frac{4.64\,x}{\sqrt{Re_x}} =$$

# 回答5-2

空気の密度は

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132\times 10^{5}}{(287)(300)} = 1.177(kg/m^{3})$$

であるから、レイノルズ数は、

$$\mathrm{Re} = \frac{(1.177)(2.0)(0.2)}{1.98\times 10^{-5}} = 23770$$

$$\boxed{\mathrm{Re}_x = \frac{\rho u_\infty x}{\mu}}$$

ここで、境界層厚さは、

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

であるから、

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{(4.64)(0.2)}{(23770)^{1/2}} = 0.00602(m)$$

# 問題5-3

問題5-2の流れにおいて、平板が全面にわたって60℃に加熱されているとする。このとき、平板前縁から20cmまでの間の長さにおいて奪われる熱量を求めよ。ただし、奥行きz方向については単位厚みを考えよ。
ただし、以下の値を使用してよい。

$$\nu = 17.36 \times 10^{-6} (m^2 / s)$$
$$k = 0.02749 (W / m \cdot K)$$
$$Pr = 0.7$$
$$C_p = 1.006 (kJ / kg \cdot K)$$

# 解法の方針5-3

いま、レイノルズ数、ヌッセルト数は、

$$Re = \frac{u_\infty x}{\nu} =$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3} =$$

であるから、熱伝達率は

$$h_x = Nu_x \frac{k}{x} =$$

ここで、平均熱伝達率は、この2倍であるから、

$$\bar{h} = 2 \times h_x =$$

よって　奪われる全熱量は、

$$Q = \bar{h} A \left( T_w - T_\infty \right) =$$

# 回答5-3

物性値を、膜温度に対して見積もると(別添の表参照)

$$T_f = \frac{27+60}{2} = 43.5(°C) = 316.5(K)$$

別添の表より $\nu = 17.36 \times 10^{-6} (m^2/s)$

$$k = 0.02749(W/m \cdot K)$$

$$Pr = 0.7$$

$$C_p = 1.006(kJ/kg \cdot K)$$

従って、レイノルズ数、ヌッセルト数は、

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2.0)(0.2)}{17.36 \times 10^{-6}} = 23041$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$= (0.332)(23041)^{1/2}(0.7)^{1/3} = 44.74$$

# 回答5−3(続き)

熱伝達率は

$$h_x = Nu_x \frac{k}{x} = \frac{(44.74)(0.02749)}{0.2} = 6.15(W/m^2 \cdot K)$$

平均熱伝達率は、この2倍であるから、

$$\bar{h} = 2 \times 6.15 = 12.3(W/m^2 \cdot K)$$

総熱流束は、

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (12.3)(0.2 \times 1.0)(60 - 27)$$

$$= 81.18(W)$$

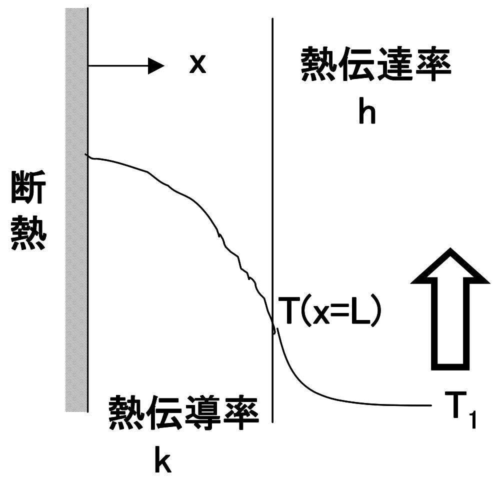
# 問題5-4

単位体積当たりの発熱量がQの熱源が一様に分布した厚さLの平板がある。片面は断熱されており、もう一方の面は、温度$T_1$の流体と熱交換している。この流体と板壁面との熱伝達率をhとするとき、板内部の温度分布を記述する式を求めなさい。ただし、この平板の熱伝導率をkとする。

# 回答5-4

直行座標系における温度分布を支配する
１次元定常熱伝導方程式は、

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{Q}{k}=0$$




であるから、これを以下の境界条件のもとで解けば、

$$x=0 \quad : \quad \frac{dT}{dx}=0$$

$$x=L \quad : \quad \frac{dT}{dx}=-\frac{h}{k}\left(T-T_1\right)$$

一次元温度分布は、以下の式として得られる。

$$T-T_1=\frac{Q}{2k}\left(L^2-x^2\right)+\frac{QL}{h}$$

# 問題5-5

単位体積当たり発熱する熱量が、0.35[MW/m$^3$]の平板壁がある。片面は断熱されているが、もう一方の面は、93[℃]の流体と熱交換している。流体と壁との間の熱伝達率を570[W/m$^2$・K]、平板壁の熱伝導率を21[W/m・K]、平板壁の厚さを7.5[cm]とし、壁内部の最高温度を計算しなさい。

# 回答5-5

直行座標系における1次元定常熱伝導方程式を境界条件

$$x = 0 \quad : \quad \frac{dT}{dx} = 0$$

$$x = L \quad : \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{h}{k}\left(T - T_\infty\right)$$

のもとで解けば

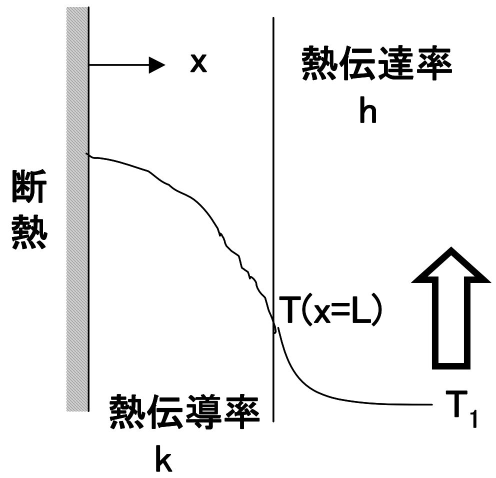
$$T - T_\infty = \frac{q}{2k}\left(L^2 - x^2\right) + \frac{qL}{h}$$

