

有限要素法 (FEM) を用いた MHD 発電機内電位と電流分布の計算

1 目的

MHD 発電機内では高速プラズマと電磁場が強く相互作用しているが、本計算ではプラズマ速度、導電率、ホール係数の分布が与えられている条件で、3次元有限要素法を用いて、電位分布を求め、さらに一般化されたオームの法則を適用することにより、MHD 発電機内の電流分布を求めるプログラムの作成を通して、有限要素解析の手法を学習する。

2 有限要素法概説

ガラーキン有限要素法 (Galerkin finite element method: GFEM) は、重み付き残差法 (method of weighted residuals) の代表的なものとして知られている手法で、電磁界・構造・流体の解析に広く用いられているものである。

領域 V で定義された A に関する微分方程式

$$f(A) = 0 \quad (1)$$

を近似的に解くことを考える。 A の近似値 A' は、一般に式 (1) を満たさず、

$$f(A') = R \quad (2)$$

となり、残差 (residual) R が生じる。最良の近似解を得るには、残差 R の領域全体にわたる積分 (和) が最小になるようにすれば良い、と考えるのが重み付き残差法である。つまり、

$$\int_V R dV \longrightarrow \text{最小} \quad (3)$$

ここで、重み関数 (weighting function) というものを導入すれば、領域全体で残差の重み付き積分を零にすることができる。重み関数を ϕ^* とすると、重み付き残差法の一般式は次式で表される。

$$\int_V R \cdot \phi^* dV = 0 \quad (4)$$

このとき、重み関数の選び方には種々の方法があるが、重み関数 ϕ^* を補間関数 (interpolation function) N_i に等しくしたものをガラーキン有限要素法と呼ぶ。

まずはラプラス方程式 (Laplace equation) を例にあげ、重み付き残差法について説明をしていく。

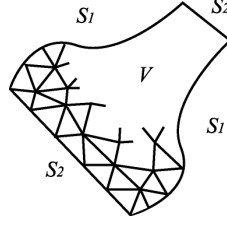


図 1: 有限要素分割と境界

ラプラス方程式を式 (5) に示す。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

式 (5) は、与えられた領域 V の内部で成り立つ関係である。この方程式を解くには、この領域 V の境界上において境界条件 (boundary condition) を与える必要がある。いま、2 種類の境界条件を考えることとする。

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } S_1 \quad (6)$$

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial x} l + \frac{\partial \phi}{\partial y} m = \hat{q} \quad \text{on } S_2 \quad (7)$$

ここで、式 (6) は図 1 における境界 S_1 上でポテンシャル ϕ の値が規定される基本境界条件¹、式 (7) は境界 S_2 上で直角な流束 q の与えられる自然境界条件²である。また、ハットの付いた値は境界上で与えられる既知量を、 l, m は境界に立てた法線方向余弦である。なお、図 1 に示すように、境界 S_1, S_2 は重なり合わず、境界 S_1, S_2 を合わせたもので全境界 S が構成されるものとする。

重み付き残差法では、図 1 に示すように、有限要素 (finite element) に分割することから始める。有限要素の形状には様々な種類が考えられるが、三角形要素を考えたものが最も簡単なので、ここでは三角形要素を用いることとする。任意に選んだ 1 つの有限要素に着目し、まずこの要素に関する重み付き残差方程式を作成することにする。さらに、これを重ね合わせることで、全体系の重み付き残差方程式を誘導することを考える。1 つの三角形有限要素の面積を v 、三角形有限要素の 3 辺を境界 s とする。式 (5) の両辺に、任意に選ばれた重み関数 ϕ^* を掛け、有限要素内部について積分すれば、次式を得ることができる。

$$\int_v \phi^* \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dxdy = 0 \quad (8)$$

ここに、重み関数 ϕ^* は、重み付けを行う関数であるので、任意の値を取り得る関数である。さて、1 つの有限要素に着目しているが、境界上に位置する要素もある。そこで、後の処理を考えて、重み関数 ϕ^* は、境界 S_1 では 0 となる条件を付加することとする。

$$\phi^* = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (9)$$

部分積分によって式 (8) を変形し、さらにガウスの発散定理 (divergence theorem of Gauss) を適用する。

$$\int_v \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dxdy = \int_s \left\{ \phi^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} l + \frac{\partial \phi}{\partial y} m \right) \right\} ds \quad (10)$$

