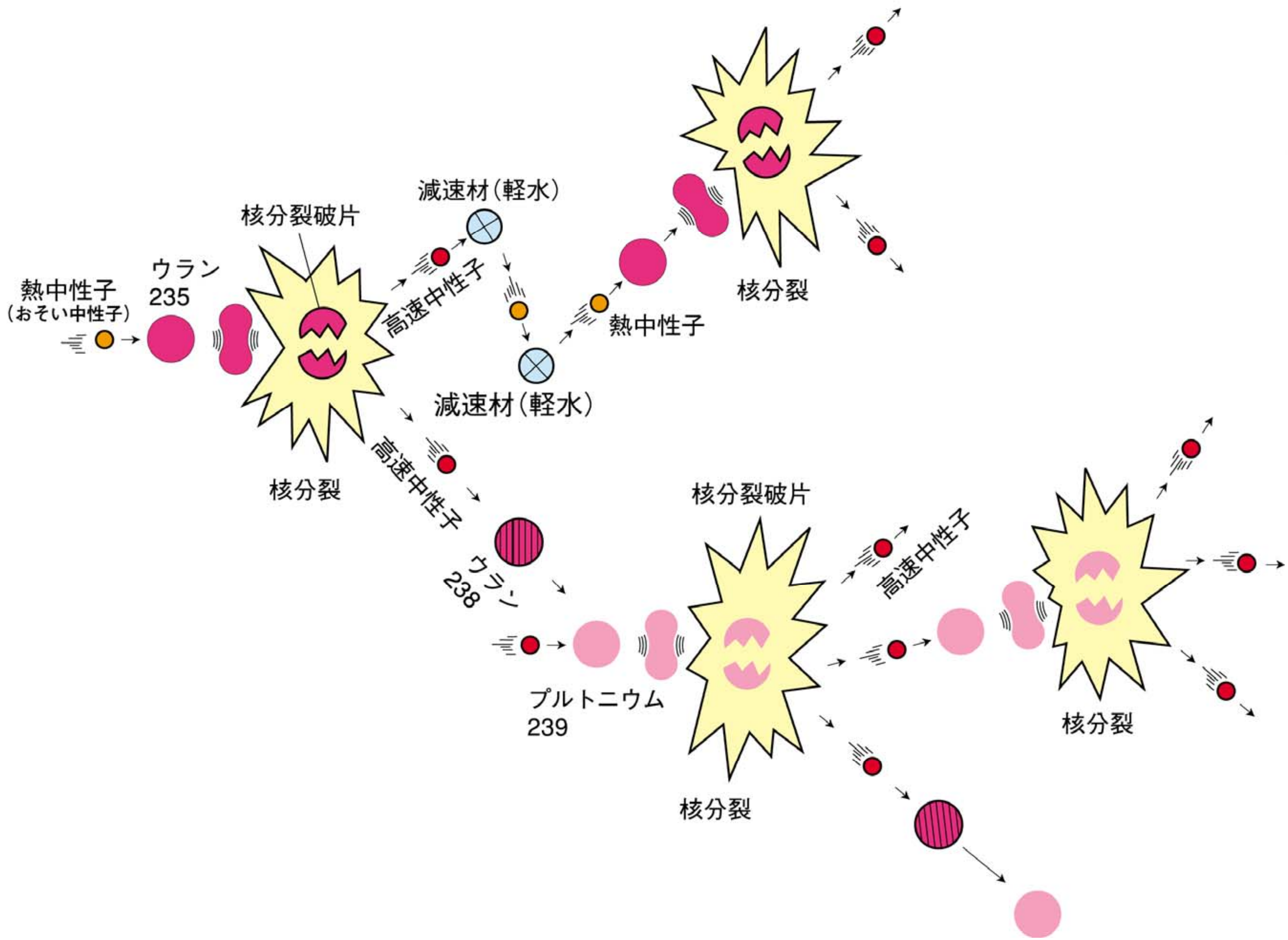