となる。最高温度はx=0の温度であることは明らかだから、

$$T_{\max} = T_\infty + \frac{qL^2}{2k}\left(1 - \frac{1}{hL/k}\right)$$

$$= 93 + \frac{\left(0.35\times10^6\right)\left(0.075\right)^2}{(2)(21)}\left(1 - \frac{21}{(570)(0.075)}\right)$$

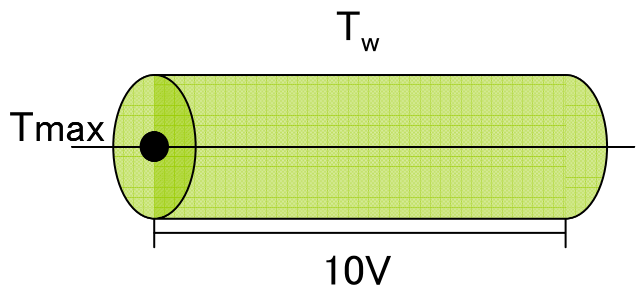
$$= 116.8\left[{}^\circ C\right]$$



# 問題5-6

２００Aの電流が、長さが1m、直径3.0mmのステンレス鋼製針金中を流れる。ステンレス鋼線は、110℃Cの液体に浸されており、熱伝達率は、4[kW/m$^2$/K]とする。ステンレス鋼線の中心温度を求めなさい。ただし、ステンレス製の針金の熱伝導率を k=19[W/m・K]とし、鋼の比抵抗を70[μΩ・cm]とする。

# 解法の方針5-6




導線の抵抗は、

$$R=\rho\frac{L}{\pi r^2}=$$

導線内で発生する熱量は、対流熱伝達によって
液体中に持ち去られるから

$$P=I^2R=q=hA(T_w-T_\infty)$$

鋼線の表面温度は、次式となる。

$$T_w=T_\infty+\frac{I^2R}{hA}=$$

また、単位体積当たりの発熱量は

$$\dot{q}=\frac{P}{V}=\frac{P}{\pi r^2L}=$$

であるから、熱伝導方程式の解より、中心温度$T_{max}$は

$$T(r)=T_{\max}-\frac{\dot{q}}{4k}r^2$$

$$\therefore T_{max}=\frac{r^2\dot{q}}{4k}+T_w=$$

*[記号表]*

*単位体積当りの発熱量：* $\dot{q}=P/V$

*電力：* $P=IE=I^2R=\frac{E^2}{R}$

*電圧：* $E$

*体積：* $V=\pi r^2L$

*抵抗：* $R=\rho\frac{L^2}{\pi r^2}$

*長さ：* $L$

*半径：* $r$

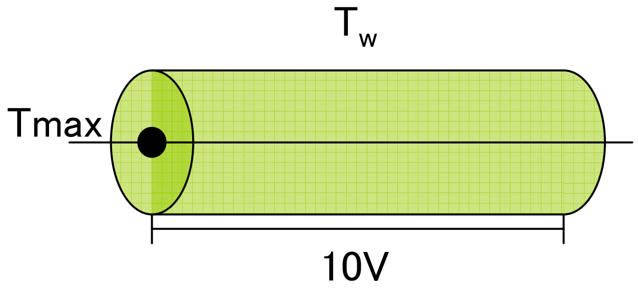
*表面積：* $A=2\pi rL$

*周囲流体温度：* $T_\infty$

*壁温度：* $T_w$

*中心温度：* $T_{max}$

# 回答5-6




導線の抵抗は、

$$R=\rho\frac{L}{\pi r^2}=(70\times10^{-8})\frac{1}{3.14\times(1.5\times10^{-3})^2}=0.099[\Omega]$$

導線内で発生する熱量は、対流熱伝達によって液体中に持ち去られるから

$$P=I^2R=q=hA(T_w-T_\infty)$$

よって、鋼線の表面温度は、次式となる。

$$T_w=T_\infty+\frac{I^2R}{hA}$$

$$=110+\frac{200^2\times0.099}{4\times10^3\times(2\times3.14\times1.5\times10^{-3}\times1)}=215.1[°C]$$

また、単位体積当たりの発熱量は

$$\dot{q}=\frac{P}{V}=\frac{P}{\pi r^2L}=\frac{200^2\times0.099}{3.14\times(1.5\times10^{-3})^2\times1}$$

$$=560\times10^6[W/m^3]=560[MW/m^3]$$

であるから、熱伝導方程式の解より、中心温度$T_{max}$ は

$$T(r)=T_{max}-\frac{q}{4k}r^2$$

$$\therefore T_{max}=\frac{r^2\dot{q}}{4k}+T_w=\frac{(1.5\times10^{-3})^2\times560\times10^6}{4\times19}+215=231.6[°C]$$

*[記号表]*

*単位体積当りの発熱量：* $\dot{q}=P/V$

*電力：* $P=IE=I^2R=\dfrac{E^2}{R}$

*電圧：* $E$

*体積：* $V=\pi r^2L$

*抵抗：* $R=\rho\dfrac{L^2}{\pi r^2}$

*長さ：* $L$

*半径：* $r$

*表面積：* $A=2\pi rL$

*周囲流体温度：* $T_\infty$

*壁温度：* $T_w$

*中心温度：* $T_{max}$