第4章　非定常熱伝導

- 伝熱工学の基礎：　伝熱の基本要素、フーリエの法則、ニュートンの冷却則
- 1次元定常熱伝導：　熱伝導率、熱通過率、熱伝導方程式
- 2次元定常熱伝導：　ラプラスの方程式、数値解析の基礎
- 非定常熱伝導：　非定常熱伝導方程式、ラプラス変換、フーリエ数とビオ数
- 対流熱伝達の基礎：　熱伝達率、速度境界層と温度境界層、層流境界層と乱流境界層、境界層厚さ、混合平均温度
- 強制対流熱伝達：　管内乱流熱伝達、円柱および球の熱伝達、管群熱伝達
- 自然対流熱伝達：　垂直平板自然対流熱伝達、密閉層内自然対流、共存対流熱伝達
- 輻射伝熱：　ステファン-ボルツマンの法則、黒体と灰色体、輻射率、形態係数
- 凝縮熱伝達：　鉛直平板膜状凝縮、凝縮数、水平円管膜状凝縮、滴状凝縮
- 沸騰熱伝達：　沸騰曲線、気泡力学、沸騰熱伝達率

非定常熱伝導とは

物体の周囲温度が急変した場合
物体内の温度が平衡状態に達するまでに
ある時間が必要。

↓

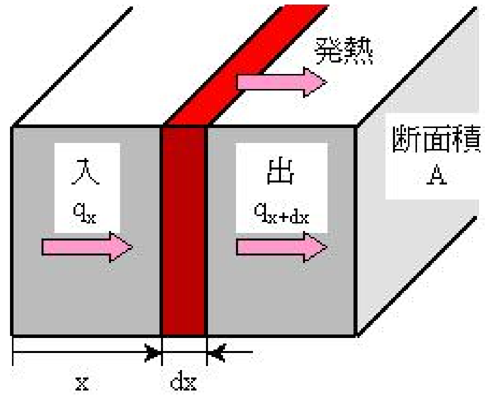
実用的には、平衡状態に達するまでの非定常な
加熱や冷却の過程を計算することが必要。

↓

非定常熱伝導方程式(1次元)

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

非定常項



熱伝導の物理

$$\begin{pmatrix} \Delta x\text{の中での} \\ \text{温度変化} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x\text{の中での} \\ \text{熱発生} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{境界 } x \text{ における} \\ \text{熱の流入} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{境界 } x+\Delta x \text{ にお} \\ \text{ける熱の流出} \end{pmatrix}$$

$$\Delta x A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \Delta x A \cdot g \qquad q_x = -\lambda A \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x \qquad q_{x+\Delta x} = -\lambda A \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

ここで、$q_{x+\Delta x}$ をTaylor展開し高次の項を無視すると、

$$q_{x+\Delta x} = -\lambda A \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = -\lambda A \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x - \lambda A \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_x \Delta x - \cdots$$

となるから

$$\Delta x A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta x A g + \Delta x A \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ρ :密度
c :比熱
λ :熱伝導率

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g^*$$

ここで $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ 　$g^* = \dfrac{g}{\rho c}$

物体の大きさが無視できる場合 ー 集中熱容量モデル ー

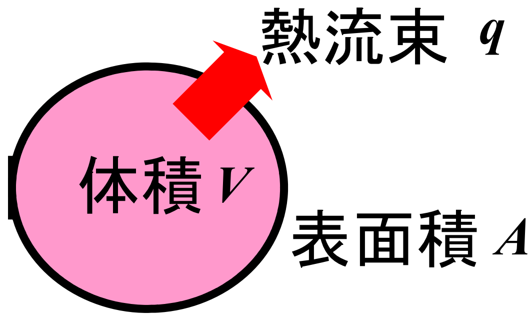
表面積: A　体積: V　の物体表面から移動する熱流束: $q = \dfrac{Q}{A}$
は、集中定数系近似を行うことによって、

$$Q = hA\left(T - T_{\infty}\right) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau}$$

ρ :密度
c :比熱
h :熱伝達率

と表すことができるので、
境界条件: $t = 0$　において、$T = T_0$　とすると、
解析的に解くことができて、その解は以下となる。

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\left(hA/c\rho V\right)\cdot t}$$



物体からの熱移動や温度変化を支配する無次元数
ー　ビオ数とフーリエ数　ー

ビオ数:
$$Bi \equiv \frac{hL}{k} = \frac{hL \cdot LT}{k \cdot LT} = \frac{hL^2 T}{kL^2 \left(\frac{T}{L} \right)} = \frac{[\text{熱伝達による移動熱量}(W)]}{[\text{熱伝導による移動熱量}(W)]}$$

フーリエ数:
$$Fo \equiv \frac{\alpha \tau}{L^2} = \frac{k\tau}{\rho c L^2} = \frac{k\tau \cdot L\Delta T}{(\rho L^3) c \cdot \Delta T} = \frac{[\text{熱伝導による移動熱量}(J)]}{[\text{保有熱量}(J)]}$$

を定義すると、これによって、熱流束の時定数が表される。

$$\frac{hA}{\rho c V} t \approx \frac{h}{\rho c L} t = \left(\frac{hL}{k} \right) \cdot \left(\frac{k}{\rho c L^2} t \right) = Bi \cdot Fo$$

