

3次元的な塑性域の拡がりを考慮した木材はり要素の開発

Development of a Timber Beam Element Considering Three-dimensional Expansion of a Plastic Region

大場友暁¹⁾ 伊藤慎也²⁾ 磯部大吾郎³⁾
Tomoaki Ohba, Shinya Ito and Daigoro Isobe

¹⁾筑波大学大学院システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: s2530198@u.tsukuba.ac.jp)

²⁾筑波大学大学院システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, 現: 川崎車両株式会社,
E-mail: s2320834@u.tsukuba.ac.jp)

³⁾博 (工) 筑波大学システム情報系 教授 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: isobe@kz.tsukuba.ac.jp)

This study combines a novel beam element with the ASI-Gauss technique to develop a method for fast and accurate three-dimensional analysis of timber structures. The beam element lowers its stiffness by adjusting sectional constants, which are determined by selecting several sections across the beam and taking an average of their sectional constants. This process enables the element to consider the three-dimensional expansion of a plastic region. Four methods were implemented in this study for selecting sections during the calculation of averaged sectional constants, and their accuracy was evaluated through comparison with finite element analyses using solid elements.

Key Words : Timber beam, Plastic region, Elasto-plastic analysis, ASI-Gauss technique

1. はじめに

わが国では近年、地震や津波といった災害時に木造建築が深刻な被害を受けており、既存の木造建築に対する強度評価の需要が高まっている。また、限界状態設計法の普及や、住宅のみならず大規模な公共建築の木造化も進んでおり [1]、各種の荷重を受ける木造建築の弾塑性挙動を高精度に把握し耐力を求めることは、ますます重要性を増していると言える。

ここで、建築物などの骨組構造の解析には、計算効率の観点からはり要素がよく用いられる。特に、筆者らにより開発された、はり要素有限要素法の一つである ASI-Gauss 法 [2] を用いると、1 部材 2 要素分割でも高精度な弾塑性解析が可能となる。しかし、これまで ASI-Gauss 法による弾塑性解析では、塑性ヒンジ法が用いられてきた。この方法では、塑性化判定と同時に要素の剛性を急激に低下させる。一方、木材は引張側では脆性的、圧縮側では塑性化し靱性を示すという特徴を有する [3] ことから、曲げ変形時は圧縮側から塑性域が進展し、剛性低下は比較的緩やかに進行する。したがって、ASI-Gauss 法を木造建築の弾塑性解析に適用するにあたり、部材中の塑性域の拡がりを考慮することが重要と考えられる。特に実用上の観点から、立体骨組構造の解析に対応するため、3次元的な塑性域の拡がりを考慮する必要がある。

そこで本研究では、平沢ら [4] や岩崎ら [5] によって適用されてきた、「塑性化の拡がりに伴う剛性低下を、断面積や断面二次モーメントの減少として表現する」という考えに基づき、3次元的な塑性域の拡がりを考慮した剛性低下処理を行うはり要素を開発し、ASI-Gauss 法に導入した。そして他の解析手法との比較を行い、妥当性・有用性を検証した。

2. ASI-Gauss 法

ASI-Gauss 法 [2] は、線形チモシェンコはり要素を用いた有限要素法の一つであり、次式 (1) に示す増分型の仮想仕事原理式に基づき定式化される。

$$\int_{-l_n/2}^{l_n/2} \delta \Delta_n \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta_n \boldsymbol{\sigma} dz - \delta \Delta_n \mathbf{u}^T \Delta_n \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

ここで、 l_n 、 $\Delta_n \boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\Delta_n \boldsymbol{\sigma}$ 、 $\Delta_n \mathbf{u}$ 、 $\Delta_n \mathbf{f}$ は解析の n ステップ目における要素長、一般化ひずみ増分ベクトル、一般化断面力増分ベクトル、節点変位増分ベクトル、外力増分ベクトルである。 δ 、 Δ_n は変分および n ステップにおける増分を表す。