¹ディリクレ条件 (Dirichlet condition) と呼ばれる。

²ノイマン条件 (Neumann condition) と呼ばれる。

なお、式 (10) の右辺側の項には、式 (7) で与えられた境界条件が含まれている。式 (10) が、1 つの有限要素について成り立つ重み付き残差方程式である。式 (10) は、式 (8) と等価な方程式となっている。しかし、両者の違いは、式 (10) には、 ϕ の x と y に関する二階微分を含んでいるのに対し、式 (10) には、重み関数 ϕ^* と ϕ の一階の微分のみによって構成されていることである。このことは、後述の一次多項式による近似を用いる上に極めて都合がよい方程式となっている。

さて、式 (10) は、有限要素 1 つ 1 つについて成り立っている方程式である。個々の要素に関して式 (10) をたて、これらを全部重ね合わせると、要素と要素の境界線上において、積分の方向が逆となることからそれぞれ打ち消しあい、全体系について立てた重み付き残差方程式は、次のようになる。

$$\int_V \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \int_S \left\{ \phi^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} l + \frac{\partial \phi}{\partial y} m \right) \right\} ds \quad (11)$$

ただし、式 (11) においては、 V を解析領域全体を、また S を解析領域を囲む境界全体を表している。すなわち、個々の有限要素について立てた式 (10) において、その解析領域を有限要素 1 つ 1 つの面積または v から全体の解析領域 V へ、更に 1 つ 1 つの要素の境界 s から解析領域全体の境界 S と読み替えるだけで全体系に関する式 (11) が得られることになる。全体系に関する重み付き残差方程式 (11) は、式 (7) を用いることにより、次のように変形することができる。まず、境界 S は S_1 (基本境界条件) と S_2 (自然境界条件) とにより構成されている。さらに、式 (9) に示すように境界 S_1 上では重み関数 ϕ^* を 0 となるように定めたので、これを考慮すれば、

$$\int_V \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \int_{S_2} (\phi^* \hat{q}) dS \quad (12)$$

とすることができる。式 (12) が全体系に対する重み付き残差方程式であり、有限要素解析の基本となる方程式である。これは、個々の有限要素について立てた式 (10) を全体系に重ね合わせることによって求める。この思想を受け継ぎ、個別に有限要素法の近似方程式を導き、これを全体系に重ね合わせることで解析を進める。

一般に、有限要素解析においては多くの補間関数のとり方が考えられるが、ここでは最も簡単でかつよく使われるものを考えることにする。図 2 に示すように三角形有限要素を用い、三角形有限要素内部のポテンシャル分布を座標 x, y について 1 次式で表現できるものとする。すなわち有限要素内部のポテンシャルの分布を次の 1 次式で仮定する。

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (13)$$

ここに、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は未定定数である。式 (13) のように有限要素内の未知関数を近似した関係を補間関数と呼ぶ。図 2 の三角形有限要素の 3 つの頂点に 1, 2, 3 の番号を付けておく。また、3 頂点のポテンシャルの値を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 で表す。ところで、式 (13) にそれぞれの節点でのポテンシャルの値に一致しなければならない。すなわち、

$$\begin{cases} \phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ \phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{cases} \quad (14)$$

となる関係が成立する。ここに、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ はそれぞれ 1, 2, 3 頂点の x, y 座標である。

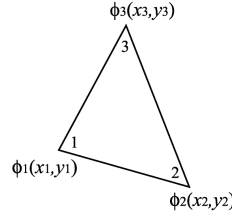


図 2: 三角形有限要素と節点

式 (14) を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ について解くと、

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 \\ \alpha_2 = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 \\ \alpha_3 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 \end{cases} \quad (15)$$

と表すことができる。ただし、

$$\begin{cases} a_i = \frac{1}{2\Delta}(x_j y_k - x_k y_j) \\ b_i = \frac{1}{2\Delta}(y_j - y_k) \\ c_i = \frac{1}{2\Delta}(x_k - x_j) \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (16)$$

である。ここに Δ は三角形の面積で、

$$\Delta = \frac{1}{2}\{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)\} \quad (17)$$

である。式 (16), (17) では $i = 1, j = 2, k = 3$ とし、以後繰り返すものとする。次に、式 (15) を改めて式 (13) に代入して整理することにより、補間関数を次のように表すことができる。

$$\phi = \Phi_1(x, y)\phi_1 + \Phi_2(x, y)\phi_2 + \Phi_3(x, y)\phi_3 \quad (18)$$

ここに、

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y \\ \Phi_2(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y \\ \Phi_3(x, y) = a_3 + b_3x + c_3y \end{cases} \quad (19)$$