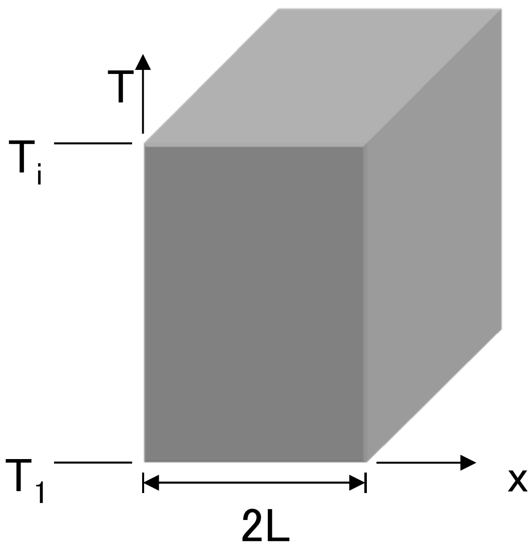
これより、集中定数系における温度変化は以下により表される。

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left(hA / c\rho V \right) \cdot t} = e^{-Fo \cdot Bi}$$

熱移動や温度が時間によって変化する場合、ビオ数とフーリエ数を知ることによって、その性質を特定することができる。

無限平板の非定常熱伝導

一様な温度T_iの無限平板があり、時刻0のとき、
その表面が、急に$T=T_1$の温度に下がったとする。



非定常熱伝導方程式:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$\theta = T - T_1$を導入すると、

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

初期条件: $\tau = 0,\quad 0 \le x \le 2L$ で $\theta = \theta_i = T_i - T_1 \quad (a)$

境界条件: $x = 0,\quad \tau > 0$ で $\theta = 0 \quad (b)$

$x = 2L,\quad \tau > 0$ で $\theta = 0 \quad (c)$

基礎式の変形

変数分離法

$$\theta = XT \quad \text{ただし} \quad X = X(x)$$
$$T = T(\tau)$$

仮定した解Tを、基礎方程式に代入

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau}$$

x, tはそれぞれ独立であり、両辺はある定数$-\lambda^2$に等しくなければならない。よって、

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \frac{dT}{d\tau} + \alpha\lambda^2 T = 0$$

一般解

境界条件に適合するためには、 $\lambda^2 > 0$
でなければならない。従って、一般解は、

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \alpha \cdot \tau}$$

境界条件(b)より、 $\tau > 0$ において、$C_1 = 0$ であるから、
さらに、 $C_2 = 0$ とはならないことから、
境界条件(c)より、 $\sin 2L\lambda = 0$ 、すなわち

$$\lambda = \frac{n\pi}{2L} \quad n = 1,2,3,\cdots$$

したがって、最終的な解は級数の形で

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n\pi/2L)^2 \alpha\tau} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

級数解の決定

定数C_nは初期条件(a)により次式で与えられる。

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{2L}$$

$$\int_0^{2L} \theta_i \cdot \sin\frac{m\pi x}{2L}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{2L} \sin\frac{n\pi x}{2L} \cdot \sin\frac{m\pi x}{2L}\, dx$$

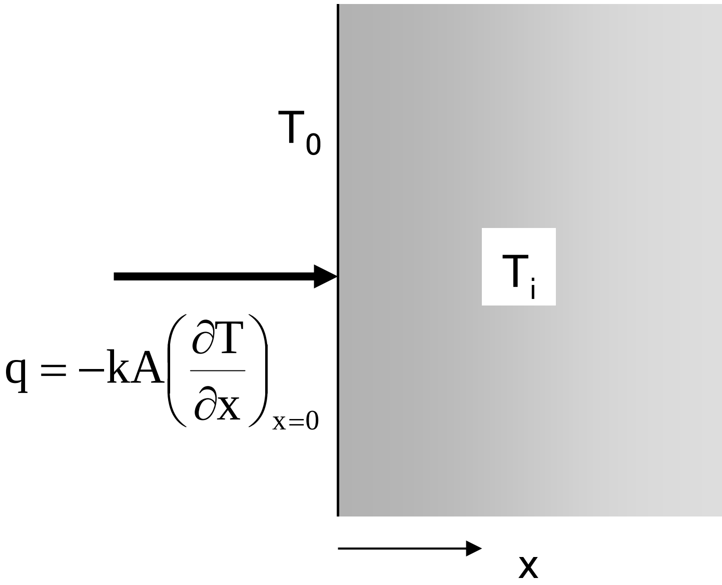
$$C_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \theta_i \sin\frac{n\pi x}{2L} dx = \frac{4}{n\pi}\theta_i, \quad n = 1,3,5,\cdots$$

結局、級数解は

$$\boldsymbol{\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_i}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{-(n\pi/2L)^2 \alpha\tau} \sin\frac{n\pi x}{2L} \quad n = 1,3,5,\cdots}$$

半無限物体の非定常熱伝導(解法その1)
ー　関数展開による解法　ー

一様な温度T_iの半無限物体があり、時刻0のとき、その表面が急に$T=T_0$の温度に下がり、その温度が保たれるとする。



非定常熱伝導方程式:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$\theta = T - T_0$を導入すると、

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

正規直交関数による展開係数の決定

正規直交関数 $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx = \delta_{mk}$

ここで

$$\delta_{mk} \equiv \begin{cases} 1 & (m = k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases}$$

クロネッカのデルタ関数

$$\downarrow$$

$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b \varphi_m(x)F(x)dx = c_k \int_a^b \varphi_m^2(x)dx = c_m \longrightarrow \{c_m\}$$

半無限物体の非定常熱伝導

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

初期条件: $u(x,0) = 1$

境界条件: $u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(1,t) = 0$

u(x,t)を $\left\{ \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2} \right\}$ で展開すると　(m=1,2,3,…..)

