

ISPH法とASI-Gauss法に基づく 非解像型流体-梁連成解析手法

Unresolved fluid-beam coupling scheme based on ISPH method and ASI-Gauss method

大日向智志¹⁾, 大村浩之²⁾, 磯部大吾郎³⁾

Satoshi Ohinata, Hiroyuki Omura and Daigoro Isobe

1) 筑波大学大学院 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: s2420854@u.tsukuba.ac.jp)

2) 博 (工) 防災科学技術研究所 研究員 (〒305-0006 茨城県つくば市天王台3-1, E-mail: homura@bosai.go.jp)

3) 博 (工) 筑波大学 システム情報系 教授 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: isobe@kz.tsukuba.ac.jp)

We developed an unresolved fluid-beam coupling scheme combining the ISPH method and the ASI-Gauss method to enable low-cost tsunami run-up analysis at urban scales. In the proposed scheme, beam elements are divided into multiple virtual elements. Drag and buoyancy are calculated for each virtual element using the drag coefficient and the surrounding flow velocity field. Then, we investigated the appropriate range for applying reaction forces and confirmed that incorporating a drag coefficient model considering the void ratio for groups of cylinders improves reproducibility.

Key Words : Unresolved coupling, FSI, ISPH method, ASI-Gauss method

1. はじめに

日本では2011年3月11日に発生した東北地方太平洋沖地震に伴い発生した津波など、これまでに多くの津波被害を受けている。津波対策を講じる際、浸水域の予測には数値解析が用いられることが多いが、津波のような自由表面を伴う非圧縮性流れを解く数値解析手法として粒子法が有用である。さらに、津波被害をより正確に予測するためには、建物の流失など、流体によって構造が破壊、大移動する過程まで考慮する必要がある。そのため、津波と建物が相互に影響しあう流体-構造連成 (Fluid-Structure Interaction, FSI) 問題を解く必要がある。粒子法を用いたFSI解析手法はこれまでにいくつか提案されている ([1][2]など) が、いずれも構造物の形状をポリゴンや粒子を用いて陽的に表現することを前提としている (以下、このようなFSI解析手法を解像型と呼ぶ)。解像型のFSI解析手法では、構造物の形状を陽的に表現し、流体との相互作用を厳密に計算するため、構造物近傍の流体挙動を精緻に再現ができるという特徴がある。しかしながら、流体の空間解像度を構造物のスケールに比べ十分細かく設定する必要があるため、都市域における津波遡上のような大規模な問題に対しては、計算コストが極端に増大するという問題がある。

解像型に対し、非解像型と呼ばれる連成解析手法では、流速から計算できる抗力を利用して構造物に作用する流体力を計算する。その際、構造物の形状は抗力係数 C_D というパラメータの形で陰的に表現される。抗力計算には部材近傍の流速分布のみが必要となるため、流体の空間解像度を粗くとることが可能となる。したがって、非解像

型はマクロな問題に適した連成解析アプローチであると言える。しかしながら、この手法は主に地盤などの多孔質体との連成解析手法として研究されており ([3][4]など)、FSI解析に適用した例はほとんど無い。そこで本研究では、多孔質体に関する先行研究を参考に、津波と構造物の連成解析向けの非解像型流体-梁連成解析手法を開発し、その妥当性の検証を行う。

構造解析には、はり要素の曲げ変形と構造物の倒壊挙動を低コストで高精度に計算可能なASI-Gauss法[5]を用いる。また、流体解析には、部材群の間を縫って流れる流れを浸透流とみなし、自由表面流れと浸透流を統一的に記述できるDarcy-Brinkman型方程式[6]を用いたISPH法を利用する。

2. Darcy-Brinkman型方程式を用いたISPH法

(1) 基礎方程式

本研究では、梁部材の間隙を通る流れを浸透流とみなし、自由表面流れと浸透流を統一的に表したDarcy-Brinkman式を流体解析に適用する。Darcy-Brinkman式は以下のように表記される[6]。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_D = 0 \quad (1)$$

$$\frac{C_r}{\varepsilon_f} \frac{D\mathbf{v}_D}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu_E \nabla^2 \mathbf{v}_D + \mathbf{a}_r \quad (2)$$