である。式 (19) は、三角形有限要素内におけるポテンシャル分布を座標 x, y に関して線形であるとして、有限要素の各節点におけるポテンシャル値に一致するように定められた補間関数である。 $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), \Phi_3(x, y)$ は、ポテンシャルの有限要素内部の分布の近似形状を表す関数であるので、形状関数と呼ばれる場合がある。これらはそれぞれ着目する節点において 1 なる値をとり、他の節点で 0 となるように線形に変化する図 3 に示すような関数である。

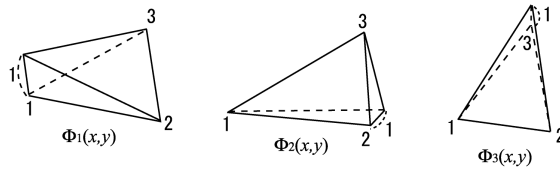


図 3: 1 次の形状関数

一方、重み関数についても、補間関数と同一の形式の関数形を用いることとする。すなわち、次のような関数を重み関数とする。

$$\phi^* = \Phi_1(x, y)\phi_1^* + \Phi_2(x, y)\phi_2^* + \Phi_3(x, y)\phi_3^* \quad (20)$$

ここに、 $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$, $\Phi_3(x, y)$ は式 (19) によって与えられる関数値である。また、 ϕ_1^* , ϕ_2^* , ϕ_3^* は三角形有限要素の 3 頂点における重み関数の値である。重み関数 ϕ^* は任意の値をとる関数であることから、 ϕ_1^* , ϕ_2^* , ϕ_3^* は任意の値をとることのできる定数である。一般に、重み関数と補間関数とを同一の関数形で与える近似解法をガラーキン法と呼んでいる。

有限要素に関する重み付き残差方程式 (10) と、有限要素に関する補間関数式 (18)、重み関数式 (20) を用いて、有限要素に関する有限要素方程式を作成する。まず、式 (18) を x, y に対して微分した関係を求めると、それぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここに、 $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ は有限要素の各節点の座標値が与えられれば式 (16) から計算できる量である。重み関数に関しても、同様の扱いができる。

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \phi_3^* \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \phi_3^* \end{bmatrix} \quad (24)$$

式 (18) ~ (24) を式 (12) に代入する。ここで、 $\phi_1^* \sim \phi_3^*$ が任意に選択できる値であることを考慮して整理すると、次のような有限要素方程式を得ることができる。

$$[\mathbf{K}]\{\phi\} = [\mathbf{F}] \quad (25)$$

ここに、

$$[\mathbf{K}] = \Delta \begin{bmatrix} (b_1b_1 + c_1c_1) & (b_1b_2 + c_1c_2) & (b_1b_3 + c_1c_3) \\ (b_2b_1 + c_2c_1) & (b_2b_2 + c_2c_2) & (b_2b_3 + c_2c_3) \\ (b_3b_1 + c_3c_1) & (b_3b_2 + c_3c_2) & (b_3b_3 + c_3c_3) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_S (\Phi_1 q) ds \\ \int_S (\Phi_2 q) ds \\ \int_S (\Phi_3 q) ds \end{Bmatrix} \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

である。 Δ は、三角形有限要素の面積であり、各節点の座標値を用いて式 (17) で与えられる。ここで得られた有限要素方程式は、有限要素ごとに作成されたものであり、要素の総数の組だけ作成

される。これを重ね合わせた方程式（総節点数 × 総節点数のマトリックス）を解くことにより解が得られる。

4 節点四面体 1 次要素

本解析のような 3 次元解析においては四面体要素を用いている。4 節点四面体 1 次要素は、2 次元 3 節点三角形要素を 3 次元に拡張した要素であることから、2 次元要素のときの考え方をそのまま適用することができる。図 4 に示す四面体について、内部の変数を 4 節点の変数により 1 次多項式で近似すると、任意の点の変数 ϕ は次のように表すことができる。

$$\phi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad (28)$$

図 4: 4 節点四面体要素

したがって、各節点での関係は次に示すマトリックスとなる。

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式 (29) より $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求める。