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

一般解と係数の決定

原方程式に代入

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{2m-1}{2}\pi x\frac{dc_m}{dt}=-\sum_{m=1}^{\infty}c_m\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2\sin\frac{2m-1}{2}\pi x$$

直交条件より

$$\frac{dc_m}{dt}=-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 c_m$$

よって、

$$c_m=c_{m0}e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t}$$

求める解は、

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

初期条件より　$u(x,0)=1$　であるから

$$1=\sum_{m=1}^{\infty}c_{m0}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

解の決定

区間[0 1]における関数

$$u(x)=1 \quad (0 \le x \le 1)$$

を正弦波で展開すると、

$$u(x)=1=\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2} \qquad (0 \le x \le 1)$$

ここで、展開係数c_m は、

$$c_m=\frac{4}{(2m-1)\pi}$$

→ Program: ORTHG

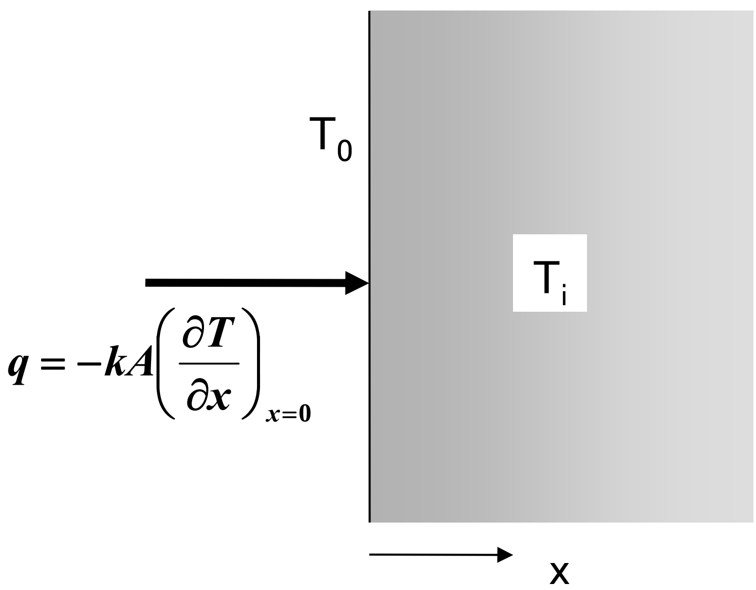
であるから、よって解析解は

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)\pi}\exp\left[-\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 t\right]\sin\frac{2m-1}{2}\pi x$$

→ Program: HEATX

半無限物体の非定常熱伝導(解法その2)
ー　変数変換による解法　ー

一様な温度T_iの半無限物体があり、時刻0のとき、その表面が急に$T=T_0$の温度に下がり、その温度が保たれるとする。



非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

初期条件、境界条件

$$T(x,0)=T_i$$

$$T(0,\tau)=T_0 \quad (\tau>0)$$

変数変換による解法

以下の変数変換を行う。

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

この変数の物理的意味は、「x軸の目盛りを時々刻々変化させたとき、$2\sqrt{at}$ を基準にして温度分布を計測すると、温度分布は時間に関わらず相似となり、一つの独立変数の関数となる」ということを意味する。いま、

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \left(-\frac{x}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2t\sqrt{t}} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{at}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \cdot \left(\frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d}{d\eta} \cdot \left(\frac{dT}{d\eta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{at}} \right) = \frac{1}{4at} \cdot \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

変数変換による解法

であるから基礎式は、

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + 2\eta\frac{dT}{d\eta} = 0$$

ここで更に、

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} \equiv f(\eta)$$

とおくと、基礎式は、

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta\frac{df}{d\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad f'' + 2\eta \cdot f' = 0 \qquad \left(\because f'' = \frac{d^2 f}{d\eta^2}, f' = \frac{df}{d\eta} \right)$$