各解析ステップでは、式 (1) から得られる、次式 (2) に示す増分型の運動方程式を解く。

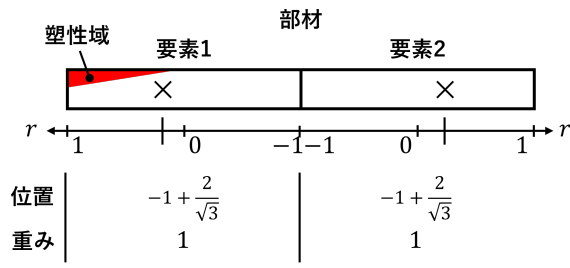
$$M \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + C \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + K \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t \quad (2)$$

ここで、 M 、 C 、 K は全体質量行列、全体減衰行列、全体剛性行列であり、 \mathbf{u} 、 $\Delta \mathbf{u}$ 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{R} は節点変位およびその増分、外力ベクトル、内力ベクトルである。

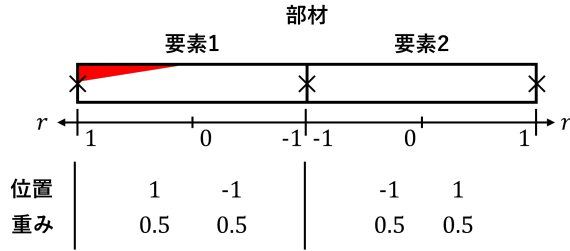
ASI-Gauss 法の大きな特徴として、2つの隣接するはり要素で1つのサブセット要素を構成し、要素中の数値積分点および応力評価点を塑性化の状況に応じてシフトさせることが挙げられる。これにより、1部材2要素分割でも、部材の弾塑性挙動を十分な精度で解析可能となる。応力評価点位置 r と数値積分点位置 s は、はり要素と剛体ばねモデルの物理的等価性に基づき導出された次式 (3) により関係付けられる [6]。

$$s = -r \quad (3)$$

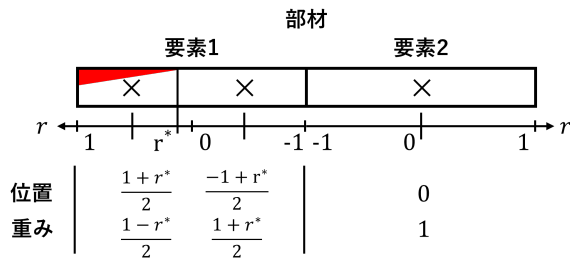
上式を用いて、弾性解析時は図 1(a) に示すように、ガウス積分点に相当する位置に応力評価点が配置される



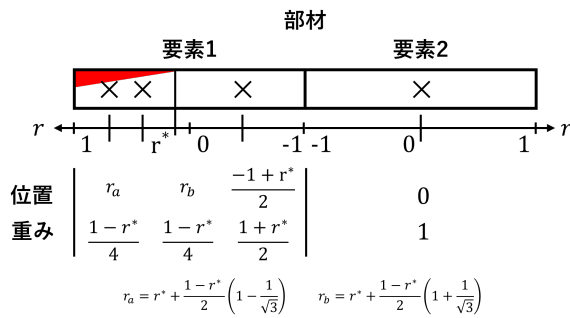
(a) 応力評価点位置の断面を選択



(b) 要素両端の断面を選択



(c) r^* で二分した領域に対し、各々の中心位置の断面を選択



(d) r^* で二分した領域に対し、塑性域を含む領域では2点、含まない領域では中心位置の断面を選択

図-3 本研究で検討する断面選択方法

上式において、 σ_c は木材の圧縮降伏応力である。続いて、正規化後の断面における軸方向応力分布 $\sigma(x, y)$ を次式 (8) で表現する。

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} ax + by + c & (ax + by + c > -1) \\ -1 & (ax + by + c \leq -1) \end{cases} \quad (8)$$

