

有限要素法 (FEM) による要素節点変位からのひずみと応力の算出 (環境開発工学・エネルギー工学専攻実験テキストを元にしてしています)

1. はじめに

物体に荷重が作用すると、内部で応力が生じる。われわれはひずみを計測することにより、内部の応力を知ることができる。しかし、物体が複雑な形状をしている場合、内部に生じる応力も一様ではなく局所的な応力を求めることは困難である。

有限要素法は物体に生じる内部の応力場、変位場を近似的に得るための計算手法である。有限要素法を用いる際には、対象となる連続体を有限個の要素に分割する。分割された一要素を構成する点を節点と言う。節点における変位から一つの要素の剛性を求め、最終的に物体全体の剛性を求める。得られた全体の剛性から各節点での応力、変位を算出することができる。このため物体が複雑な形状であっても局所的な応力や変位を求めることができる。

本実験では物体の分割された一つの要素に着目し、各節点における変位からひずみを算出する。また、得られたひずみから各節点における節点力を求める。この作業は有限要素法を適用するうえで必要となる作業である。本実験を通して有限要素法の基礎を学び、同時に数値解析におけるプログラミングの技術の向上を目指す。

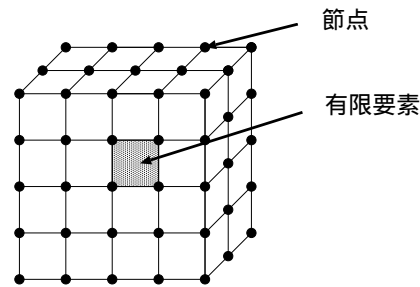


図 1: 要素分割された物体

2. 理論

2.1 ひずみ - 変位関係式

物体内のある点 P は変形により P' へ移動する。 x, y 方向の変位を、 $u(x, y), v(x, y)$ とする。 P より dx, dy 離れた X, Y は、 X', Y' へ移動する。今この変形を 2 段階に分けて考える。まず、図 2 のように X, Y は PX, PY が座標軸と平行を保ったまま X', Y' へ移動しそれから X'', Y'' へ移動すると考える。

はじめに、垂直ひずみから考える。 P, X の x 座標は

$$P : x \quad X : x + dx$$

と書ける。今、点 P が点 P' へ $u(x, y)$ 移動したとすると P', X' の座標は、

$$P' : x + u(x, y) \quad X' : x + dx + u(x + dx, y)$$

テイラー展開を用いて高次の項を無視すると

$$u(x + dx, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

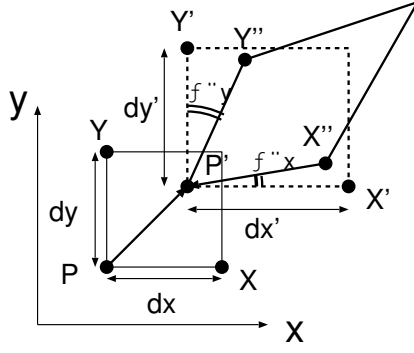


図 2: 変形状態

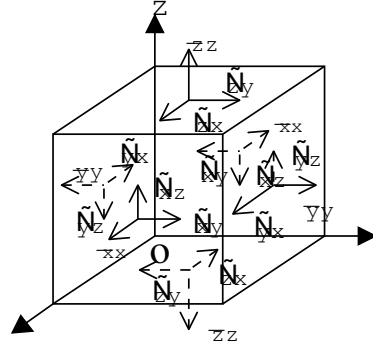


図 3: 要素に作用する応力成分

と書けるから変形後の $P'X'$ の長さ dx' は

$$dx' = dx + u(x + dx, y) - u(x, y) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

よって、ひずみの定義により x 方向のひずみ ε_{xx} は

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y 方向の垂直ひずみも同様に

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

と表される。

次に、せん断ひずみを考える。 X'' の y 座標は変位 v をテイラー展開し高次の項を無視すると

$$y + v(x + dx, y) = y + v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

と書ける。今、 P' の y 座標が $y + v(x, y)$ であることを考慮すると、 $P'X''$ の $P'X'$ に対する傾きは $\theta_x = \partial v / \partial x$ である。同様に $P'Y''$ の $P'Y'$ に対する傾き θ_y を求め、せん断ひずみ γ_{xy} は定義により

$$\gamma_{xy} = \theta_x + \theta_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