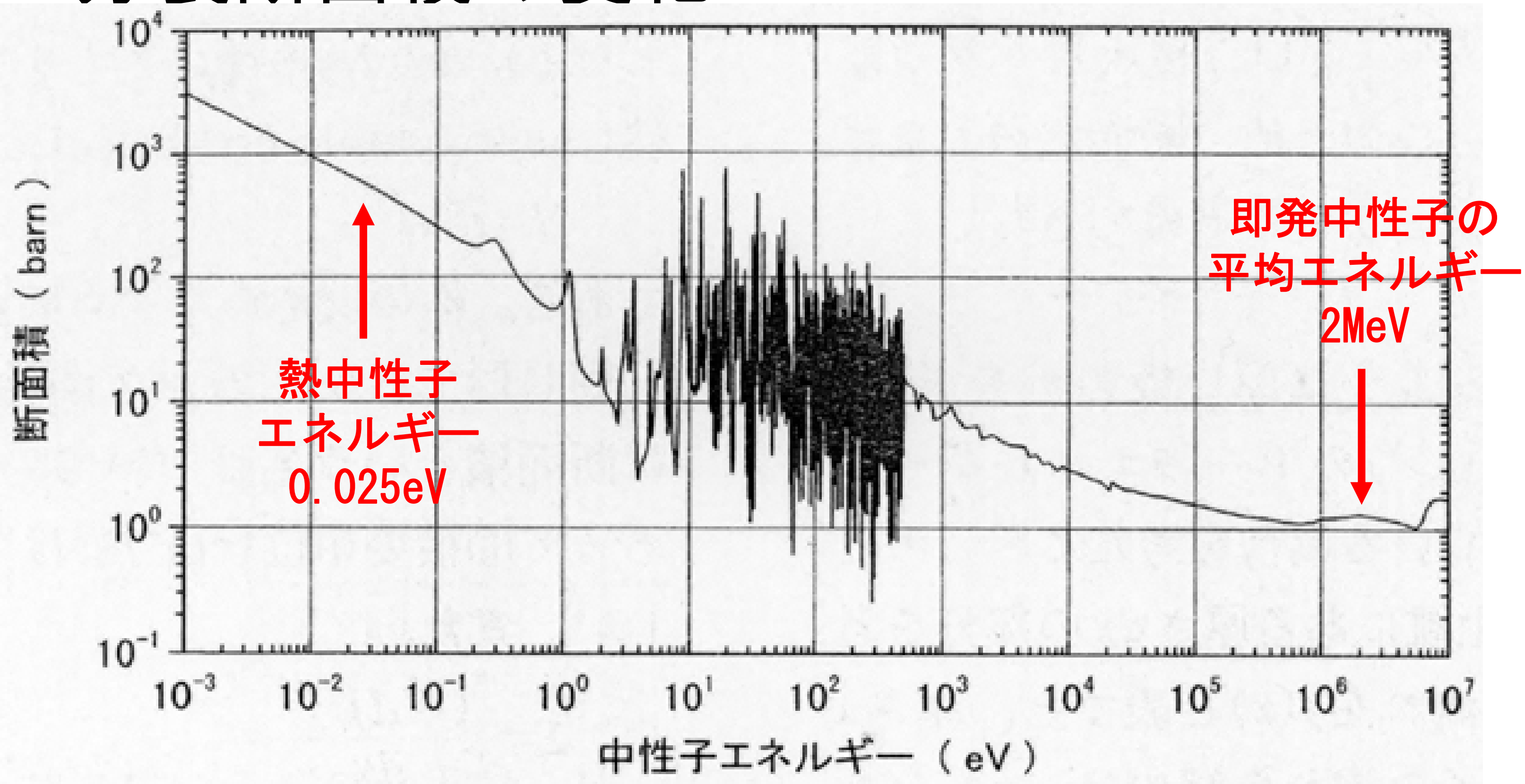
中性子の空間ふるまい
中性子拡散方程式