ここで、 ε_f は間隙率、 C_r は仮想質量係数、 \mathbf{v}_D はDarcy流速、 t は時間、 ρ は密度、 p は圧力、 ν_E は有効動粘性係数、 \mathbf{g} は

重力加速度, \mathbf{a}_r は梁部材から受ける抵抗による加速度である. また C_r , v_E は以下の式に従って定義される.

$$C_r = 1 + 0.34 \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f} \quad (3)$$

$$v_E = \frac{v_f + v_T}{\varepsilon_f} \quad (4)$$

ここで, v_f は流体の動粘性係数, v_T は渦粘性である.

(2) 時間積分スキーム

ISPH法では, 速度を陽的に, 圧力を陰的に計算する射影法によって各ステップの速度, 圧力を計算する. 速度の更新は以下の式に従い行う.

$$\mathbf{v}_D^* = \mathbf{v}_D^n + \frac{\varepsilon_f \Delta t}{C_r} (v_E \nabla^2 \mathbf{v}_D^n + \mathbf{g} + \mathbf{a}_r) \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_D^{n+1} = \mathbf{v}_D^* - \frac{\varepsilon_f \Delta t}{C_r \rho_f} \nabla p^{n+1} \quad (6)$$

ここで, 添え字*は n ステップと $n+1$ ステップの間に定義される中間状態を表す. また, Δt は時間増分である.

圧力の更新は次式の圧力ポアソン方程式を解くことで行う.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{C_r}{\varepsilon_f} \left(\frac{\rho_f}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}_D^* + \alpha_d \frac{\varepsilon_f \rho_f - \hat{\rho}_f^n}{\Delta t^2} \right) \quad (7)$$

ここで, $\hat{\rho}_f$ は流体の数値的な密度, α_d は緩和係数である.

(3) SPH法に基づく空間離散化

領域 Ω 内で連続なスカラー場 φ は, 関数のカーネル近似により次式のように近似できる.

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} \varphi(\xi) W(\xi - \mathbf{x}) d\xi \quad (8)$$

SPH法はこのカーネル近似に基づいた離散化スキームであり, 式(8)を粒子離散化近似した形で書くと,

$$\varphi(\mathbf{x}_i) \approx \langle \varphi \rangle_i = \sum_{j \in \mathbb{P}_i} V_j \varphi_j W_{ij} \quad (9)$$

となる. ここで, \mathbb{P}_i は粒子 i の影響半径内に存在する粒子の集合, V_j は粒子 j が代表する体積である.

勾配, ラプラシアンなどの微分計算モデルには, Asaiら[7]によるSPH(2)を利用した.

(4) 壁面の表現

本研究では水路の床, 壁面の表現には大村ら[2]のIERP壁境界モデルを用いる. IERPモデルは, 陽解法の粒子法への適用が前提のERPモデルをベースに, 角部分の表現を精緻化し, 半陰解法の粒子法に適用できるように発展し

た壁境界モデルである.

3. ASI-Gauss法

梁部材のモデル化には, 全ての変位が線形関数で定義される線形Timoshenkoはり要素を用いる. また, 時間積分法にはNewmarkの β 法を用いており, 運動方程式, 速度, 加速度ベクトルは以下の式で与えられる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u} \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u} \quad (12)$$

ここで, \mathbf{M} は全体質量マトリックス, \mathbf{C} は全体減衰マトリックス, \mathbf{K} は全体剛性マトリックス, \mathbf{F} は節点外力ベクトル, \mathbf{R} は節点内力ベクトルである. また β , δ はNewmarkの β 法における重みパラメータであり, 本研究ではLynnら[5]の研究を参考に $\beta = 4/9$, $\delta = 5/6$ とする.