また、境界条件は、

$$x = 0 \quad T = T_0 \rightarrow \quad \eta = 0 \;\; f = 0$$

$$\tau = 0 \quad T = T_i \rightarrow \quad \eta = \infty \;\; f = 1$$

変数変換による解法

であるから、

$$f''+2\eta \cdot f'=0$$

$$2\eta=-\frac{f''}{f'}=-\frac{d\left(ln(f')\right)}{d\eta}$$

$$\int 2\eta d\eta=-\int\frac{d\left(ln(f')\right)}{d\eta}d\eta$$

$$-2\cdot\frac{\eta^2}{2}+C_1'=ln(f')$$

$$f'=e^{-\eta^2+C_1'}=C_1\cdot e^{-\eta^2}$$

$$\therefore f=C_1\int e^{-\eta^2}d\eta+C_2$$

変数変換による解法

境界条件より

$$f(\eta=0)=C_1\int_0^0 e^{-\eta^2}d\eta+C_2=C_1\cdot 0+C_2=C_2=0$$

$$f(\eta=\infty)=C_1\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta+C_2=C_1\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta=1$$

$$\therefore C_1=\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore f=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\eta^2}d\eta=erf(\eta)$$

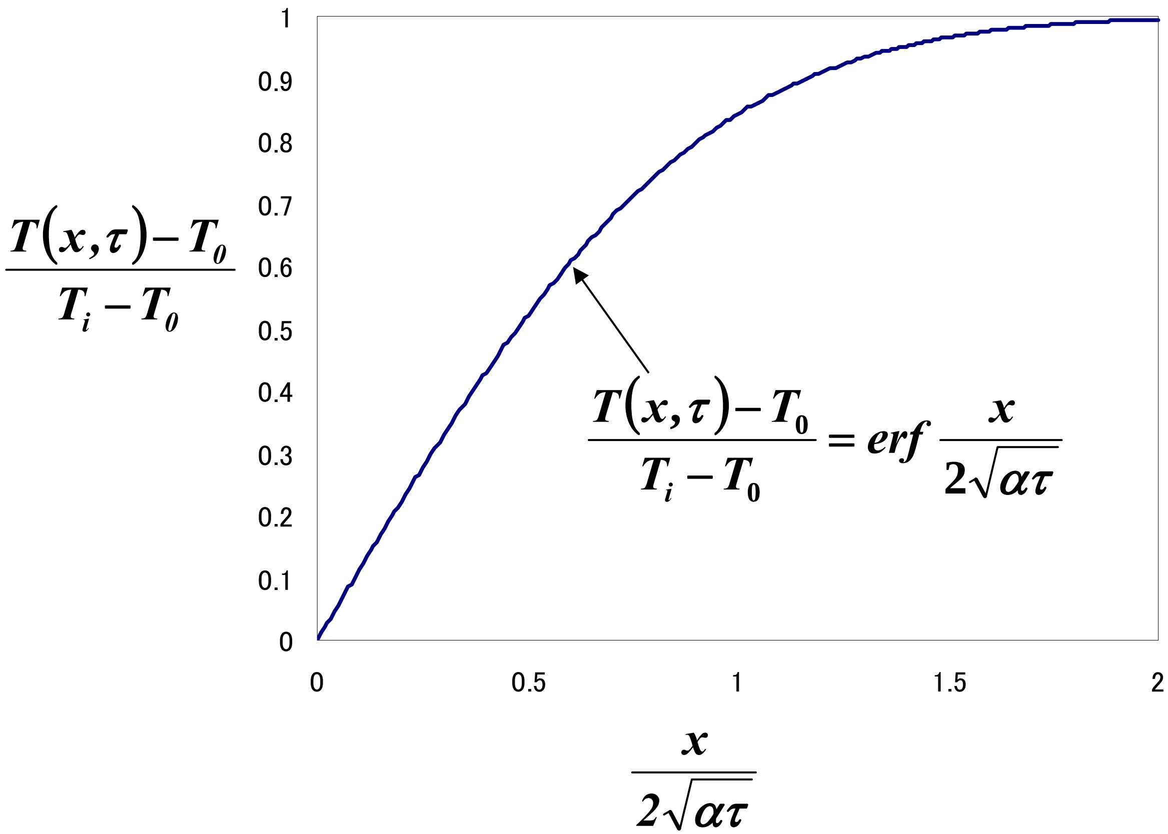
$$\therefore \frac{T(x,\tau)-T_0}{T_i-T_0}=erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

ここで、

$$erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}}e^{-\eta^2}d\eta$$

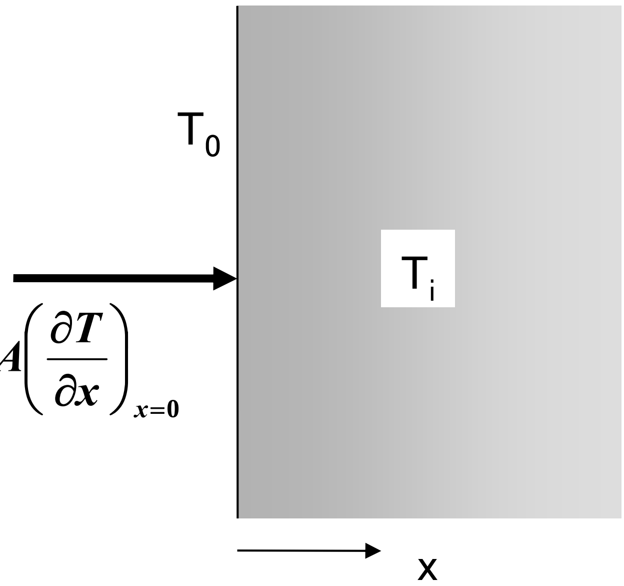
は、ガウスの誤差関数である。

半無限物体内の温度分布



半無限物体の非定常熱伝導(解法その3)
ー　ラプラス変換による解法　ー

一様な温度T_iの半無限物体があり、時刻0のとき、その表面が急に$T=T_0$の温度に下がり、その温度が保たれるとする。



$$q=-kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

非定常熱伝導方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

初期条件、境界条件

$$T(x,0)=T_i$$

$$T(0,\tau)=T_0 \quad (\tau>0)$$

ラプラス変換による解法

$\theta = T - T_0$ を導入すると、基礎方程式と境界条件は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