式中の a, b, c が応力分布を決定する係数である。 $\sigma(x, y)$ は、図 4 に示す正規化後の断面では、左下に向かうにつれ圧縮応力が増大し、右上に向かうにつれ引張応力が増大する分布を表す。塑性化した領域では応力が常

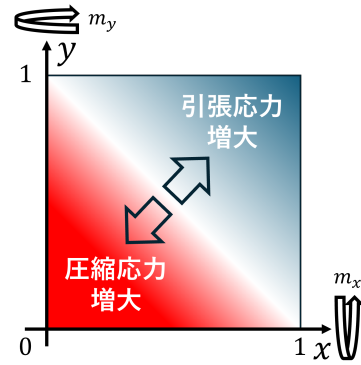


図-4 正規化断面における応力分布

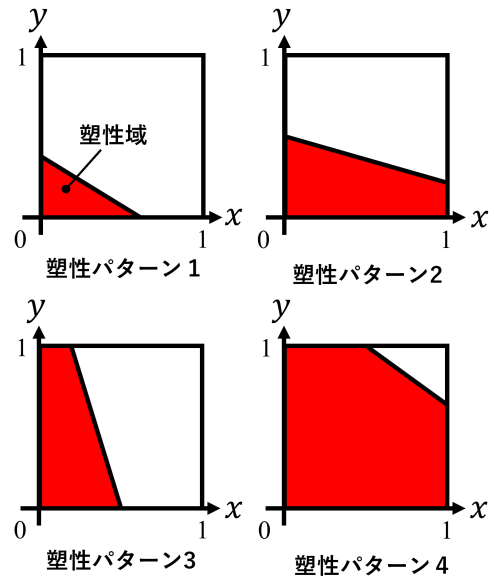


図-5 4つの塑性パターン

に -1 となる。

断面力と応力分布は、次式 (9) で関連付けられる。

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ n \end{bmatrix} = \int_S \sigma \cdot \begin{bmatrix} y - \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} dS = \mathbf{P}(a, b, c) \quad (9)$$

ここで、 S は正規化後の断面領域を表す。本研究では S が矩形であることから、 $\mathbf{P}(a, b, c)$ の厳密解を導出し、計算で使用する。断面に塑性域が含まれていない場合、厳密解は次式 (10) で表される。

$$\mathbf{P}(a, b, c) = \begin{bmatrix} \frac{b}{12} \\ \frac{a}{12} \\ \frac{a+b}{2} + c \end{bmatrix} \quad (10)$$

一方、塑性域が含まれている場合は、図 5 に示す4つの塑性パターンにより式の形が異なる。例えば、塑性

パターン 1 に対しては次式 (11) となる.

$$P(a, b, c) = \begin{bmatrix} \frac{2ab^3 + 2b(1+c)^3 + (1+c)^4}{24ab^2} \\ \frac{2a^3b + 2a(1+c)^3 + (1+c)^4}{24a^2b} \\ \frac{3a^2b + 3ab^2 - (1+c)^3 + 6abc}{6ab} \end{bmatrix} \quad (11)$$

以上の定義や関係式を用い, r^* は次式 (12) を連立させて解くことで算出する. なお式 (12) の導出には, r^* の断面には塑性域が含まれておらず, かつ正規化断面における左下の点 (0,0) での応力が, 圧縮降伏応力 σ_c に等しいという性質を用いている.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_c wh^2} \left| M_{x0} - V_{y0} \frac{l}{2} r^* \right| &= \frac{b}{12} \\ \frac{1}{\sigma_c w^2 h} \left| M_{y0} - V_{x0} \frac{l}{2} r^* \right| &= \frac{a}{12} \\ \frac{N}{\sigma_c wh} &= \frac{a+b}{2} + c \\ c &= -1 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, l は要素長, V_x, V_y はせん断力であり, 下付きの 0 は要素中央の値であることを表す.