と表される。

以上の理論を用い座標を x, y, z に拡張すると、ひずみ - 変位関係式は下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

これをマトリックス表示すると

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B]\{\delta\} \quad (2)$$

となる．

2.2 応力 - ひずみ関係式

ひずみの小さい部分では応力はひずみにほぼ比例している．これをフックの法則という．このとき応力 - ひずみ関係は

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3)$$

で表される．ここに E は縦弾性係数，またはヤング率と呼ばれる．

棒を引張ると軸方向には伸びるが，同時に断面は小さくなる．つまり断面方向に棒は縮む．実験によれば，一様断面の棒が軸方向に引張られて ε のひずみを生じるときは，これと直角の方向に ε' なるひずみが生じ，

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E} \quad (4)$$

の関係が成立することが知られている．ここに， ν は比例定数であってポアソン比とよばれる． x 軸方向に引張りを作用させた場合，式 (4) より

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} \\ \varepsilon_{yy} &= -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \end{aligned}$$

が得られる．これは， x 方向の応力 σ_{xx} が単独で x, y, z 方向に生じさせるひずみを示したものであるから， $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ が同時に作用する場合は， $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ が単独で作用する場合の重ね合わせにより求められる．すなわち

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})\} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\} \end{aligned} \quad (5)$$

上式は式 (3) を一般化したものであり，一般化されたフックの法則とよばれる．このとき，せん断応力とせん断ひずみの間には

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} = G\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (6)$$

の関係が成立する．ここで， G はせん断弾性係数とよばれる．以上より，6 個の応力成分と 6 個のひずみ成分の関係が得られた．これをマトリックス表示すると式 (5)(6) より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

また，式 (5)(6) を応力に成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \gamma_{zx}$ について解く．あるいは，式 (7) の逆行列を求めることにより次式が得られる．

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right\} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) \right\} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (8)$$

上式より，マトリックス表示すると以下ようになる．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

これを応力 - ひずみ関係式とよんでいる．式 (9) の係数マトリックスを $[D]$ と書き，これを応力 - ひずみマトリックスという．すなわち，

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

とおくと式 (9) は以下のように書ける．

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (11)$$

2.3 要素剛性マトリックス

今，下図のようなばね系を考えよう．

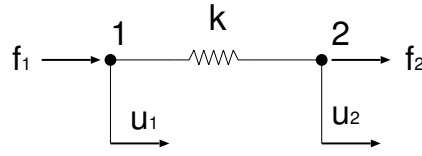


図 4: ばねの力と変位

節点 1 に作用する力と変位をそれぞれ f_1, u_1 ，同様に節点 2 に作用する力と変位を f_2, u_2 とすると以下の関係式が導かれる．

$$\begin{aligned} f_1 &= ku_1 - ku_2 \\ f_2 &= -ku_1 + ku_2 \end{aligned}$$

これをマトリックス表示すると

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

となる．ここで

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

とすると，式 (12) は以下のように表される．

$$\{f\} = [K]\{\delta\} \quad (13)$$

$\{f\}$ を荷重ベクトル， $\{\delta\}$ を変位ベクトルといい，この両者を結びつける式 (13) を剛性方程式という．マトリックス $[K]$ はこの系の剛性を表すという意味で剛性マトリックスという．

注) 節点変位が未知の場合，境界条件を考慮しない限り式 (13) は変位に対して解くことができない．これは，要素剛性マトリックスが特異で行列式が 0 になっているので，逆行列を求めることが不可能であるためである．このばね系や一般的な弾性問題は，外荷重を作用させたとき，構造の剛体としての動きを止めるのに十分なだけの節点変位を固定しなければ，変位を求めることはできない (図 3 の場合，たとえば u_1 を固定すると解ける)．さらに詳しく知りたい人は文献 [2][3] を参照．

以上の関係を $x - y$ 座標系の 1 要素に適用することを考える．その準備として，仮想仕事の原理を定式化する．今，体積力を無視すると仮想仕事の原理は以下の式で表される．

$$\int \{\delta^*\}^T \{P\} dS = \int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \quad (14)$$