ならびに

$$\theta(x,0) = 0$$
$$\theta(0,\tau) = \theta_0 \quad (\tau > 0)$$

この基礎式と境界条件をラプラス変換すると

$$\boxed{F(p) \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt}$$

より

$$\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt} dt = p\Theta - \theta(t=0) \qquad \Theta(p) \equiv \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} e^{-pt} dt$$

であるから、

$$p\Theta - \theta(t=0) = \alpha \frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

ならびに

$$\theta(t=0) = 0$$
$$\Theta(x=0) = \frac{\theta_0}{p}$$

上式の一般解は、

$$\Theta(p,x) = Ae^{\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x}$$

ラプラス変換による解法

解は無限遠で有解でなければならないから　$A = 0$

また、境界条件より、　$B = \dfrac{\theta_0}{p}$

よって、

$$\Theta(p,x) = \frac{\theta_0}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}x}$$

この式をラプラス逆変換することによって

$$\frac{T(x,\tau) - T_0}{T_i - T_0} = erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

ここで、

$$erf\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\,d\eta$$

は、ガウスの誤差関数である。

ラプラス変換表

①具体的な時間関数とラプラス変換の対応

No	f(t)	F(s)
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5	sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	e^{bt}sin at	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
8	e^{bt}cos at	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
9	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
10	cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
11	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
12	t sin at	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
13	t cos at	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
14	$\frac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\frac{a}{s}$
15	$\delta(t)$	1

熱流束の決定

任意の点における熱流束は、

$$q = \frac{Q}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

であるから、解に誤差関数を代入することによって、

$$\frac{T(x,\tau) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2} d\eta$$

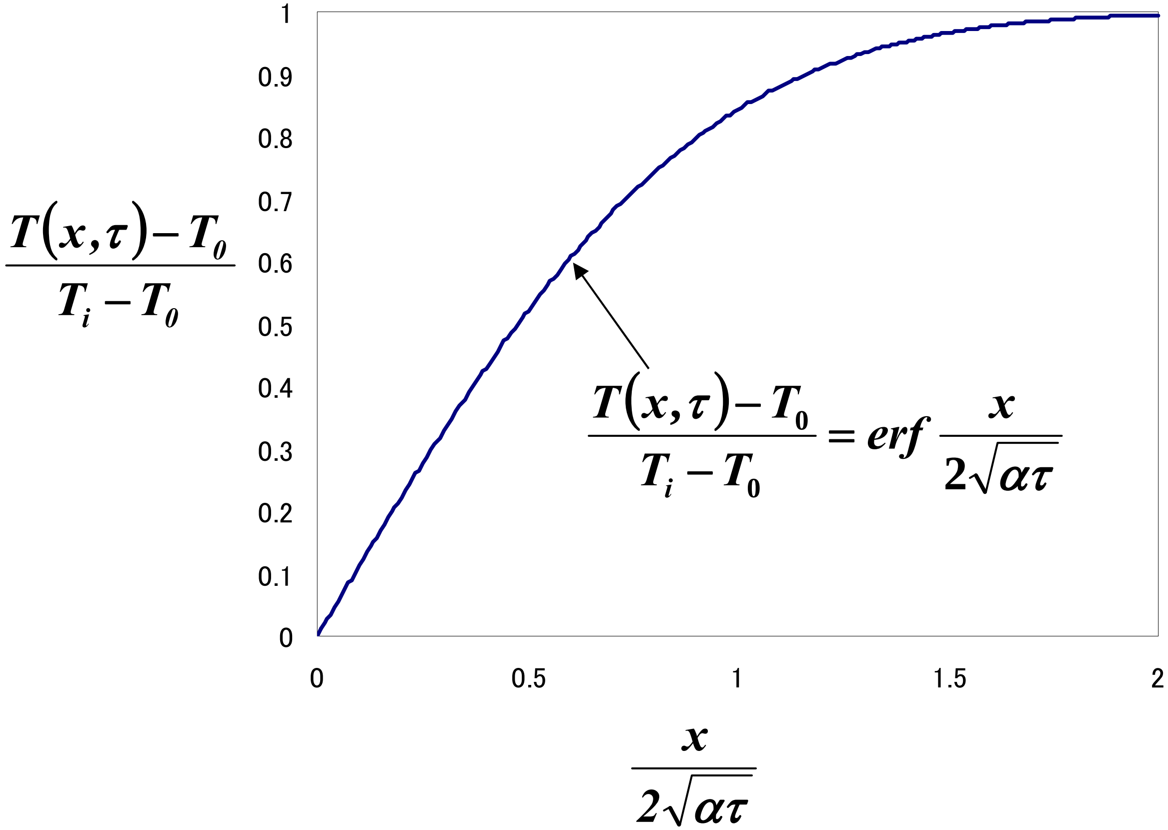
として得られる式を、偏微分すると、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) = \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} e^{-x^2/4\alpha\tau}$$