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k & a_l \\ b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここで、各係数は次の行列式で表されている。なお、 V は四面体要素の体積を表す。

$$a_i = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad b_i = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad c_i = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}$$

$$d_i = -\frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

以下、三角形要素の場合と同様に考えて進めていけば良い。

3 FEM による MHD 発電機内電位と電流分布の計算

3.1 基礎方程式

3.1.1 Maxwell の第 2 電磁方程式および電荷連続の式

MHD 発電チャンネル内における電磁気学的諸量に関しては、次に示す仮定が成り立つとする。

- 印加磁束密度は時間的に変化しない。
- 磁気レイノルズ数は十分小さいので、電流に伴う誘導磁界は無視できる。
- 流体内を流れる変位電流は、伝導電流に比べ十分小さく無視できる。

以上の仮定により、Maxwell の第 2 電磁方程式および電荷連続の式は次のように記述される。

Maxwell の第 2 電磁方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (31)$$

電荷連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (32)$$

式 (31) から一価関数として電位の存在が保証され、次節の一般化されたオームの法則を用いることで式 (32) から 3.1.3 節で述べる電位に関する方程式が導出される。

3.1.2 一般化されたオームの法則

MHD 発電チャンネル内において、荷電粒子は電界、磁界、電子圧力勾配、粒子の慣性による力を受ける。これらすべての力を考慮したのが以下に示す一般化されたオームの法則である。

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\beta}{|\mathbf{B}|}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \frac{\beta \cdot \beta_i}{|\mathbf{B}|^2}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\sigma}{n_e e} \nabla p_e - \tau \cdot \frac{D\mathbf{J}}{Dt} \quad (33)$$

ただし、 σ : 導電率, β : 電子のホールパラメータ, β_i : イオンのホールパラメータ, n_e : 電子密度, e : 電子の電荷, p_e : 電子圧力, τ : 衝突時間、である。

3.1.3 有限要素式および全体節点方程式の導出

本研究で扱うような通常の MHD 発電機チャンネル内のプラズマは弱電離プラズマと考えられ、式 (33) の右辺第 3, 4, 5 項は第 1, 2 項に比べて十分小さく無視できる。したがって、一般化されたオームの法則は次のようになる。

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\beta}{|\mathbf{B}|}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (34)$$

式 (34) から、成分ごとに表した以下の 3 つの式

$$J_x = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \{ (E_x + vB) - \beta(E_y - uB) \} \quad (35)$$

$$J_y = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \{ \beta(E_x + vB) + (E_y - uB) \} \quad (36)$$

$$J_z = \sigma E_z \quad (37)$$

と Maxwell 方程式を満たすようなポテンシャル ϕ による以下の式

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (38)$$

の式 (35) から式 (38) を式 (32) に代入して、以下に示す電位 ϕ に関する二階偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\phi}{\partial y} + \beta uB + vB \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\beta \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} - uB + \beta vB \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\sigma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (39)$$

式 (39) の左辺を残差 R としてガラーキンの式に代入する。

$$\int_v N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\phi}{\partial y} + \beta uB + vB \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\beta \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} - uB + \beta vB \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\sigma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] dv = 0 \quad (40)$$

これを部分積分して、

$$\int_v \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\phi}{\partial y} + \beta uB + vB \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\beta \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} - uB + \beta vB \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sigma \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} dv - \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (J_x N_i) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y N_i) + \frac{\partial}{\partial z} (J_z N_i) \right\} dv = 0 \quad (41)$$

ガウスの発散定理により、

$$\int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (J_x N_i) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y N_i) + \frac{\partial}{\partial z} (J_z N_i) \right\} dv = \int_v \nabla \cdot (\mathbf{J} N_i) dv = \int_{S_i} J_n N_i dS \quad (42)$$

であるから、

$$\int_v \left[\left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\phi}{\partial y} + \beta uB + vB \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\beta \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} - uB + \beta vB \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} - \sigma \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] dv - \int_{S_i} J_n N_i dS = 0 \quad (43)$$

ただし、 S_i : 四面体要素 v_i の表面、である。

上式は各節点について方程式を立てているが、これを各四面体要素の頂点についてそれぞれ立てて、全要素をとると次式ようになる。

$$\sum_e \left[\int_{ve} \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left(-\{N_x\}\{N_x\}^t - \{N_y\}\{N_y\} + \beta\{N_x\}\{N_y\}^t - \beta\{N_y\}\{N_x\}^t \right) - \sigma\{N_z\}\{N_z\}^t \right\} dv \{\phi^e\} + \int_{ve} \left\{ \frac{\sigma}{1+\beta^2} (\{N_x\}(\beta uB + vB) + \{N_y\}(-uB + \beta vB)) \right\} dv \right] - \int_{Se} J_n \{N\} dS = 0 \quad (44)$$