ここで $\{\delta^*\}^T$ は仮想変位ベクトル， $\{P\}$ は表面力ベクトル， $\{\varepsilon^*\}^T$ は仮想ひずみベクトル， $\{\sigma\}$ は応力ベクトルを表す．ここで，式 (2)(11) より

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{\delta^*\}_m \quad (15)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}_m \quad (16)$$

ここで $\{\delta\}_m$, $\{\delta^*\}_m$ はそれぞれ節点変位ベクトル, 仮想節点変位ベクトルを表す. 式 (15)(16) より式 (14) 右辺は

$$\int \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = \int ([B]\{\delta^*\}_m)^T [D][B]\{\delta\}_m dV = \int \{\delta^*\}_m^T [B]^T [D][B]\{\delta\}_m dV$$

と書ける. また, 節点力 $\{f\}_m$ を表面力 $\{P\}$ のなす仕事と等しくなるように定義すると, 式 (14) 右辺は

$$\int \{\delta^*\}^T \{P\} dS = \{\delta^*\} \{f\}_m$$

よって, 式 (14) は

$$\{\delta^*\}^T \{f\}_m = \int \{\delta^*\}^T [B]^T [D][B]\{\delta\} dV$$

と表される. $\{\delta^*\}$ が任意の仮想節点変位ベクトルであるから上式が成立するためには

$$\{f\}_m = \int [B]^T [D][B]\{\delta\}_m dV \quad (17)$$

ここで要素の剛性マトリックス $[K]$ を

$$[K] = \int [B]^T [D][B] dV \quad (18)$$

とすると, 剛性マトリックスは $[B]$, $[D]$ により求められる. したがって, 剛性方程式は

$$\{f\}_m = [K]\{\delta\}_m \quad (19)$$

と表される. 以上より, 剛性マトリックスと節点変位ベクトルにより節点力が求められる.

2.4 形状関数を用いた線形近似

図 5 のような 1 次元の自然座標を考える. 今, 関数 N_i , N_{i+1} を下のように定める. N_i は x_i で 1 , x_{i+1} で 0 , また N_{i+1} は x_{i+1} で 1 , x_i で 0 の値をとる.

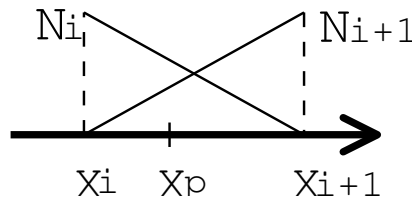


図 5: 形状関数による近似

$$N_i = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$$

$$N_{i+1} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$N_i + N_{i+1} = 1$$

このとき，任意の x_p は上記の二つの関数を用いて，次のように表すことができる．

$$x_p = N_i x_i + N_{i+1} x_{i+1} = \sum_{j=i}^{i+1} N_j x_j \quad (20)$$

N_i, N_{i+1} は形状関数という．この原理を用いて実際に各節点での変位が与えられたときの要素内の変位を求めてみよう．

2.5 アイソパラメトリック要素

今，形状関数を以下のように定める．

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(\xi - 1)(\eta - 1)}{4} & N_2(\xi, \eta) &= \frac{(\xi + 1)(-\eta + 1)}{4} \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(\xi + 1)(\eta + 1)}{4} & N_4(\xi, \eta) &= \frac{(-\xi + 1)(\eta + 1)}{4} \end{aligned} \quad (21)$$