ASI-Gauss法では, 1つの梁部材を2つの線形Timoshenkoはり要素で表現する. 弾性域では応力評価点が3次はり要素のものと一致するように数値積分点を配置し, 塑性ヒンジが生じた後は塑性ヒンジの位置と応力評価点が一致するように数値積分点をシフトすることで, 曲げ変形を精度良く解くことが可能となる.

4. 非解像型流体-梁連成解析手法

(1) 部材の分割

流体の解像度に応じて流体力の計算を行うため, 構造計算に用いるはり要素を, さらに細かい仮想要素へと分割する. 仮想要素 i の長さ l_i は, 流体粒子径と同程度になるように決定する. 梁部材が受ける流体力の計算, および流体が梁部材から受ける反作用力の計算は仮想要素ごとに行う.

(2) 間隙率の計算

流体粒子 i の間隙率 ε_i を流体粒子 i の影響範囲の体積に対する仮想要素の体積の割合と定義し, 以下の式で求める.

$$\varepsilon_i = 1 - \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_{s,j} W_{ij} \quad (13)$$

ここで, \mathbb{S}_i は流体粒子 i の影響範囲内に存在する仮想要素の集合, $V_{s,j}$ は仮想要素 j の体積である.

(3) 仮想要素に作用する流体力

仮想要素 i に作用する流体力は, 抗力 $\mathbf{f}_{a,i}$ と浮力 $\mathbf{f}_{b,i}$ の二つを計算する. $\mathbf{f}_{a,i}$, $\mathbf{f}_{b,i}$ はそれぞれ以下の式で計算する.

$$\mathbf{f}_{a,i} = \frac{1}{2} \rho_f C_D^i \mathbf{u} |\mathbf{u}| D l_i \quad (14)$$

$$f_{b,i} = -\rho g A l_i \quad (15)$$

ここで、 C_D^i は抗力係数である。流速 \mathbf{u} や圧力勾配 ∇p は、仮想要素の計算点を中心とする影響半径 r_e 内の流体粒子の速度、圧力から内挿して計算する。また、はり要素が角柱の場合、Tamuraら[8]を参考に、抗力係数は以下の式に従って計算を行う。

$$C_D^i = \begin{cases} -7.149(\cos\theta + \sin\theta)^2 \\ \quad + 13.518(\cos\theta + \sin\theta) - 4.338 (0 \leq \theta < \pi/12) \\ 1.242(\cos\theta + \sin\theta)^2 \\ \quad + 0.671(\cos\theta + \sin\theta) - 0.915 (\pi/12 \leq \theta < \pi/4) \end{cases} \quad (16)$$

θ は角柱と流れ方向の迎え角で、 $\theta = 0$ [°]でおおよそ $C_D^i = 2.0$ となる。

また、提案手法は流体力の計算に抗力を利用するが、部材が集まって並んでいる状況での抗力係数は、部材単体の抗力係数とは異なるため、部材の密集度合いに応じた抗力係数モデルを導入する必要がある。そこで本研究では、横嶋ら[9]の研究を参考に以下に示す円柱群に対する抗力係数モデルを導入し、その妥当性の検証を行った。

$$C_D^i = \begin{cases} 1.2 & (\varphi^i < 0.01) \\ 0.1736(\varphi^i)^{-0.431} & (0.01 \leq \varphi^i \leq 0.2) \\ 0.35 & (\varphi^i > 0.2) \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 φ^i は仮想要素 i の位置での固体占有率である。

得られた仮想要素ごとの流体力は以下の式に従って構造解析の節点力へと変換する。

$$\mathbf{F}_{D1} = \frac{1}{2}(1 - \xi_i)(\mathbf{f}_{d,i} + \mathbf{f}_{b,i}) \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_{D2} = \frac{1}{2}(1 + \xi_i)(\mathbf{f}_{d,i} + \mathbf{f}_{b,i}) \quad (19)$$