ウランの核分裂とプルトニウムの生成・核分裂

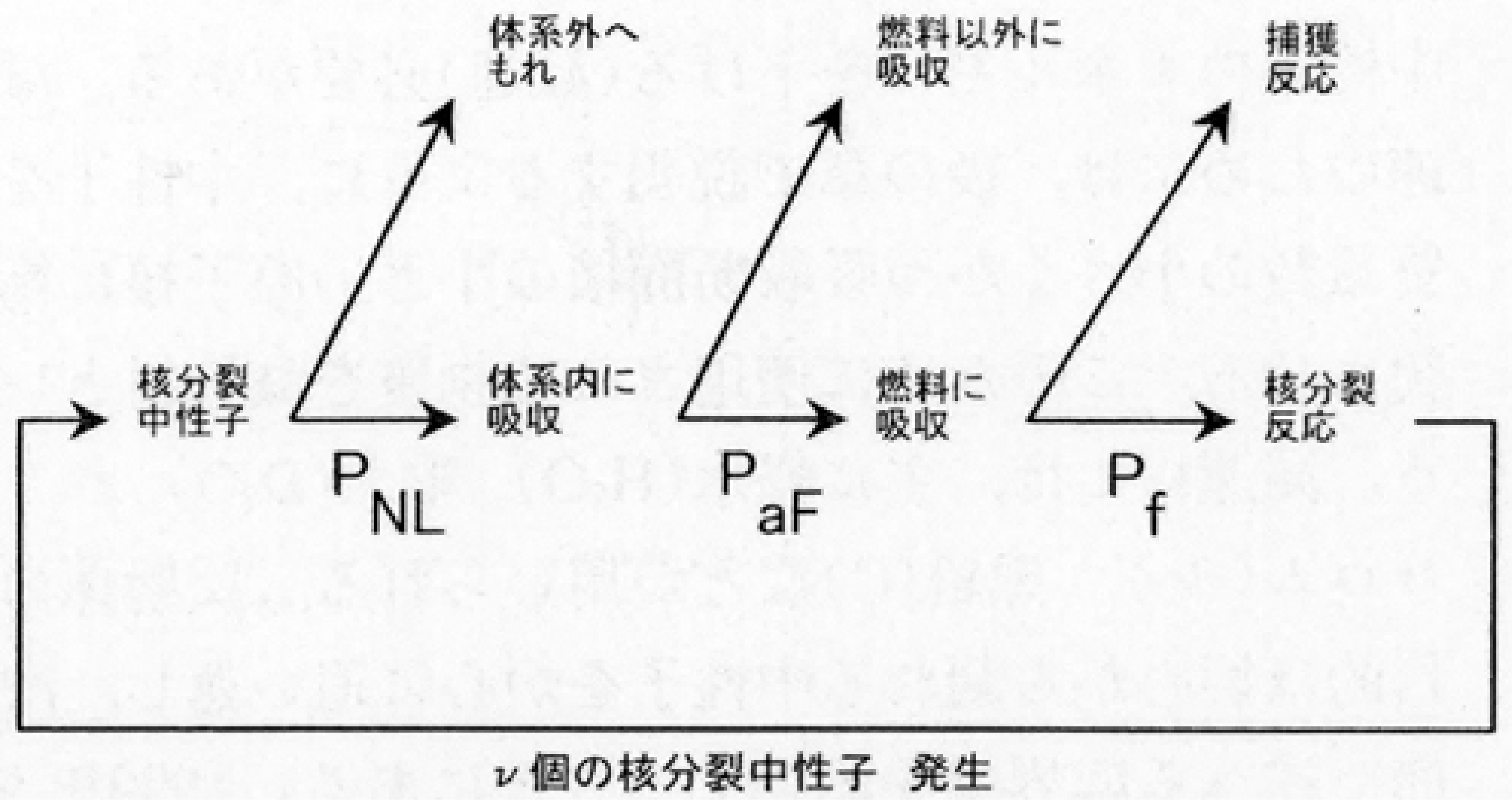


断面積のエネルギー変化 ー　質量の大きな核　ー

- 入射中性子エネルギーに対する^{235}Uの核分裂断面積の変化



核分裂連鎖反応のサイクル



4因子公式と6因子公式

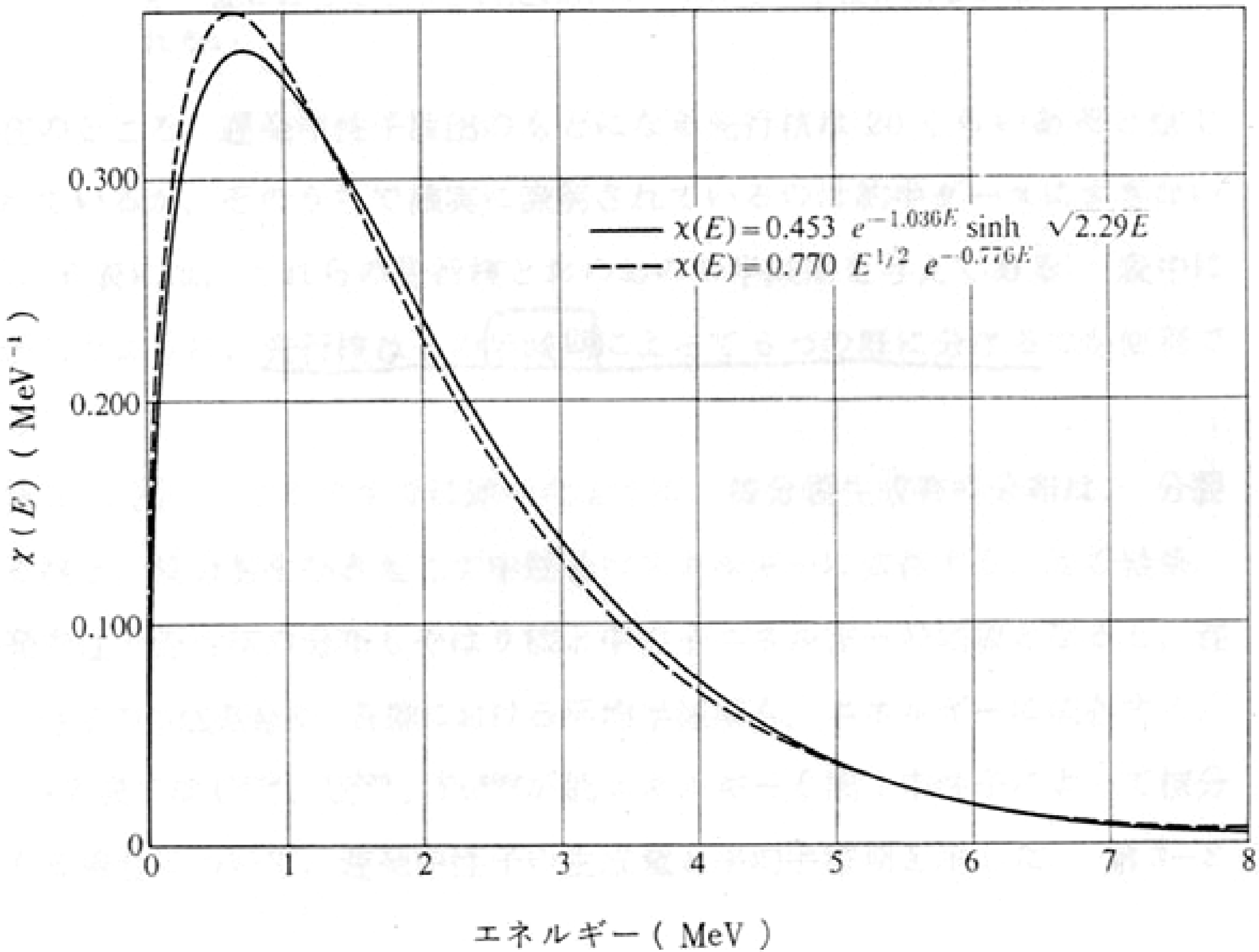
- 以上を総合すると、無限増倍率k_∞は

$$k_\infty = \varepsilon \ p \ \eta \ \ f$$

  と書ける。（4因子公式）
- 中性子が漏れない確率P_{NL}を、高速中性子の漏れない確率P_{FNL}と熱中性子が漏れない確率P_{TNL}に分け、増倍率を次のように書き直すこともある。（6因子公式）

$$k = k_\infty \ P_{NL} = \varepsilon \ p \ \eta \ \ f \ \ P_{FNL} \ \ P_{TNL}$$

即発中性子スペクトル



0.300
0.200
0.100
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8
χ(E) = 0.453 e^{-1.036E} sinh √2.29E
χ(E) = 0.770 E^{1/2} e^{-0.776E}
χ (E) (MeV⁻¹)
エネルギー (MeV)