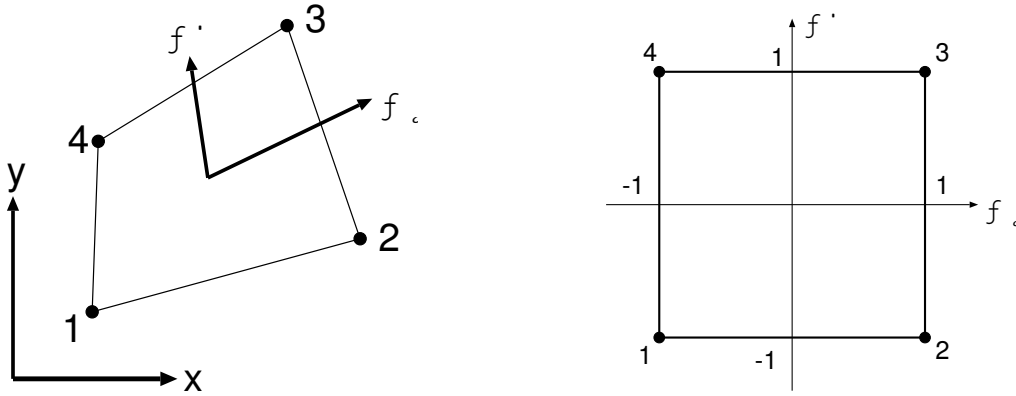


図 6: 全体座標系における要素と正規化された要素

これらは，各々定義される節点では 1，他の節点では 0 の値をもつという，必要条件を満たしている．これらを用い図 6 右に示される局所座標系を全体座標系に写像することを考える．すなわち

$$x_p = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \quad y_p = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (22)$$

式 (22) で定義される写像は図 6 左に示される湾曲 1 次要素を表す．この場合，場の変数は節点と節点の間で線形に近似される．場の変数の表示と形状が同じ次数で表されるとき，このように定式化された要素はアイソパラメトリック要素とよばれる．上記のような変換は，デカルト座標と曲線座標の間に 1 対 1 の対応があるとき，すなわち写像関係

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (23)$$

が成り立つとき適用することが可能である． (x, y) 系と (ξ, η) 系が 1 対 1 の関係にあることは，式 (21)(22) から明らかである．

式 (21) に示す形状関数を用いることで要素内の任意の点の変位 u_p, v_p は，式 (22) と同様に以下のように表すことができる．

$$u_p = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i \quad v_p = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (24)$$

ただし, i は節点番号を表す.

2.6 Jacobi マトリックス

式 (24) より各節点における変位から要素内の任意の点の変位が近似的に得られることがわかった. これを利用して, 要素内の任意の点におけるひずみを求める. 今, 簡単のため x, y 方向のみを考えることとするとひずみは式 (1)(24) より

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \sum [B_i] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで, 式 (25) の係数マトリックスを $[B]$ と書き, これをひずみ - 変位マトリックスという. したがって, 節点変位ベクトルから要素ひずみを求めるマトリックスは次式で表される.

$$[B] = \sum_{i=1}^4 [B_i] \quad (26)$$

ところで, N_i を x, y で微分した項 (カーテシアン導関数) は未知である. これを求めるため微分の連鎖則を用いてカーテシアン導関数を以下のように分解する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (27)$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ここで $[J]$ は, Jacobi マトリックスとよばれている. 新しく現れた項のうち, N_i を ξ, η で変微分したものは既知である (式 (21) を偏微分すればよい). また, 残りの項は ξ, η を x, y で偏微分したものであるがこれらは, Jacobi マトリックス $[J]$ の逆行列として求められる. すなわち,

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

以上より, 要素内の任意の点におけるひずみを求めることができる.

2.7 ガウス - ルシャンドルの求積法

要素内のひずみは一様でない. よって, 式 (18) により要素剛性マトリックス $[K]$ を要素内の 1 点において組み立てると大きな誤差が生じる. このため, ガウス - ルシャンドルの求積法とよばれ

る数値積分を用いて要素内の数点に対して計算を行い，精度を確保する方法が取られている．ある関数 $\phi(\xi, \eta)$ の-1 から 1 までの積分に対しては，以下のように積分値を近似できる．

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{m=1}^m w_i \phi(\xi_i, \eta_i) \quad (31)$$

ここで $m = 4$ とすると積分点は図 6 のようになる．また， w_i は i 点 (ガウス点) における重みでありその値を表 1 に示す．

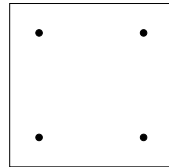


図 7: 積分点

表 1: ガウス - ルシャンドル求積法: 積分点と重み

	座標 (ξ, η)	重み w_i
4 点積分 $m = 4$	(0.57735, 0.57735)	1.00
	(0.57735, -0.57735)	1.00
	(-0.57735, 0.57735)	1.00
	(-0.57735, -0.57735)	1.00