ここで添え字 1, 2 は局所節点番号を表す。また、 ξ_i は仮想要素の中央位置を要素座標系で表したもので、 $-1 \leq \xi_i \leq 1$ の値をとる。

(4) 流体が反作用力として受ける抵抗力

運動量の保存を満たすため、計算された抗力 $\mathbf{f}_{d,i}$ の反作用力 $-\mathbf{f}_{d,i}$ を仮想要素周囲の流体粒子に分配して加える。反作用力の分配は、仮想要素を中心に半径 r_{reac} の範囲内に含まれる流体粒子に対して行う。

5. 提案手法の適用可能範囲の検証

抗力の計算を行う際に用いる流速は、部材の影響を受けていない、上流位置での流速を用いることが一般的である。だが、提案手法では、仮想要素の影響範囲内で空間平均化された流速から抗力を計算する。また、計算された

単位：[m]

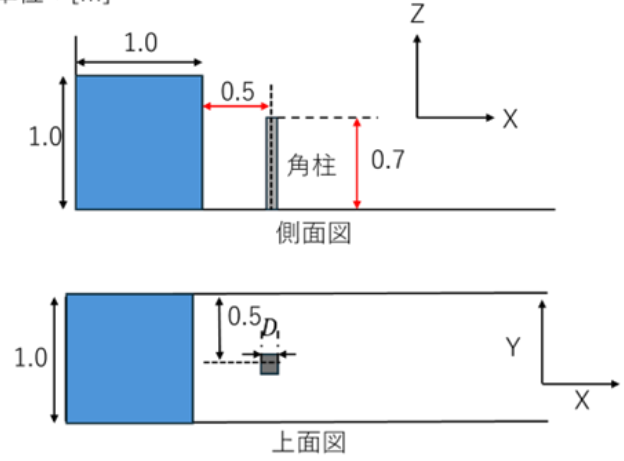


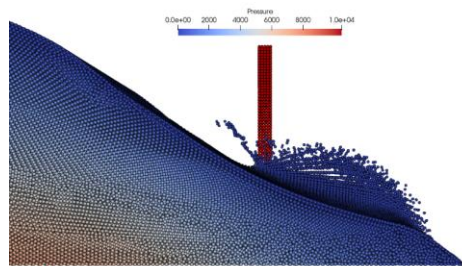
表 1 適用可能範囲の検証解析に用いた解析条件

| | | |
|---------------------------|-----------------------|------------|
| 時間増分[s] | 1.0×10^{-3} | |
| 総ステップ数 | 1,000 | |
| 粒子径 r [m] | 解像型 | 非解像型 |
| | 0.01 | 0.02 |
| 総粒子数 | 解像型 | 非解像型 |
| | 1,000,000 | 125,000 |
| 流体密度 [kg/m ³] | 1.0×10^3 | |
| 動粘性係数 [m ² /s] | 1.0×10^{-6} | |
| ヤング率 [N/m ²] | 2.06×10^{11} | |
| ポアソン比 | 0.3 | |
| 部材幅 D [m] | 解像型 | 非解像型 |
| | 0.05 | 0.01, 0.05 |
| 重力加速度 [m/s ²] | 9.8 | |

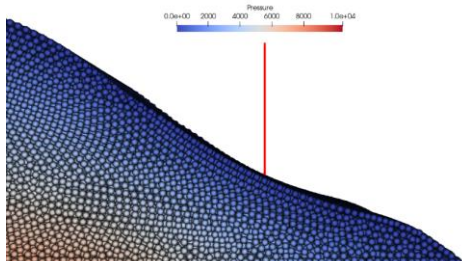
抗力の反作用力は仮想要素近傍の流体粒子に分配して加えられる。ここで、反作用力を返す範囲 r_{reac} が小さい場合、範囲内に含まれる流体粒子の総数が少なくなるため、流体粒子一つ当りに作用する抵抗力が大きくなる。すると、仮想要素近傍の流速が流入流速に対して低下してしまい、抗力の過小評価が生じることが考えられる。一方、 r_{reac} の値を十分大きく取れば、部材近傍の流速低下を回避し抗力を妥当に計算できるようになると考えられる。そこで、本節では単体の角柱を対象に、提案手法が妥当に抗力を計算できる r_{reac} の値について検証を行う。