ただし、 v_e : 各要素の占める領域、 S_e : 各要素 v_e の表面、

$$\{N\} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}, \quad \{\phi\}^e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}, \quad \{N_x\} = \frac{\partial}{\partial x}\{N\}, \quad \{N_y\} = \frac{\partial}{\partial y}\{N\}, \quad \{N_z\} = \frac{\partial}{\partial z}\{N\}$$

$$\{N_x\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad \{N_y\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, \quad \{N_z\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

以上より、全体節点方程式は次式のように表される。

$$\sum_e ([K^e]\{\phi\}^e - [F_1^e] - [F_2^e]) = 0$$

ただし、

$$[K^e] = \int_{v_e} \left\{ \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (-\{N_x\}\{N_x\}^t - \{N_y\}\{N_y\}^t + \beta\{N_x\}\{N_y\}^t - \beta\{N_y\}\{N_x\}^t) - \sigma\{N_z\}\{N_z\}^t \right\} dv$$

$$[F_1^e] = \int_{v_e} \left\{ \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (\{N_x\}(\beta u B + v B) + \{N_y\}(-u B + \beta v B)) \right\} dv$$

$$[F_2^e] = \int_{S_e} J_n \{N\} dS$$

上式で表される連立一次方程式を、本解析では gauss-seidel 法を適用することで解き、ポテンシャル ϕ を求める。 ϕ が求まれば式 (38) より電界も求められ、プログラム中では各メッシュの導電率も計算されているので、式 (35) ~ 式 (37) より電流密度も求めることができる。

$$[K_e] = \begin{bmatrix} -\kappa(b_1^2 + c_1^2) - \sigma d_1^2 & -\kappa(b_1 b_2 + c_1 c_2) + \kappa\beta(b_1 c_2 - c_1 b_2) - \sigma d_1 d_2 & & & \\ -\kappa(b_1 b_2 + c_1 c_2) + \kappa\beta(b_2 c_1 - c_2 b_1) - \sigma d_1 d_2 & -\kappa(b_2^2 + c_2^2) - \sigma d_2^2 & & & \\ -\kappa(b_1 b_3 + c_1 c_3) + \kappa\beta(b_3 c_1 - c_3 b_1) - \sigma d_1 d_3 & -\kappa(b_2 b_3 + c_2 c_3) + \kappa\beta(b_3 c_2 - c_3 b_2) - \sigma d_2 d_3 & & & \\ -\kappa(b_1 b_4 + c_1 c_4) + \kappa\beta(b_4 c_1 - c_4 b_1) - \sigma d_1 d_4 & -\kappa(b_2 b_4 + c_2 c_4) + \kappa\beta(b_4 c_2 - c_4 b_2) - \sigma d_2 d_4 & & & \\ -\kappa(b_1 b_3 + c_1 c_3) + \kappa\beta(b_1 c_3 - c_1 b_3) - \sigma d_1 d_3 & -\kappa(b_1 b_4 + c_1 c_4) + \kappa\beta(b_1 c_4 - c_1 b_4) - \sigma d_1 d_4 & & & \\ -\kappa(b_2 b_3 + c_2 c_3) + \kappa\beta(b_2 c_3 - c_2 b_3) - \sigma d_2 d_3 & -\kappa(b_2 b_4 + c_2 c_4) + \kappa\beta(b_2 c_4 - c_2 b_4) - \sigma d_2 d_4 & & & \\ -\kappa(b_3^2 + c_3^2) - \sigma d_3^2 & -\kappa(b_3 b_4 + c_3 c_4) + \kappa\beta(b_3 c_4 - c_3 b_4) - \sigma d_3 d_4 & & & \\ -\kappa(b_3 b_4 + c_3 c_4) + \kappa\beta(b_4 c_3 - c_4 b_3) - \sigma d_3 d_4 & -\kappa(b_4^2 + c_4^2) - \sigma d_4^2 & & & \end{bmatrix}$$