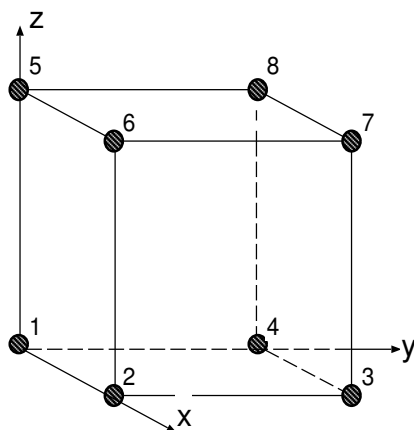
3. 課題

3.1 課題の提示

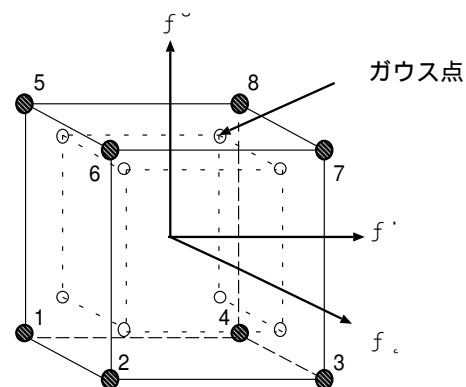
本課題は次の通りである．

1. 3 次元 6 面体の 1 要素を対象として，要素内のひずみを求めるプログラムを作成せよ．
2. 8 点の座標，変位を各自自由に定め，積分点におけるひずみを 2, 3 例求めよ．
3. 材料を適当に定めて各節点に作用する節点力を求めよ．

以下，課題に必要な式の導出を行う．対象となる要素を図 8 に示す．



(a) 全体座標系



(b) 局所座標系

図 8: 8 点 6 面体要素

3.2 式の導出

はじめに，座標系，変位量を決める．これらは，各自任意に決めてよい．形状関数は以下を使用する．

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)}{8} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (32)$$

今，節点番号 1 のひずみを求めたいとする．このとき，局所座標系におけるガウス点の座標は

$$\xi_1 = -0.57735 \quad \eta_1 = -0.57735 \quad \zeta_1 = -0.57735 \quad (33)$$

である．形状関数とその偏微分にこれらの値を代入し， $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ における形状関数， $N_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \sim N_8(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ とその偏微分， $\frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \sim \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ， $\frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \sim \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ， $\frac{\partial N_1}{\partial \zeta}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \sim \frac{\partial N_8}{\partial \zeta}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ を求めておく．

式 (24) より，これらの形状関数を用いることにより節点 1 に関する変位は以下のように表すことができる．

$$u_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) u_i \quad v_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) v_i \quad w_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) w_i \quad (34)$$

ここで，節点番号 1 におけるひずみは

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial x} u_8 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial y} v_8 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial N_1}{\partial z} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} w_2 + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial z} w_8 \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 \right) + \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 \right) + \dots + \left(\frac{\partial N_8}{\partial x} v_8 + \frac{\partial N_8}{\partial y} u_8 \right) \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} w_1 + \frac{\partial N_1}{\partial z} v_1 \right) + \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} w_2 + \frac{\partial N_2}{\partial z} v_2 \right) + \dots + \left(\frac{\partial N_8}{\partial y} w_8 + \frac{\partial N_8}{\partial z} v_8 \right) \\ \gamma_{zx} &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} w_1 \right) + \left(\frac{\partial N_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} w_2 \right) + \dots + \left(\frac{\partial N_8}{\partial z} u_8 + \frac{\partial N_8}{\partial x} w_8 \right) \end{aligned} \quad (35)$$

であり，これをマトリックス表示すると

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_1 &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \dots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{Bmatrix} \\ &= [B]_1 \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

となる．ここで B_1 は，節点 1 における B マトリックスという意味を表している．したがって，節点 1 におけるひずみは B_1 マトリックスと変位ベクトルのかけ算により求まる．

また，式 (29) より Jacobi マトリックス $[J]$ は

$$\begin{aligned}
 [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (37)
 \end{aligned}$$

である．つまり，jacobi 行列は $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ における形状関数の偏微分と座標ベクトルのかけ算により求まる．