断面二次モーメントや断面積の算出では, まず式 (9) を Newton-Raphson 法により解き, 塑性パターンおよび a, b, c の値を求める. Newton-Raphson 法の各反復では, 前反復で得られた a, b, c の値から現在の塑性パターンを判定し, その塑性パターンに対応する $P(a, b, c)$ の式を用いて a, b, c を更新する. 続いて, 塑性パターンと a, b, c の値から, 塑性域を除いた断面領域 \tilde{S} に対する図心 \tilde{c}_x, \tilde{c}_y および断面二次モーメント \tilde{I}_x, \tilde{I}_y と断面積 \tilde{A} を算出する. その際, 以下の関係を用いる.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_x &= \frac{1}{\tilde{A}} \int_{\tilde{S}} x d\tilde{S} & \tilde{c}_y &= \frac{1}{\tilde{A}} \int_{\tilde{S}} y d\tilde{S} \\ \tilde{I}_x &= wh^3 \int_{\tilde{S}} (y - \tilde{c}_y)^2 d\tilde{S} & \tilde{I}_y &= w^3 h \int_{\tilde{S}} (x - \tilde{c}_x)^2 d\tilde{S} \\ \tilde{A} &= wh \int_{\tilde{S}} d\tilde{S} \end{aligned} \quad (13)$$

本研究ではここでも, 各塑性パターンに対する厳密解を導出し使用する. 断面が塑性域を含まない場合, 図心および断面二次モーメント, 断面積は次式 (14) で表される.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_x &= \tilde{c}_y = \frac{1}{2} \\ \tilde{I}_x &= \frac{wh^3}{12} & \tilde{I}_y &= \frac{w^3 h}{12} & \tilde{A} &= wh \end{aligned} \quad (14)$$

一方, 塑性域を含む場合は, 塑性パターンにより式が異なる. 例えば, 塑性パターン 1 に対しては, 図心お

よび各断面定数は次式 (15) で求められる.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_x &= \frac{-\alpha^2 \beta + 3}{6 - 3\alpha\beta} & \tilde{c}_y &= \frac{-\alpha\beta^2 + 3}{6 - 3\alpha\beta} \\ \tilde{I}_x &= \left\{ \frac{1}{12} + \left(c_y - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\alpha\beta^3}{36} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha\beta \left(c_y - \frac{\beta}{3} \right)^2 \right\} wh^3 \\ \tilde{I}_y &= \left\{ \frac{1}{12} + \left(c_x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\alpha^3 \beta}{36} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha\beta \left(c_x - \frac{\alpha}{3} \right)^2 \right\} w^3 h \\ \tilde{A} &= \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\beta \right) wh \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, $\alpha = -(1+c)/a, \beta = -(1+c)/b$ である.

(3) 塑性流れ則に基づく剛性低下

要素端部での全断面降伏の判定には, 次式 (16) に示す降伏関数を用いる. この関数の値が 1 以上になった時, 全断面降伏が生じたと判定し, 塑性流れ則に基づく剛性低下に移行する.

$$f_y = \left(\frac{M_x}{\sigma_c Z_{px}} \right)^2 + \left(\frac{M_y}{\sigma_c Z_{py}} \right)^2 + \left(\frac{N}{\sigma_c A} \right)^2 \quad (16)$$

ここで, M_x, M_y, N は要素端部での断面力, Z_{px}, Z_{py} は塑性断面係数, A は塑性域を含む断面の面積である. 本研究においては, 木材では全断面降伏時, 中立軸が部材上下端のいずれかに位置すると考え, Z_{px}, Z_{py} を次式 (17) で算出する.

$$Z_{px} = \frac{1}{2} wh^2 \quad Z_{py} = \frac{1}{2} w^2 h \quad (17)$$

塑性流れ則の適用時には, 要素の一般化断面力-ひずみ行列 $D(r)$ を次式 (18) により算出する.

$$D(r) = D_e - \frac{D_e \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} \left(D_e \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} \right)^T}{H' + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \sigma} \right)^T D_e \frac{\partial f_y}{\partial \sigma}} \quad (18)$$

ここで, D_e は, 要素が弾性, すなわち塑性域を含まない時の一般化断面力-ひずみ行列, H' はひずみ硬化係数, $\partial f_y / \partial \sigma$ は降伏関数の微分係数ベクトルである.