$$[F_1^e] = - \begin{bmatrix} \kappa \frac{\partial N_1}{\partial x} (\beta u B + v B) \\ \kappa \frac{\partial N_2}{\partial x} (\beta u B + v B) \\ \kappa \frac{\partial N_3}{\partial x} (\beta u B + v B) \\ \kappa \frac{\partial N_4}{\partial x} (\beta u B + v B) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa \frac{\partial N_1}{\partial y} (-u B + \beta v B) \\ \kappa \frac{\partial N_2}{\partial y} (-u B + \beta v B) \\ \kappa \frac{\partial N_3}{\partial y} (-u B + \beta v B) \\ \kappa \frac{\partial N_4}{\partial y} (-u B + \beta v B) \end{bmatrix} = -\kappa \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} (\beta u B + v B) + \frac{\partial N_1}{\partial y} (-u B + \beta v B) \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} (\beta u B + v B) + \frac{\partial N_2}{\partial y} (-u B + \beta v B) \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} (\beta u B + v B) + \frac{\partial N_3}{\partial y} (-u B + \beta v B) \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} (\beta u B + v B) + \frac{\partial N_4}{\partial y} (-u B + \beta v B) \end{bmatrix}$$

$$= -\kappa \begin{bmatrix} b_1 (\beta u B + v B) + c_1 (-u B + \beta v B) \\ b_2 (\beta u B + v B) + c_2 (-u B + \beta v B) \\ b_3 (\beta u B + v B) + c_3 (-u B + \beta v B) \\ b_4 (\beta u B + v B) + c_4 (-u B + \beta v B) \end{bmatrix}$$

ただし、 $\kappa = \frac{\sigma}{1+\beta^2}$

4 解析例

MHD 発電機内の電位および電流密度の解析結果の一例を以下に示す。

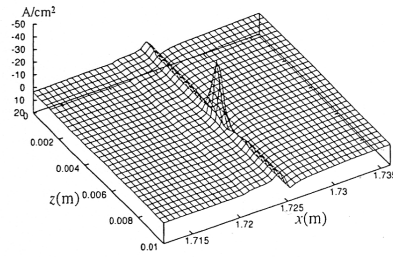


図 5: アノード側 $y = 0.1mm$ 断面における J_x

参考文献

- [1] 「有限要素法概説」 菊地文雄著 サイエンス社
- [2] 「基礎工学におけるマトリックス有限要素法」 O・C・ツイエンキーヴィッツ著 培風館

付録 A 実験の具体的内容

今回の実験では、ファラデー形 MHD 発電機の電極近傍の小領域を解析対象として電位・電流分布の計算を行う（図 6）。この小領域に、 x 方向に 7 つ、 y 方向に 5 つ、 z 方向に 5 つの節点を考え、四面体要素で分割する。