次に， B_1 マトリックスと D マトリックスから剛性マトリックス $[K]$ を求めるため，次の計算を行う．

剛性マトリックスは，座標変換の公式より

$$dxdydz = |J|d\xi d\eta d\zeta$$

なる関係を用いて式 (18) より

$$\begin{aligned}
 [K] &= \iiint [B]^T [D] [B] dxdydz \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta, \zeta)]^T [D(\xi, \eta, \zeta)] [B(\xi, \eta, \zeta)] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (38)
 \end{aligned}$$

で与えられる．このとき，積分の方法としては式 (31) を用いればよく，

$$[K]_+ = [B]_1^T [D] [B]_1 \det J_1 w_1 \quad (39)$$

$+$ の意味は， $K[24 \times 24]$ の行列の各要素に足し込むという意味である．ここまで計算できたら，今度は要素番号 2 に対して要素番号 1 と同じ計算をし，節点番号 8 まで繰り返す．最終的には，8 点におけるひずみと

$$[K] = [B]_1^T [D] [B]_1 \det J_1 w_1 + [B]_2^T [D] [B]_2 \det J_2 w_2 + \cdots + [B]_8^T [D] [B]_8 \det J_8 w_8 \quad (40)$$

なる剛性マトリックス $[K]$ を得ることになる．各節点における節点力は式 (13) より求めることができる．

4. 解析例

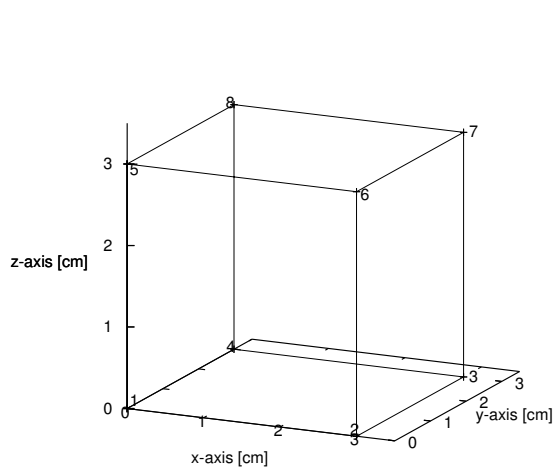
解析結果を 3 例ほど図 9 に示す (変形状態は表 3 参照) . 使用した材料の物性値を表 2 に示す . 例えば , 例 1 では鉛直 (z) 正方向に一樣に変形している . 本来 , 鉛直方向に力が作用した場合 , 物体は x , y 方向に縮む動きを見せる (式 (5) 参照) . ところが , 本場合では x , y 方向の変位を 0 と固定しているので , 縮もうとする反対の方向に力が作用している . また , 例 2 では y の正方向に一樣にせん断変形させているため , x 方向には力がかかっていない .