検証には図 1 に示すような解析モデルを使用した。解析条件を表 1 に示す。 r_{reac} の値は、角柱幅 D に係数 n_{reac} を掛けることで計算するため、 n_{reac} を変化させることで r_{reac} の適切な範囲を求める。妥当性の比較対象には、解像型の手法の一つである FD-SPH[10]による解析結果を用いた。FD-SPH による解析は粒子径 $r=0.01$ [m]、角柱幅 $D=0.05$ [m]で行い、異なる角柱幅どうしの抗力を比較するため、単位幅当りの抗力に変換して比較を行った。

時刻 0.35 [s]における角柱近傍の流体挙動を可視化した結果を図 2 に、反作用力の適用範囲に応じた単位幅当りの抗力の推移を図 3 に示す。図 2 より、解像型では角柱

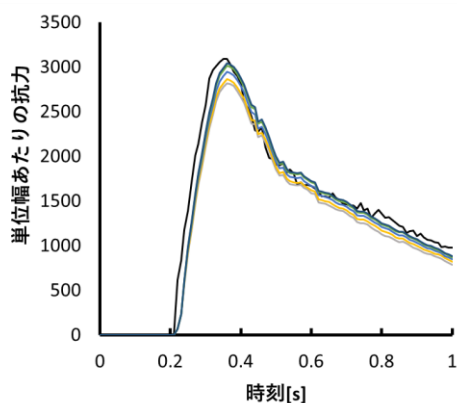


(a) FD-SPH (解像型), $D = 0.05$ [m]



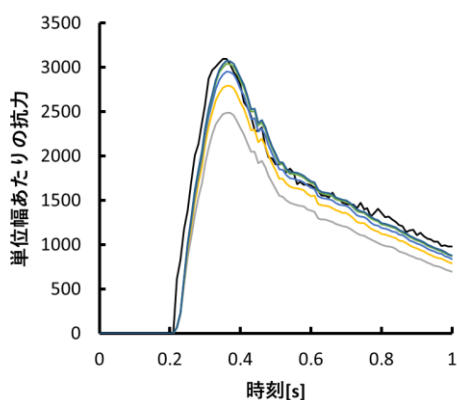
(b) 非解像型, $r_{\text{reac}} = D \times 10$, $D = 0.05$ [m]

図2 時刻 0.35 [s]における角柱近傍の流体挙動



— resolve —x3 —x5 —x7 —x9 —x10

(a) $D = 0.01$ [m]



— resolve —x3 —x5 —x7 —x9 —x10

(b) $D = 0.05$ [m]

図3 反作用力の適用範囲に応じた単位幅当りの抗力

によって水が押しつけられ飛沫が生じているが、非解像型ではそのような流況の変化は起きていない。他方、図3より、非解像型では反作用力の適用範囲が狭いほど解像

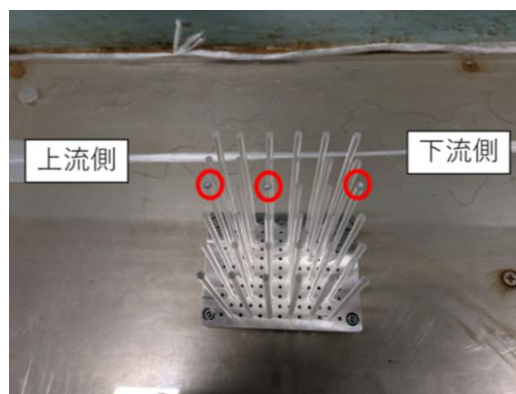


図4 実験に用いた円柱群の概観

型の結果に比べ抗力が過小評価となっており、角柱幅 $D = 0.01$ [m], $D = 0.05$ [m]の両者とも、 n_{reac} が9以上で抗力のピーク値やそれ以降の値が解像型と良好に一致していることが分かる。これは、 r_{reac} が角柱幅に対して小さいと、流体側に作用する反作用力によって角柱近傍での局所的な流速低下が生じ、結果として抗力が過小評価されたと考えられる。逆に、 r_{reac} を十分大きくすれば、反作用力が広い範囲に分散されるため抗力の低下が回避できる。