今回は、これまでの説明で触れた理論を背景に、C 言語を用いて全体節点方程式のルーチンを作成する。つまり、A マトリックスおよび b ベクトルを作成する。

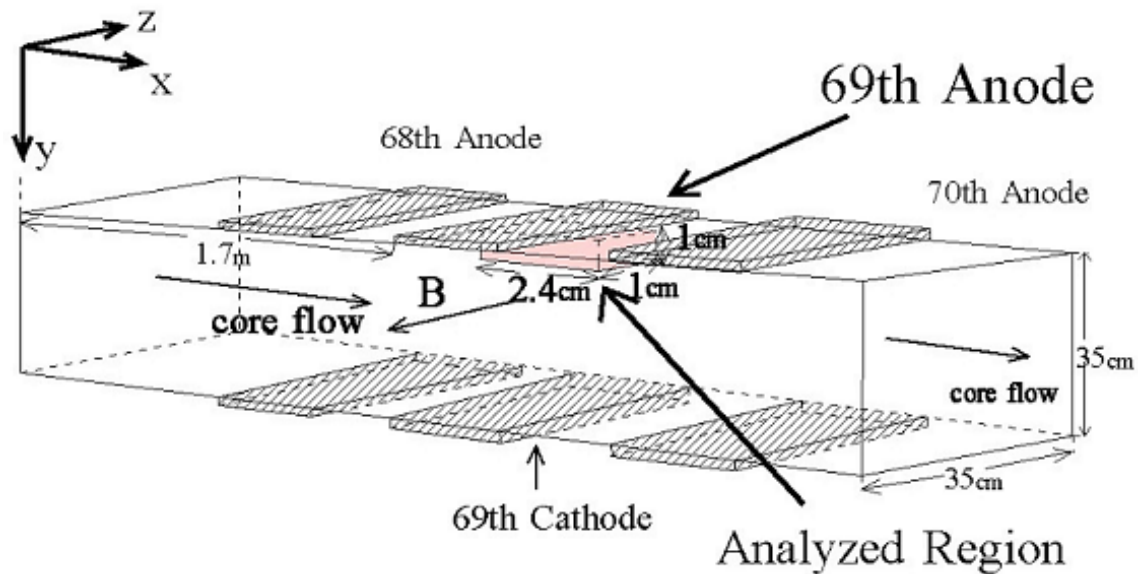


図 6: 解析対象のファラデー形 MHD 発電機

全体節点方程式のルーチンのアルゴリズム

1. 一つの四面体要素の A 行列および b ベクトルを初期化する。
 2. 一つの四面体要素の各点に流体および電磁気諸量 ($u[nxyz], v[nxyz], sig[nxyz], bet[nxyz], bfield[nxyz]$) を代入する。
 3. 一つの四面体要素の各点の座標を求める。
 4. 一つの四面体要素の各点での流体および電磁気諸量の平均値をとる。
 5. 体積座標を求める。
 6. 一つの四面体要素の A 行列を求める。
 7. 一つの四面体要素の b ベクトルを求める。
 8. A 行列および b ベクトルを重ね合わせる。
- 2 から 8 を四面体要素の数だけ繰り返す。

計算コード中の変数名について

計算コード中の変数	その意味
nx	x 方向節点数
ny	y 方向節点数
nz	z 方向節点数
nxyz	全節点数
nnx	x 方向分割数
nny	y 方向分割数
nnz	z 方向分割数
nf	四面体要素の数
ajx[nxyz]	電流密度 J_x
ajy[nxyz]	電流密度 J_y
ajz[nxyz]	電流密度 J_z
ajh[nxyz]	$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$
np[nf][4]	各四面体要素の全体節点番号
sig[nxyz]	導電率
bet[nxyz]	ホールパラメータ
a[nxyz][nxyz]	A マトリックス
phi[nxyz]	b ベクトル
xx[nx]	x 座標
yy[ny]	y 座標
zz[nz]	z 座標
bfield[nx]	磁束密度 B
ex[nxyz]	電界 E_x
ey[nxyz]	電界 E_y
ez[nxyz]	電界 E_z
uu[nx][ny][nz]	x 方向流速 u
vv[nx][ny][nz]	y 方向流速 v
ww[nx][ny][nz]	z 方向流速 w
p[nx][ny][nz]	圧力 p
ro[nx][ny][nz]	質量密度 ρ
t[nx][ny][nz]	温度 T

付録 B GNUPLOT の使い方

コンピュータで得られる計算結果はただの数値の羅列である。その数値の羅列（計算結果）を意味のあるものにするためには、可視化（図示）が必要である。ここでは、GNUPLOT というソフトの使い方について簡単に説明する。なお、GNUPLOT の詳細な説明は、

- <http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/>
- <http://wwwi.edu.esys.tsukuba.ac.jp/manual/Chap1-linux/12-application/node2.html>

などに述べられているので、自分で調べてみて下さい。

GNUPLOT の起動

kterm 等の端末上で『gnuplot』と入力すると、GNUPLOT が起動する。何行かのメッセージが現われた後、最終行に GNUPLOT のプロンプト (*gnuplot>*) が現れる。

```
ant00% gnuplot
      G N U P L O T
      Unix version 3.5 (pre 3.6)
      patchlevel beta 340 (+1.1.4 1998/04/04)
      last modified Tue Nov 25 22:57:44 GMT 1997

      Copyright(C) 1986 - 1993, 1997
      Thomas Williams, Colin Kelley and many others

      Send comments and requests for help to info-gnuplot@dartmouth.edu
      Send bugs, suggestions and mods to bug-gnuplot@dartmouth.edu

      Terminal type set to 'x11'
gnuplot> ( gnuplot が起動した )
```

(kterm 上)

関数のグラフ化

GNUPLOT でグラフ化する場合、2 次元グラフを作るには plot コマンドを、3 次元グラフを作るには splot コマンドを用いる。

手始めに、 $y = \sin x$ をグラフ化してみる。GNUPLOT のプロンプトに次のように入力する。『plot』に続く $[0 : 10]$ はグラフの x 軸の範囲を指定しており、この場合 $0 \leq x \leq 10$ の範囲でグラフが描かれることになる。

```
gnuplot> plot [0:10] sin(x)
```

すると、図 7 のようなグラフが得られる。

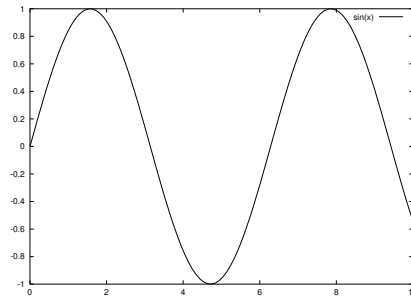


図 7: 関数のグラフ化の例

数値データからのグラフ化

我々が今回の計算で直接得られるのは、数値の膨大な羅列（数値データ）である。そのグラフ化について説明する。今回の計算では、3つのデータファイル（jx.dat, jy.dat, jz.dat）が最終結果として得られる。データファイルには、左から『 x 座標』『 z 座標』『電流値（ J_x ）』という順番で、次のように数値が収められている。