表 2:材料の物性値

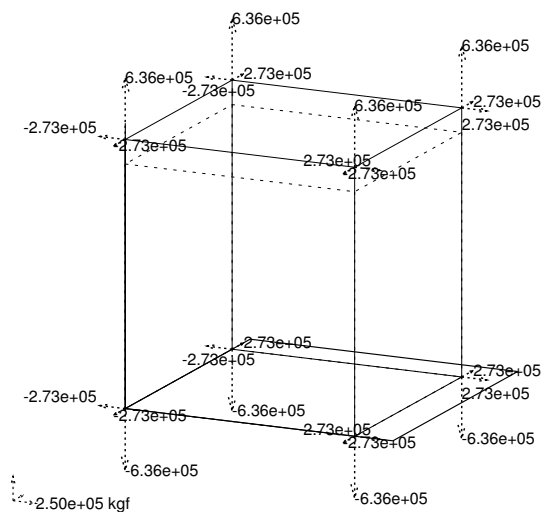
ヤング率	ポアソン比
$E[kgf/cm^2]$	γ
210000	0.30

表 3:解析例の変形状態

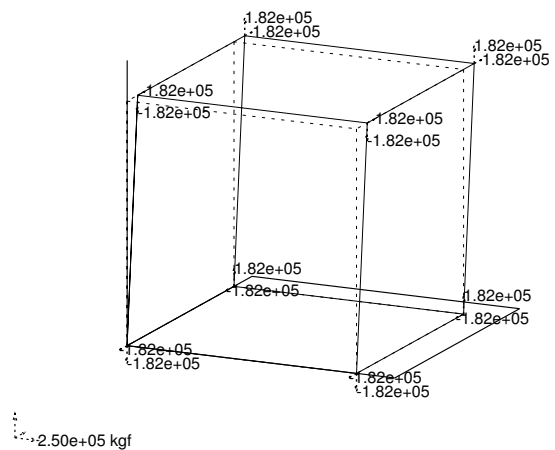
変位 (cm)		節点番号							
		1	2	3	4	5	6	7	8
例 1	u	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	v	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	w	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	0.3	0.3	0.3
例 2	u	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	v	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	0.3	0.3	0.3
	w	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
例 3	u	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.2	-0.1	0.0	0.0
	v	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.3
	w	0.3	0.3	0.3	0.3	0.1	0.0	0.0	0.3



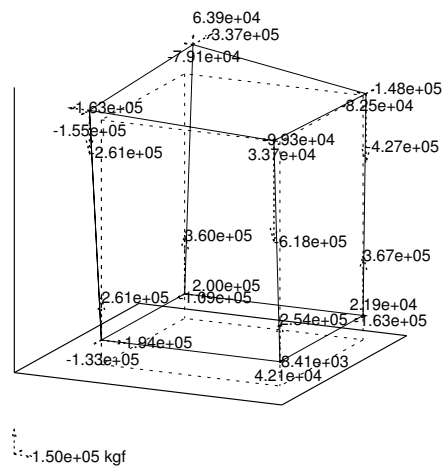
(a) 变形前



(b) 例 1



(c) 例 2



(d) 例 3

图 9: 解析例

5. プログラミング

本課題では、プログラム内で行列計算が多用されます。本課題では、その処理を行う関数をあらかじめ配布します。以下の URL から各自ダウンロードして使用してください。もちろん自作してもかまいません。

<http://suppon.kz.tsukuba.ac.jp/kameda/FEM/keisan.html>

表 5、表 6 に変数表と関数表を示します。プログラム作成の際に参考にしてください。

♠♠♠♠ プログラミングのヒント ♠♠♠♠

1. 表 6 の関数表がフローチャートとなっています。したがって、表 6 中の関数を上から順に作成すると良いと思います。
2. 本テーマでは、表 5 や表 6 で示すように行列を 1 次元配列で表現しています。行列計算では 2 次元配列を用いるのが常套手段と思いますが、1 次元配列を用いても計算可能です。1 次元配列を用いた場合の行列の表し方は、巻末の付録を参照してください。
3. 配列の添字（配列 $x[i]$ を例にとると、 $x[i]$ の i を添字と呼ぶ）は必ず「0」から始まります。例えば、 $x[8]$ の添字の範囲は 0 から 7 となります。つまり、節点 1 の x 方向の座標は $x[0]$ に、節点 2 の x 方向の座標は $x[1]$ 、... 節点 8 の x 方向の座標は $x[7]$ に格納されます。
4. 行列を配列の要素に格納する際、行と列の格納する順序を統一させてください。具体的に言うと、行列の 1 行目を要素に格納させたあとに 2 行目を要素に格納する、あるいは行列の 1 列目を要素に格納させたあとに 2 列目の要素に格納するのか統一をしてください（あらかじめ配布する関数は、前者を採用しています）。

参考文献

- [1] 有限要素法入門改訂版，三好俊郎，培風館，1994，11。
- [2] 有限要素法，山田嘉昭，科学技術出版社，1994。
- [3] マトリックス有限要素法 改訂新版，Zienkiewicz，R．L．Taylor，訳者代表 矢川元基，科学技術出版社，1996。
- [4] C 言語による有限要素法入門，森博嗣，森北出版，1989。
- [5] C 言語によるプログラミング [基礎編]，内田智史，オーム社，1991。