4. 数値例

本章では, 開発したはり要素を ASI-Gauss 法に組み込み, はりの一軸曲げ問題に適用した事例を示す. なお, 本章での解析は静解析であり, 式 (2) 中の慣性項や減衰項は無視している. 図 6(a) に使用したはりモデルを示す. モデルは 4 要素から成り, 中央の節点に $-Y$ 方向の荷重を付加している. 材料定数には, スギを想定した表 1 に示す値 [7] より, 弾性係数およびせん断弾性係数, 圧縮降伏応力の値を使用した. なお比較として, ソリッド要素を用いた解析も実施した. 解析プログラムには E-Simulator [8] を用いた. 図 6(b) にソリッド要

表-1 モデルで使用了材料定数 [7]

弾性係数 E [MPa]	7350
せん断弾性係数 G [MPa]	637
ポアソン比 ν [-]	0.4
圧縮降伏応力 σ_c [MPa]	27.5

素モデルを示す。境界条件として、部材両端の底辺に位置する節点を拘束し、部材中央の断面の上端に位置する節点に $-Y$ 方向の強制変位を与えた。要素分割数は幅 10, 高さ 10, 奥行き 20, 要素種別は非適合モード六面体一次要素とした。材料モデルには、von-Mises の降伏条件を用いた完全弾塑性体モデルを、 Z 方向応力が負の場合のみ降伏するよう改変した独自モデルを設定した。材料定数には、表 1 より弾性係数および圧縮降伏応力、ポアソン比の値を使用した。

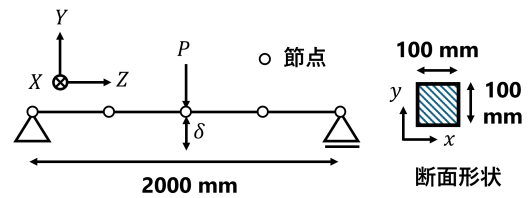
図 7 に部材中央における荷重-変位関係を示す。ソリッド要素モデルにおいては、荷重の値は強制変位を付加した節点での Y 方向反力の値を合計することで算出した。図中の実線は開発したはり要素を用いた時の結果であり、それぞれが図 3 に示す断面選択方法のいずれかに対応している。青線が応力評価点での断面を選択 (図 3(a)), 橙線が要素両端の断面を選択 (図 3(b)), 緑線が塑性域を含む領域と含まない領域から 1 つずつ断面を選択 (図 3(c)), 赤線が塑性域を含む領域から 2 つ、含まない領域から 1 つ断面を選択 (図 3(d)) した時の結果である。黒の点線はソリッド要素モデルの結果である。また黒の一点鎖線は、塑性域の拡がりを考慮しない、従来の ASI-Gauss 法を用いた時の結果である。さらに、開発したはり要素とソリッド要素モデルから得られた剛性低下開始点を、図中に同色の丸印で示した。

図 7 の実線と一点鎖線、および点線を比べると、塑性域の拡がりを考慮した場合、剛性低下が緩やかに進行している様子が確認できる。また、要素両端の断面を選択する方法、塑性域を含む領域と含まない領域から断面を選択する方法、応力評価点での断面を選択する方法の順に変位が大きくなっており、塑性域を含む領域と含まない領域から 1 つずつ断面を選択する方法や応力評価点での断面を選択する方法はソリッド要素の結果に近い挙動を示している。