より、表面からの移動熱量が以下の式で与えられる。

$$Q_0 = q_0 A = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}$$

半無限物体内の温度分布



表面熱流束一定の場合の非定常熱伝導

初期温度分布が一様で、表面の熱流束を、突然一定の値Q_0/Aにした場合を考える。初期条件、境界条件は

$$T(x,0) = T_i$$

$$\frac{Q_0}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg)_{x=0} \qquad (\tau > 0)$$

この場合の解は

$$T - T_i = \frac{2q_0\sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{kA}\left(1 - erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

対流がある場合の非定常熱伝導問題

半無限物体表面で対流がある場合の境界条件:

$$hA\left(T_\infty - T\right)_{x=0} = -kA\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

この問題に対する解は

$$\frac{T-T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - erfX - \left[exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right]\left[1 - erf\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right]$$

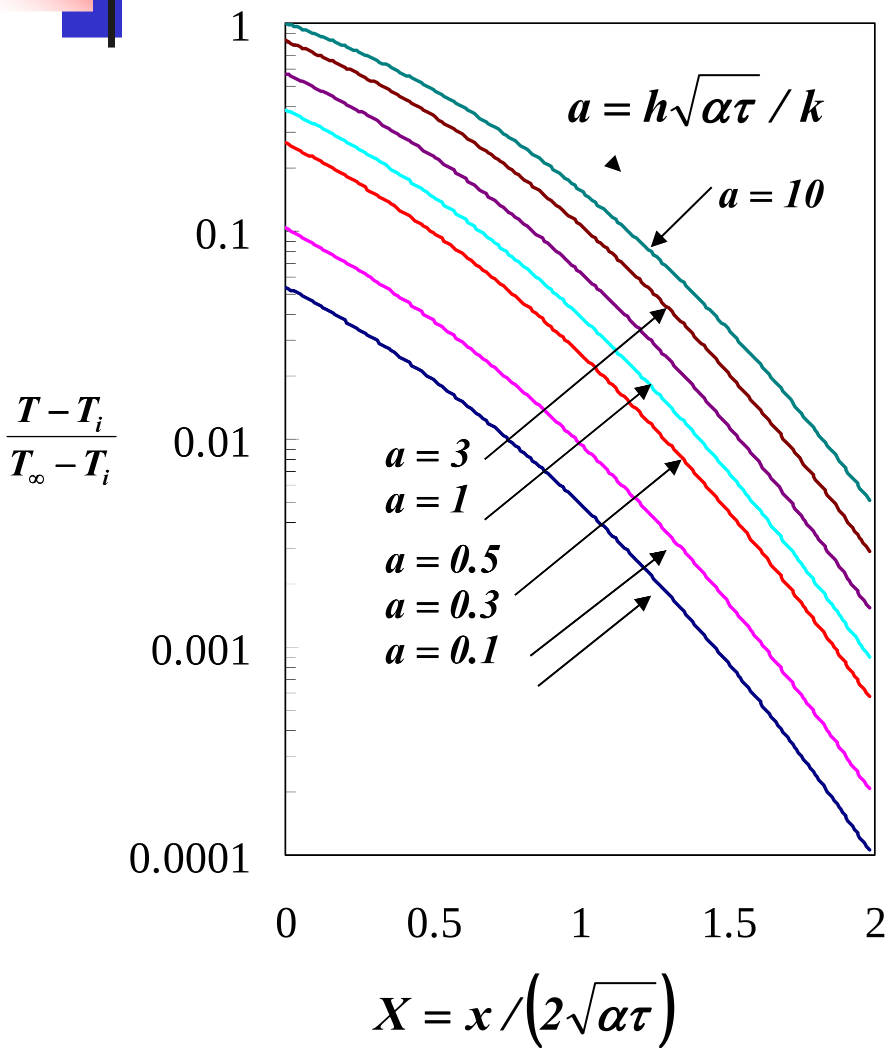
ここで、

$$X = x/\left(2\sqrt{\alpha\tau}\right), \quad a = h\sqrt{\alpha\tau}/k$$

T_i = *物体の初期温度*

T_∞ = *周囲の流体温度*

表面で熱伝達が行われるときの半無限物体内の温度分布



対流がある場合の非定常熱伝導問題

$$\frac{T-T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - erfX - \left[exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right]\left[1 - erf\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right]$$

物体の大きさが無視できる場合の解法 ー 集中定数系近似 ー

表面積: A 体積: V の物体表面からの移動熱流束を、

$$Q = hA\left(T - T_\infty\right) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau}$$

と集中定数近似し、境界条件: $\tau = 0$ において、$T = T_0$ とすると

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left(hA / c\rho V \right) t}$$