6. 円柱群に対する妥当性検証

部材が単体で流れの中に存在する場合の抗力係数と、部材が密集している場合の抗力係数は異なる。都市規模の津波遡上解析を行う際には、柱が並んで密集している状況を扱う必要がある。そこで本研究では、円柱群に対して、横嶋ら[9]の研究を参考に円柱群抗力係数を導入し提案手法の妥当性検証を行った。

(1) 開水路実験

妥当性検証解析の比較対象とするため、図4に示すような円柱群を開水路に固定し、そこに一定量の水を流す実験を行った。その際、図4中の赤い丸で囲まれた1,3,6列目の円柱先端の変位をモーションキャプチャシステムにより計測した。実験に用いた水流は幅0.5[m], 水深0.13[m], 流量2.8[m³/min]である。流れが安定した際の断面平均流速は0.71[m/s]であった。図5に、実験で得られた1,3,6列目の円柱先端変位を示す。円柱群のうち最も上流側に位置していた1列目の円柱の先端変位が最も大きく、3列目,6列目の先端変位は同程度の変位となった。これは、円柱群内部を通る流れが円柱群から抵抗を受け、流速が低下したためと考えられる。全ての円柱の先端変位が計測誤差により細かく振動していたため、変位が安定した時刻50[s]以降の先端変位の平均値を取った。その結果、1列目の円柱では0.00091[m], 3列目の円柱では0.00047[m], 6列目の円柱では0.00041[m]であった。