表 5:変数表

変数	型	説明
x[8] y[8] z[8]	double	節点の座標
u[8] v[8] w[8]	double	節点の変位
elxyz[8 × 3]	double	節点座標を格納する行列
disp[8 × 3]	double	節点変位を格納する行列
xi[8] eta[8] zeta[8]	double	ガウス点
B[6 × 24]	double	B マトリックス
D[6 × 6]	double	D マトリックス
K[24 × 24]	double	K マトリックス
shape[8]	double	形状関数 $N(\xi, \eta, \zeta)$
derive[3 × 8]	double	形状関数の偏微分 $\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
dNdxyz[3 × 8]	double	$\frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z}$ を一時的に格納するための行列
jacob[3 × 3]	double	ヤコビマトリックス
jacob _ i[3 × 3]	double	ヤコビマトリックスの逆行列
detj	double	detJ
E,po	double	ヤング率 , ポアソン比
strain[6]	double	strain=B × disp
force[24]	double	force=K × disp
ex[8],ey[8],ez[8],exy[8],eyx[8],ezx[8]	double	算出したひずみを格納

表 6:関数表

関数	型	説明
reader()	void	入力データの読み込み
make_D()	void	D マトリックスの作成
make_elxyz()	void	座標ベクトル・変位ベクトルの作成
make_gauss()	void	ガウス点の作成
make_shape()	void	形状関数とその偏微分の作成
make_jacob()	void	ヤコビ行列とその逆行列の作成
GetAdj(double *,double *)	double	逆行列の計算，返回值：det
make_dNdxyz()	void	$\frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial z}$ の作成
make_B()	void	B マトリックスの作成
make_strain()	void	ひずみの計算と格納
make_K()	void	$[K]_+ = [B]_i^T [D] [B]_i$ の計算
make_force()	void	$[force] = [K][disp]$ の計算
writer()	void	結果の書き込み
matx(double *,double *,double *,int,int,int)	void	行列のかけ算
tr(double *,double *,int,int)	void	転置行列の計算
prn_mat(double *,int,int)	void	行列の表示
writer()	void	結果の表示
graphic()	void	結果の図示

付録

1. 1 次元配列による行列の表し方

たとえば、2 次元配列を用いると n 行 m 列の行列は $n=3, m=4$ とすると、

```
double a[3][4];
```

と表せます。この行列の型は float ですが、何でも構いません。図 10 の例で、要素数は 12 個です。行列がどのように 2 次元配列の要素にどのように格納されたか書き出してみます。理解のため、行列にアルファベットを配置します。

$$\begin{array}{cccc} a[0][0] = A & a[0][1] = B & a[0][2] = C & a[0][3] = D \\ a[1][0] = E & a[1][1] = F & a[1][2] = G & a[1][3] = H \\ a[2][0] = I & a[2][1] = J & a[2][2] = K & a[2][3] = L \end{array} \quad (41)$$

それでは、この行列を 1 次元配列で表してみましょう。はじめに、配列の定義をします。1 次元配列なので、

```
double a[12];
```

と定義します。1 次元配列を用いると行列は次のように格納されます。

$$\begin{array}{cccc} a[0] = A & a[1] = B & a[2] = C & a[3] = D \\ a[4] = E & a[5] = F & a[6] = G & a[7] = H \\ a[8] = I & a[9] = J & a[10] = K & a[11] = L \end{array} \quad (42)$$

図 10 の例で i 行 j 列目は $a[4*(i-1)+(j-1)]$ に格納されます。ここで、式 (42) では行から配列に格納しましたが、列から格納することも可能です。

$$\begin{array}{cccc} a[0] = A & a[3] = B & a[6] = C & a[9] = D \\ a[1] = E & a[4] = F & a[7] = G & a[10] = H \\ a[2] = I & a[5] = J & a[8] = K & a[11] = L \end{array} \quad (43)$$

この場合、 i 行 j 列目は $a[(i-1)+3*(j-1)]$ に格納されます。本文中の「プログラムのヒント」にも書きましたが、この順序を統一させてください。あらかじめ配布する関数等は前者を採用しています。

2. 解析結果の出力方法について

図 9 の解析例は gnuplot を用いて図示してあります。本プログラムでは、C 言語で gnuplot を制御できるようにするための GPTCALL なるパッケージを使用しました [1]。詳しい使用方法については、付属のマニュアルを参考にしてください。gnuplot の使い方については、ホームページ [2] が参考になると思います。なお、図 9 の解析例において各節点力のベクトルの大きさは、節点 1 における x 方向の節点力で基準化してあります。

参考ホームページ

[1]<http://phe.phyas.aichi-edu.ac.jp/~cyamauch/gptcall.html>

[2]<http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/index.html>