1.700000	0.000000	0.000000
1.700000	0.002500	0.000000
1.700000	0.005000	0.000000
1.700000	0.007500	0.000000
1.700000	0.010000	0.000000
1.704000	0.000000	0.000000
1.704000	0.002500	0.000000
1.704000	0.005000	0.000000
1.704000	0.007500	0.000000
1.704000	0.010000	0.000000
...

（データファイルの中身）

このデータファイルの名前を jx.dat とする時、GNUPLOT のプロンプトに次のように入力すると、第1軸に x 座標、第2軸に z 座標、第3軸に電流値 J_y の値が入った図 8(a) のようなグラフが得られる。

```
gnuplot> splot 'jx.dat' with lines
```

軸名・タイトル・凡例

図 8 のグラフを見ると、軸名・タイトルが入っていないことが分かる。これらを入れるには、set コマンドを用いて、次のように入力する。すると、図 8(b) のように、軸名とタイトルが入る。

```

gnuplot> set xlabel 'x [m]' ( 第 1 軸 )
gnuplot> set ylabel 'z [m]' ( 第 2 軸 )
gnuplot> set zlabel 'Jy [A/m2]' ( 第 3 軸 )
gnuplot> set title 'Distribution of y-component of electrical current density' ( タイトル )
gnuplot> splot 'jx.dat' with lines

```

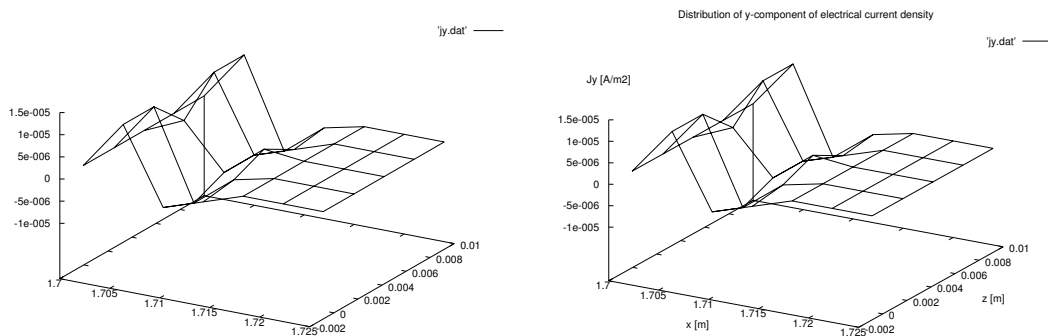


図 8: (a) 数値データからのグラフ化 (デフォルト)

(b) 軸名・タイトルあり

また、図 8 の各グラフの右上に何か書いてある。それは『凡例』といい、グラフの説明をしている。凡例の表題を変えたい場合は、下線部を追加する。

```

gnuplot> splot 'jx.dat' title 'Jy' with lines

```

凡例を消したい場合は、下線部のように入力する。

```

gnuplot> set nokey
gnuplot> splot 'jx.dat' with lines

```

グラフの出力・保存

これまでの説明で、グラフを作って見られるようになった。しかし、さらに、そのグラフをファイルに保存しなければならない。保存する際には、どのフォーマット (形式) にするかを必要がある。今回は、グラフを EPS というフォーマットで出力し、保存する。

```

gnuplot> set terminal postscript eps ( 出力フォーマットの変換 )
gnuplot> set output 'jy.eps' ( グラフを保存するファイル名の指定 )
gnuplot> splot 'jx.dat' with lines

```

すると、これまでのようにグラフは画面上に表示されなくなり、jy.eps というファイルに書き込まれることになる。

一旦出力フォーマットを変換してしまうと、そのフォーマットが維持され、当初のようにグラフが画面上に表示されなくなる。元に戻すには、もう一度出力フォーマットを変換する必要がある。

```

gnuplot> set terminal X11 ( 出力フォーマットの変換 )
gnuplot> splot 'jx.dat' with lines

```

GNUPLOT の終了

GNUPLOT を終了させるためには、プロンプトに『exit』と入力する。

```
gnuplot> exit
```