中性子のエネルギー･空間の振舞い → 輸送理論

- 中性子は、原子炉の中で原子核と何回も衝突を行い、それが原因でジグザグの経路をたどって動き回る。この運動の結果、最初に原子炉のある特定の位置にあってある特定の方向へある特定のエネルギーで運動していた中性子は、すこし時間がたつとこの体系の別の位置に現れて、先程とは異なったエネルギーで異なった方向へ運動する。
- このような場合に、中性子は最初の位置とエネルギーから第二の位置とエネルギーへ輸送されたと言い、この現象を対象とするのが輸送理論である。

輸送方程式(ボルツマン方程式)

- 輸送理論は原理としては比較的簡単で、輸送現象を支配している厳密な方程式を導くことは容易である。
- この方程式は輸送方程式またはボルツマン方程式と呼ばれ、輸送理論を取り扱うということは、実質的にはこの方程式を解くことと同じ意味である。
- しかしながら、このボルツマン方程式を解くことは、式を導くことよりはるかに困難である。

中性子の空間での振舞い
→　拡散理論と拡散方程式

- ある種の条件のもとでは、ボルツマン方程式は極めて簡単になり、その処理も容易である。
- このような、簡単化された輸送理論の形式を拡散理論という。
- 通常、拡散理論を適用することが妥当であるための前提条件が完全に満たされることは滅多にない。
- しかしながら、通常この方法によって、厳密な輸送方程式の解に対する良い近似が得られる。