が得られる。いま、物体の代表長さをsで表すと、無次元数

ビオー数: $$Bi \equiv \frac{hs}{k} = \frac{hs \cdot sT}{k \cdot sT} = \frac{hs^2 T}{ks^2\left(\dfrac{T}{s}\right)} = \frac{[熱伝達による移動熱量(W)]}{[熱伝導による移動熱量(W)]}$$

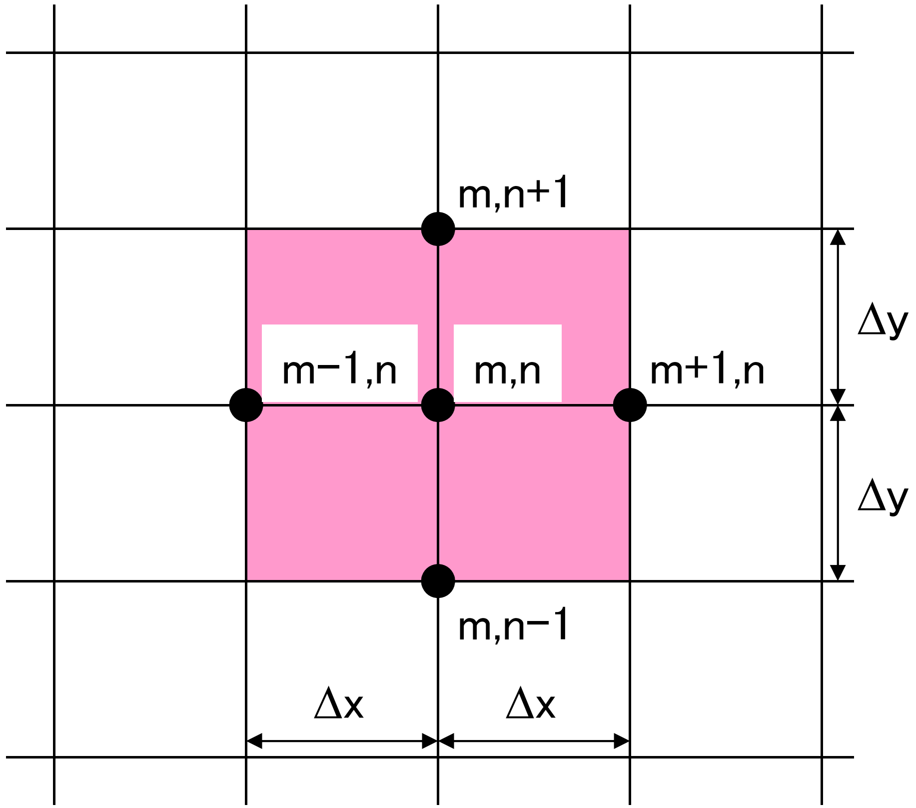
フーリエ数: $$Fo \equiv \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho c s^2} = \frac{k\tau \cdot s\Delta T}{(\rho s^3)c \cdot \Delta T} = \frac{[熱伝導による移動熱量(J)]}{[保有熱量(J)]}$$

が定義され、これによって、熱流束の時定数が表される。

$$\frac{hA}{\rho c V}\tau = \frac{h}{\rho c s}\tau = \frac{hs}{k}\frac{k}{\rho c s^2}\tau = Bi \cdot Fo$$

非定常問題の数値解法

2次元物体を微小要素に分割する。mはx座標を、nはy座標を表す。



差分近似

微分方程式

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\rho C\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

2階の偏微分の近似式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\approx\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{m+1,n}-2T_{m,n}+T_{m-1,n}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\approx\frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{m,n+1}-2T_{m,n}+T_{m,n-1}\right)$$

時間偏微分の近似式

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{T_{m,n}^{p+1}-T_{m,n}^{p}}{\Delta \tau}$$

差分方程式

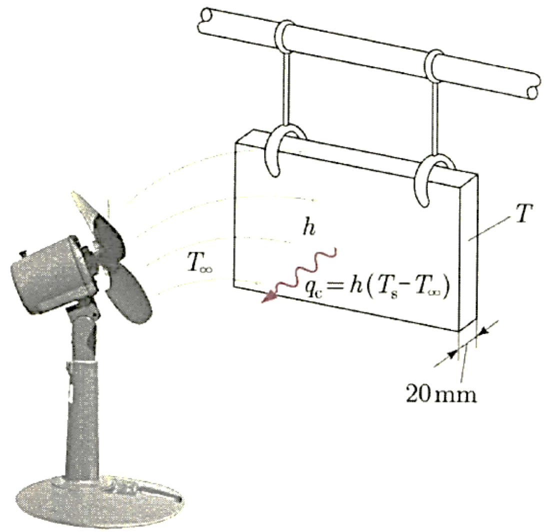
非定常熱伝導方程式に対する差分式

$$\frac{T^p_{m+1,n} - 2T^p_{m,n} + T^p_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T^p_{m,n+1} - 2T^p_{m,n} + T^p_{m,n-1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta \tau}$$

$\Delta x = \Delta y$として$T^{p+1}_{m,n}$について解くと、

$$T^{p+1}_{m,n} = \frac{\alpha \Delta \tau}{\Delta x^2}\left(T^p_{m+1,n} + T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m,n-1}\right) + \left[1 - \frac{4\alpha\Delta\tau}{\Delta x^2}\right]T^p_{m,n}$$