(2) 実験の再現解析

前節の実験を再現する解析を実施し、円柱群に対する提案手法の妥当性検証を行った。解析に用いたモデルを

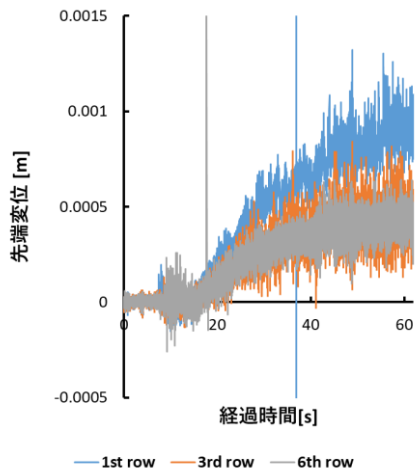


図5 実験から得られた円柱先端変位の時刻歴

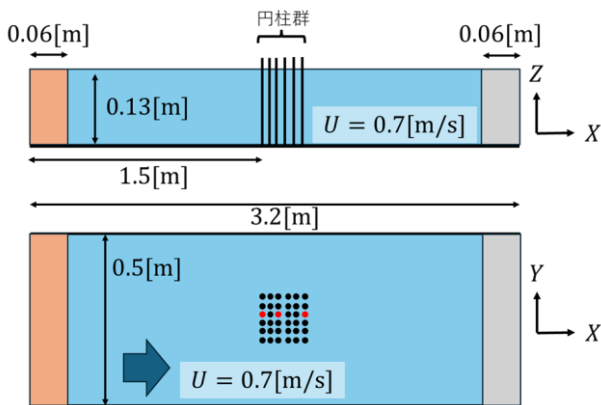


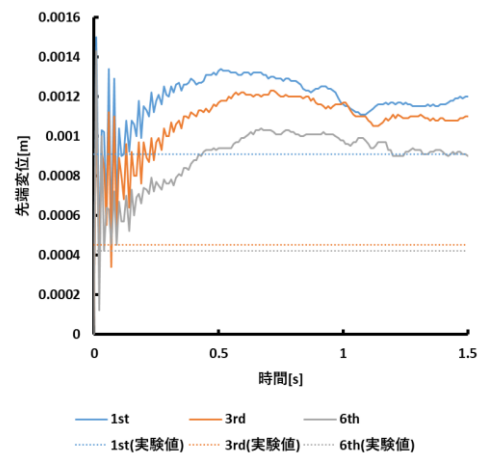
図6 実験の再現解析に用いた解析モデル

図6に示す．図中のオレンジとグレーの網掛け部分はそれぞれ Asai ら[7]を参考に，流入・流出境界条件を満足するために定義した流入・流出領域である．この領域中の流体粒子に対しては速度，圧力を強制的に与えている．また，図の赤色で示した円柱の先端変位を出力し，実験結果と比較した．解析条件を表2に示す．抗力係数の値は，単体の円柱として一般的な $C_D = 1.2$ の一定値の他に，横嶋ら[9]の固体占有率－抗力係数の関係を導入した抗力係数モデルを利用した．

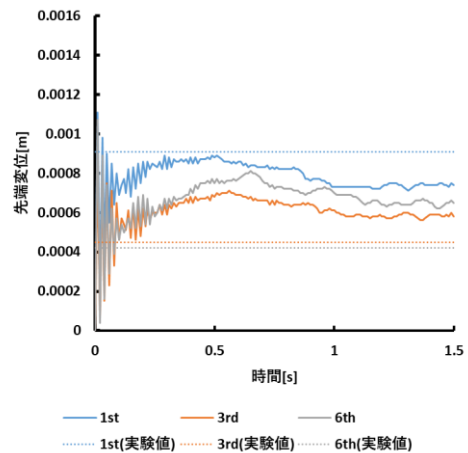
それぞれの抗力係数で行った解析で得られた先端変位の時刻歴を図7に示す．なお，解析結果の妥当性を確認するため，実験結果の平均値をグラフ中に点線として記載している．図7(a)に示すように，抗力係数を $C_D = 1.2$ の一定値とした場合，円柱の振動が収まった時刻0.5[s]から1.5[s]までの先端変位平均値は，1列目で 1.22×10^{-3} [m]，3列目で 1.14×10^{-3} [m]，6列目で 0.97×10^{-3} [m]であり，いずれも実験結果よりも過大評価となった．また，実験では3列目と6列目の先端変位が近い値を取ることが確認できたが，解析結果では3列目と6列目の先端変位は大きく異なっていた．一方で，抗力係数モデルを導入した図7(b)の結果では， $C_D = 1.2$ とした場合よりも全体的に実験値に近い変位を取った．ただし，時刻0.5[s]から1.5[s]ま

表2 実験の再現解析に用いた流体解析条件

| | |
|-----------------------------|----------------------|
| 時間増分[s] | 1.0×10^{-3} |
| 総ステップ数 | 1,500 |
| 粒子径 r [m] | 0.02 |
| 総粒子数 | 28,000 |
| 滑り率 | 0.95 |
| 密度 [kg/m ³] | 1.0×10^3 |
| 動粘性係数 [m ² /s] | 1.0×10^{-6} |
| 部材のヤング率 [N/m ²] | 3.2×10^9 |
| ポアソン比 | 0.32 |
| 部材幅 D [m] | 0.004 |
| 重力加速度 [m/s ²] | 9.8 |



(a) $C_D = 1.2$ の一定値を適用



(b) 抗力係数モデルを適用

図7 先端変位の比較

での先端変位平均値は，1列目では 0.78×10^{-3} [m]と実験値よりも過小評価となり，3, 6列目ではそれぞれ 0.62×10^{-3} [m], 0.70×10^{-3} [m]と過大評価となった．これは円柱群の抗力係数のモデルとして低レイノルズ数向けの抗力係数モデルを採用したこと，円柱群の密集度合いのみに着目し，上流下流の区別や円柱群の配置を考慮しない抗力係数モデルを採用したことが原因であると考えられ，今