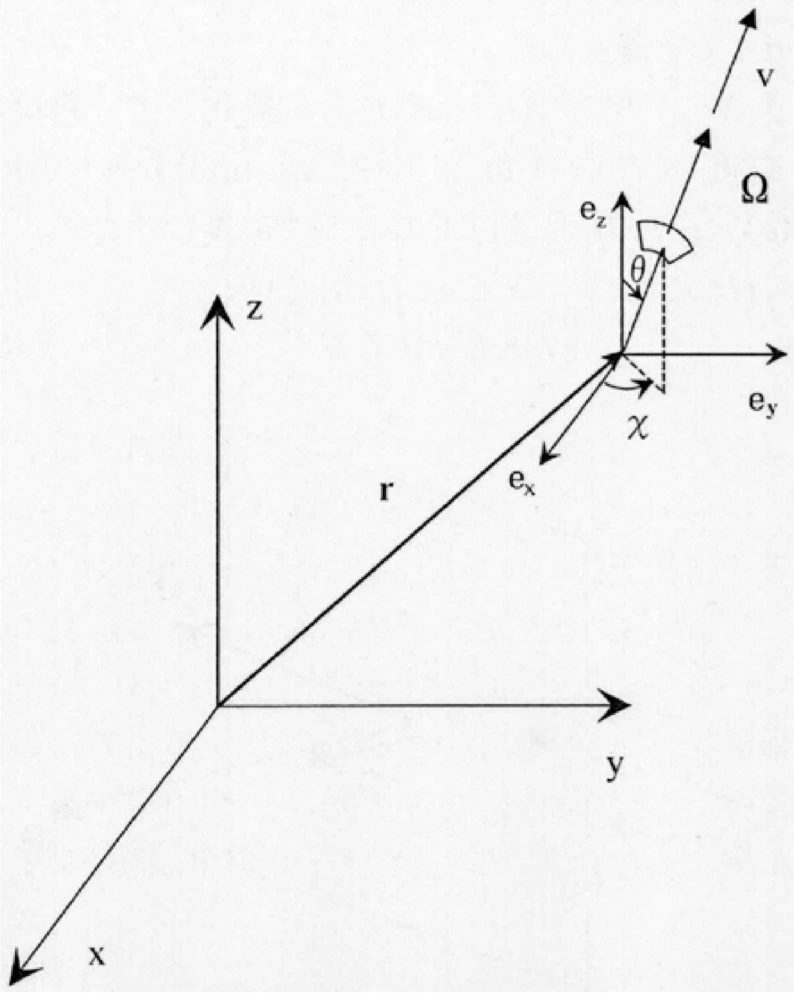
中性子密度と相互作用率

- 全ての中性子が同じエネルギーである仮定すると:
- 中性子密度分布: $n\ (\vec{\mathrm{r}}, w)$

  $r:$ *位置ベクトル*、$w:$ *立体角*
- 中性子の総数: $n(\vec{r}) = \int_{4\pi} n\ (\vec{\mathrm{r}}, w) d\Omega$
- ビーム強度: $dI(\vec{r}, w) = n(\vec{r}, w) \cdot v \cdot d\Omega$
- 相互作用率(衝突密度): $dF(\vec{r}, w) = \Sigma_t \cdot dI(\vec{r}, w)$
- 全相互作用率: $\int dF(\vec{r}, w) = \int \Sigma_t \cdot n(\vec{r}, w) \cdot v \cdot d\Omega$

$$F(\vec{r}) = \Sigma_t \cdot v \cdot \int_{4\pi} n(\vec{r}, w) \cdot d\Omega$$
$$= \Sigma_t \cdot v \cdot n(\vec{r})$$

相互作用と中性子束



- 中性子束:

$$\phi(\vec{r}) = n(\vec{r}) \cdot v$$

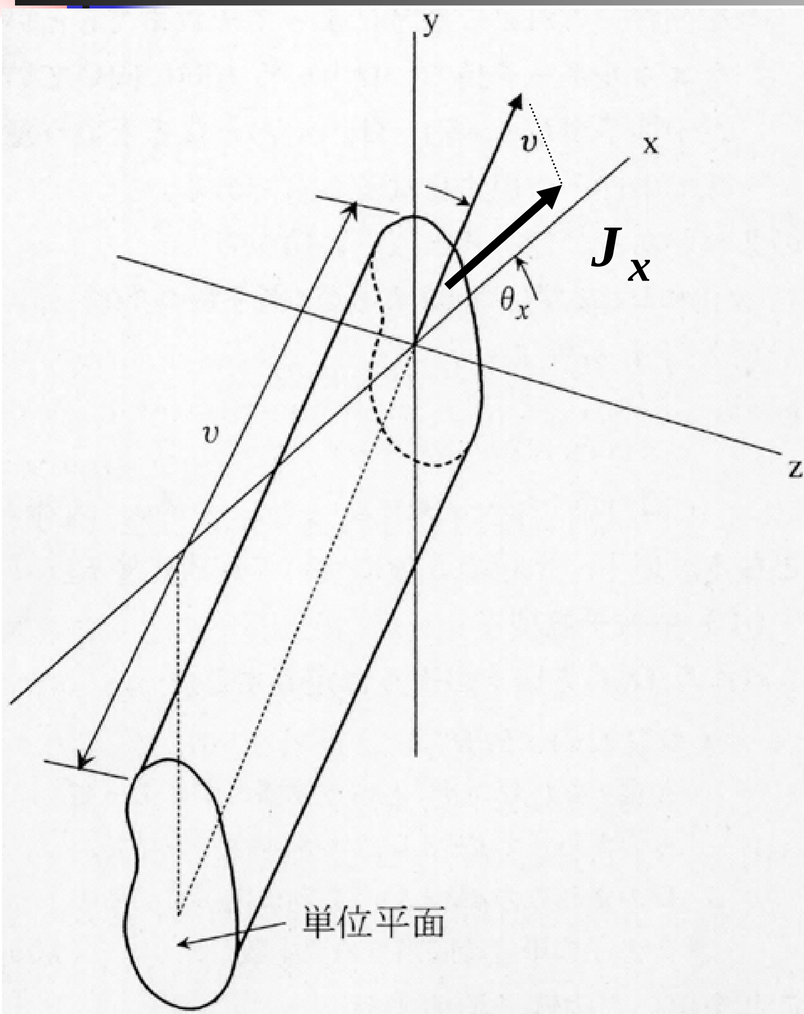
- 相互作用率:

$$F(\vec{r}) = \Sigma_t \cdot \phi(\vec{r})$$

- 中性子のエネルギーが単一でないとすると:

$$F(\vec{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_t \cdot \phi(\vec{r}, E) \cdot dE$$