問題4-1



図に示すように，厚さ20 mm の十分大きい炭素鋼板が均一温度T_i= 800 K に加熱された後，T_∞=300 Kの空気中で冷却される。空気との熱伝達率をh=80W/(m^2･K)とすると、T=550 Kとなる時間を推定せよ。ただし、炭素鋼板の熱伝達率k=43W/(m･K)、代表長さL=0.02 (m)、熱拡散率を、α=1.18×10^{-5}(m^2/s)とする。また、ビオ数Bi≪1のとき、集中熱容量モデルとして以下の式を用いてよい。

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hL}{c\rho V} t \right) = \exp(-Fo \cdot Bi)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \qquad Bi = \frac{hL}{k} \qquad Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

問題4-2

鉄（k=45W/m^2・K、α=1.4×10^{-5}m^2/s）のブロックを最初一様な温度35℃にしておき、

(a)突然表面の温度を250℃に上げる場合
(b)突然に一定表面**熱流束**3.2×10^{5}W/m^{2}を加える場合

について、0.5分後の表面から2.5cmの位置の温度を計算せよ。
　ただし、右の表を使用して良い。

$\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\,\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.54	0.55494
0.56	0.57162
0.58	0.58792
0.60	0.60386
0.62	0.61941
0.64	0.63459

問題4-3

大きなアルミニウムの棒材が一様な温度200℃に保たれていて、突然、表面温度が70℃に下がった。4.0 cmの深さのところの温度が120度に下がったときまでに棒材表面の単位面積あたりに逃げた熱量を求めよ。

ただし、アルミニウムの物性値は、

$$\alpha = 8.4 \times 10^{-5} m^2/s, \quad k = 215 W/m \cdot K$$

とする。

問題4−4

以下の変数の定義式を記述し、それぞれが無次元となることを示しなさい。

- レイノルズ数
- ビオ数
- フーリエ数

熱伝導とフーリエ級数ならびにその数値処理

- 伝熱工学的知識の吸収から・・・

↓

- 熱伝導の物理的意味
- フーリエの法則の意味するところ
- 熱伝導方程式の有用性の実体験
- 数学知識の有効性の実体験
- フーリエ級数の起源について
- 計算機を用いた数値処理の実体験
- より高度な数値処理や数値解析への導入

↓

- ・・・・数値解析的応用への展開

レポート課題

- 幅2X、初期温度Taの物体が、瞬時に壁温Twの無限平板にはさまれたとする。奥行きならびに高さ方向の温度変化を無視し,1次元x方向の温度変化のみを考慮することとし,温度拡散係数をαとする。この時刻以降における、この無限平板内での温度分布の時間変化を記述するための理論式を導出しなさい。

  - 提出期限： **平成27年6月12日（金）**、講義開始前
  - 提出場所： **3B402**講義室

（注意事項）

- レポート作成にあたっては、以下の内容を含むよう留意すること。
  - ・ レポートのタイトル、所属・学年・学籍番号・氏名
  - ・ 問題についての説明（自分の理解・問題設定として）
  - ・ 資料・情報の出典（もしあれば）

板の非定常熱伝導問題

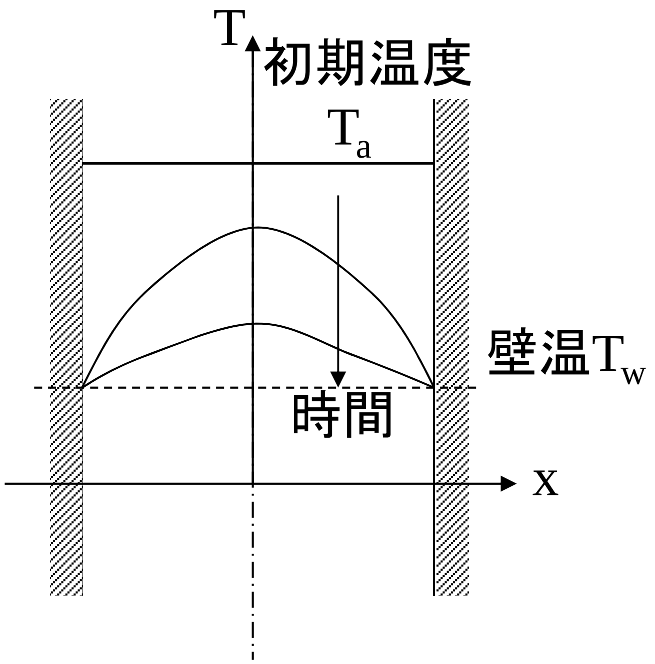


Fig.1

初期温度Taの物質が幅2X,壁温Twの無限平板に挟まれているとする時、この物質の温度T(t,x)は以下の熱伝導方程式によって記述される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{-------------------} \quad (1)$$

ただし $$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad \text{-------------------} \quad (2)$$

ここで

α : 温度拡散率(m^2/s)

λ : 熱伝導率$(W/m\cdot K)$

ρ : 密度(kg/m^3)

C_p : 定圧比熱$(J/kg\cdot K)$