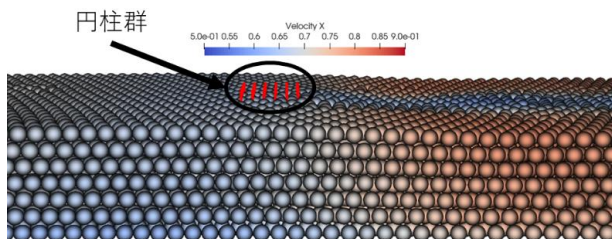


図 8 時刻 1.0 [s]における円柱群近傍の水面形状
(抗力係数モデルを適用)

後は適切な抗力係数モデルの導入を検討する必要がある。図 8 に抗力係数モデルを適用した場合の時刻 1.0 [s]における円柱群近傍の水面形状を示す。流体の空間解像度が粗いことに加え、反作用力の適用範囲が広いため、水面の盛り上がりなどを十分に再現できていないことが分かる。本解法が部材に作用する流体力を概ね計算可能であることは確認できたが、流体挙動の再現にはまだ課題が残り、今後の検討が必要である。

7. 結論

提案手法は、部材幅に対して流体の空間解像度が粗い条件で、単体の部材に作用する流体力を概ね妥当に計算できることが確認された。また、円柱群に対しては、抗力係数を $C_D = 1.2$ の一定値とした場合に対し、固体占有率を考慮した抗力係数モデルを導入することで、円柱先端変位の再現精度が向上した。一方で、さらなる変位解の精度向上のためには、円柱配置の影響を考慮する抗力係数モデルや、高レイノルズ数流れ向けの抗力係数モデルを導入する必要がある。

参考文献

[1] S. Koshizuka, A. Nobe, and Y. Oka, Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, No. 7, pp. 751-769, 1998.
 [2] 大村 浩之, 三目 直登, 浅井 光輝, 磯部大吾郎, 粒

子法とASI-Gauss法のカップリングに基づく波浪-骨組構造連成解析, 計算工学講演会論文集, Vol. 28, 2023.

[3] Y. Tsuji, T. Kawaguchi and T. Tanaka, Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed, *Powder Technology*, Vol. 77, No. 1, pp. 79-87, 1993.
 [4] B. Blais, M. Lassaigue, C. Goniva, L. Fradette and F. Bertrand, Development of an unresolved CFD-DEM model for the flow of viscous suspensions and its application to solid-liquid mixing, *Journal of Computational Physics*, Vol. 318, pp. 201-221, 2016.
 [5] K. M. Lynn and D. Isobe, Finite Element Code for Impact Collapse Problems of Framed Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, No. 12, pp. 2538-2563, 2007.
 [6] H. C. Brinkman, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Applied Scientific Research*, Vol. 1, pp. 27-34, 1949.
 [7] M. Asai, S. Fujioka, Y. Saeki, D. S. Morikawa, K. Tsuji, A class of second-derivatives in the Smoothed Particle Hydrodynamics with 2nd-order accuracy and its application to incompressible flow simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 415, pp. 1-47, 2023.
 [8] T. Tamura and T. Miyagi, The effect of turbulence on aerodynamic forces on a square cylinder with various corner shapes, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 83, pp. 135-145, 1999.
 [9] 横嶋 哲, 野田 博, 河原 能久, 円柱群を過ぎる2次元流れの抗力特性, 土木学会論文集B1(水工学) Vol. 70, No. 4, I_829-I_834, 2014.
 [10] H. Omura, K. Tsuji, C. Galvin, N. Mitsume, D. Isobe and M. Asai, Strongly coupled Fictitious Domain-SPH for fluid-structure interactions (December 08, 2025). Available at SSRN: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.5908308>