中性子の流れの密度



- ビーム強度:

$$dI(\vec{r},w)=n(\vec{r},w)\cdot v\cdot d\Omega$$

- 正味の中性子の流れ:

$$\vec{J}=\int_{4\pi} n(\vec{r},w)\cdot\vec{v}\cdot d\Omega$$

$$J_x=\int_{4\pi} n(\vec{r},w)\cdot v\cos\theta_x\cdot d\Omega$$

連続の式の導出

(体積Vの中性子密度の変化 割合) = (生成率) − (吸収率) − (漏れの率)

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial}{\partial t}\int_V n(\vec{r},t)\cdot dV$$

$$(\text{生成率}) = \int_V s(\vec{r},t)\cdot dV$$

$$(\text{吸収率}) = \int_V \Sigma_a(\vec{r})\cdot \phi(\vec{r},t)\cdot dV$$

$$(\text{漏れの率}) = \int_A \vec{J}(\vec{r},t)\cdot \vec{n}\cdot dA$$

- 以上より

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V n(\vec{r},t)\cdot dV = \int_V s(\vec{r},t)\cdot dV - \int_V \Sigma_a(\vec{r})\cdot \phi(\vec{r},t)\cdot dV - \int_A \vec{J}(\vec{r},t)\cdot \vec{n}\cdot dA$$

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V n(\vec{r},t)\cdot dV = \int_V s(\vec{r},t)\cdot dV - \int_V \Sigma_a(\vec{r})\cdot\phi(\vec{r},t)\cdot dV - \int_A \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\cdot dA$$

- に対してガウスの発散定理より

$$\int_A \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\cdot dA = \int_V div\vec{J}(\vec{r},t)\cdot dV$$

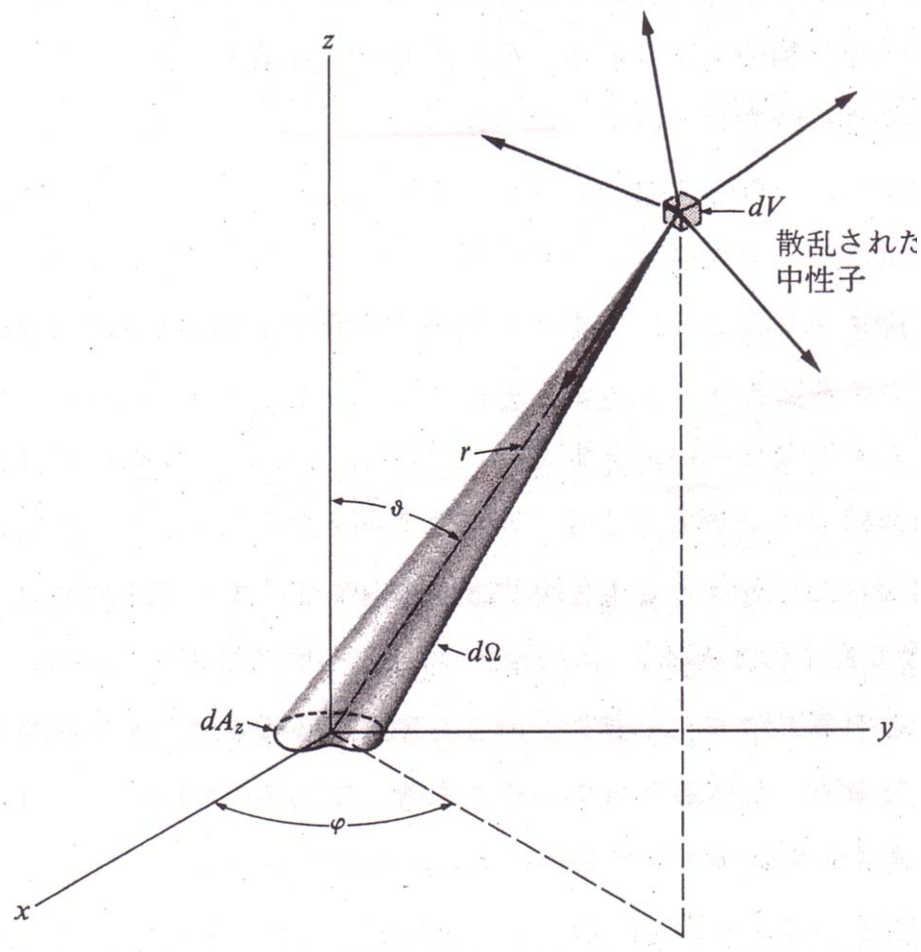
- を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V n(\vec{r},t)\cdot dV = \int_V s(\vec{r},t)\cdot dV - \int_V \Sigma_a(\vec{r})\cdot\phi(\vec{r},t)\cdot dV - \int_V div\vec{J}(\vec{r},t)\cdot dV$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}n(\vec{r},t) = s(\vec{r},t) - \Sigma_a\phi(\vec{r},t) - div\vec{J}(\vec{r},t)}$$