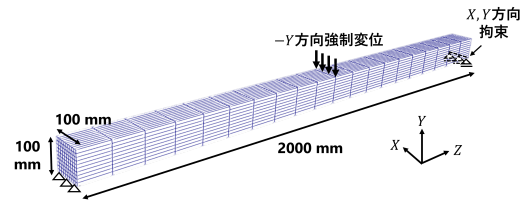
一方、剛性低下開始点の位置に着目すると、応力評価点での断面を選択する方法では、他の断面選択方法、およびソリッド要素モデルと比べ剛性低下の開始が遅れていることが分かる。これは、応力評価点での断面を選択する場合、塑性域が応力評価点位置に到達するまで剛性低下が始まらないためである。それ以外の断面選択方法による結果は、ソリッド要素モデルによる結果とよく一致している。

5. 結論

本研究では、木材はりにおける 3 次元的な塑性域の拡がりに伴う剛性低下を、断面定数の減少により表現するはり要素を開発し、ASI-Gauss 法に導入した。そして、梁の一軸曲げ問題を解き、結果をソリッド要素モデル、および従来の塑性ヒンジモデルを用いた ASI-Gauss



(a) はり要素モデル



(b) ソリッド要素モデル

図-6 解析で使用了モデル

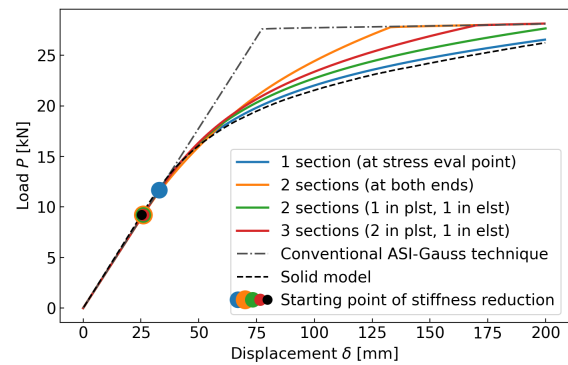


図-7 部材中央における荷重-変位関係

法による解析結果と比較した。その際、断面定数の計算に用いる断面の選択方法を複数検討した。

比較結果からは、塑性域の拡がりを考慮することで、木材はり特有の緩やかな剛性低下が表現可能となることや、断面定数の計算に用いる断面を、塑性域を含む領域と含まない領域から 1 つずつ選択した場合、計算結果がソリッド要素モデルに近い挙動を示すことが明らかとなった。今後は、二軸周りの曲げモーメントが作用する問題、および繰り返し载荷問題に対する検証を実施する予定である。

参考文献

- [1] 公共建築物の木造率について, 林野庁, <https://www.rinya.maff.go.jp/j/riyou/R4mokuzouritsu.html>, (2026/3/10 閲覧).
- [2] D. Isobe: Progressive Collapse Analysis of Structures: Numerical Codes and Applications, Elsevier, eBook ISBN: 9780128130421, Paperback ISBN: 9780128129753, 2018.
- [3] 薄木征三, 堀江保, 亀井義典: 集成材高欄支柱の弾塑性状態における変位, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.861-870, 1989.

- [4] 平沢秀之, 林川俊郎, 佐藤浩一: 塑性域の拡がりを考慮したはりの一弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.1-8, 1995.
- [5] 岩崎正二, 山本亮, 出戸秀明, 佐藤和也, 宮本裕: 塑性域の拡がりを考慮した木材はりの弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.1139-1146, 2002.
- [6] 都井裕: 骨組構造および回転対称シェル構造の有限要素解析における ShiftedIntegration 法について, 日本造船学会論文集, No.168, pp.357-369, 1990.
- [7] 森林総合研究所: 改訂 4 版 木材工業ハンドブック, pp.135-136, 丸善, 2004.
- [8] 堀 宗朗, 野口 裕久, 井根 達比古: E-Defense と連動させた数値震動台の開発計画, 土木学会地震工学論文集, Vol.29, pp.1420-1425, 2007.