連続の式

拡散近似



拡散近似

- 媒質は無限
- 媒質は均質
- 媒質中に中性子源はない
- 実験室系において散乱は等方的
- 中性子の場所による変化は滑らか
- 中性子の時間による変化は無視する。

フィックの法則(1/4)

- 点rに位置する体積要素dVの中で毎秒散乱衝突される中性子のうち、dAへ散乱され、距離rの間に吸収されずdAに到達する割合は、

$$\Sigma_s \phi(\vec{r}) dV \cdot \frac{dA_z}{4\pi r^2} \cdot e^{-\Sigma_t r}$$

- dAを通して、下向きに流れる中性子の総数は、

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} \Sigma_s \phi(\vec{r}) \cdot dV \frac{dA_z}{4\pi r^2} \cdot e^{-\Sigma_t r}$$

- よって単位面積当たりに負の方向へ通過する中性子数は、

$$J_z^- = \frac{1}{dA_z} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} \Sigma_s \phi(\vec{r}) \cdot \frac{dA_z}{4\pi r^2} \cdot e^{-\Sigma_t r} \cdot dV$$

フィックの法則(2/4)

- ここで

$$dV = r^2 \sin\theta \cdot d\theta d\varphi dr$$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\iota}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\varphi$$

- だから

$$J_z^- = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-\Sigma_t r}\cdot\left[\phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 r\cos\theta\right]\cos\theta\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\Sigma_s\phi_0}{4\Sigma_t} + \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0$$

フィックの法則(3/4)

- 同様にして

$$J_z^+ = \frac{\Sigma_s \phi_0}{4\Sigma_t} - \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0$$

- よって、単位面積を通過する正味の中性子の流れは、

$$J_z = J_z^+ - J_z^- = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0$$

$$J_x = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0$$

$$J_y = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0$$

$$J_z = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \left(J_x, J_y, J_z\right) \\ &= -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0 \\ &= -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}\, grad\, \phi \\ &= -D \cdot grad\, \phi\end{aligned}$$

フィックの法則

フィックの法則(4/4)

- フィックの法則:

  (中性子の正味の流れ) $\propto$ (中性子の勾配)

$$\vec{J} = -D \cdot grad\phi$$

- 拡散係数: $D = \dfrac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}$

拡散方程式(1/2)

- フィックの法則を連続の式に代入すると、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = s - \Sigma_a \phi + div(Dgrad\phi)$$

- ここで、 $\phi = nv$ より、

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} = s - \Sigma_a \phi + Ddiv(grad\phi)$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} = s - \Sigma_a \phi + D\nabla^2\phi$$:拡散方程式

- 定常状態とすると

$$\boxed{D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + s = 0}$$:ヘルムホルツ方程式

拡散方程式(2/2)

- 拡散距離を次式により定義すると、

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$$

- 拡散方程式は、以下の通りに表される。

$$\boxed{\nabla^2 \phi - \frac{1}{L^2}\phi + \frac{S}{D} = 0}$$

ラプラス演算子

- 直角座標

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- 円柱座標:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x} r \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- 球座標:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r} r^n \frac{\partial}{\partial r}$$

n=0: 直角座標

n=1: 円柱座標

n=2: 球座標