講義予定(案)

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第１章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第２章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第３章) +変換 (テキスト第４章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第５章)+連立一次方程式の解法(テキスト第６章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第７章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第７章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析 by 金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際 by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) (予備日)

圧力・流速場(u, v, p)を用いる解法

- Los Alamos国立研究所グループT-3(米国)
  - MAC法(Marker and Cell method): (Hallow and Welch, 1965; Welch et al., 1966)
  - SMAC法(Simplified Marker and Cell method): (Amsden and Hallow, 1970)
  - FS法(Frictional Step method または Two Step Projection method): (Kothe et al., 1992)
  - HSMAC法(Highly Simplified MAC method)またはSOLA法: (Hirt et al., 1975)
  - ICE法 (Hallow and Amsden, 1971)
  - ALE法 (Hirt et al., 1974)
  - VOF法 (Hirt and Nichols, 1981)
- Imperial Collage(英国)
  - SIMPLE法

基礎方程式：
連続の式とNavier-Stokes方程式

基礎方程式

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad \text{---------} \quad ①$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \tau + \vec{g} + \frac{\vec{F}}{\rho} \qquad \text{---------} \quad ②$$

差分式（流速と圧力のみを陰的に取り扱う）

$$\nabla \cdot \vec{V}^{n+1} = 0 \qquad \text{---------} \quad ③$$

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n}}{\Delta t} = -\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})^{n} - \frac{1}{\rho^{n}}\nabla p^{n+1} + \frac{1}{\rho^{n}}\nabla \cdot \tau^{n} + \vec{g}^{n} + \frac{\vec{F}}{\rho^{n}} \qquad \text{---------} \quad ④$$

MAC法

差分式④の両辺の発散(divergence, ∇・)をとる

$$\frac{\nabla\cdot\vec{V}^{n+1}-\nabla\cdot\vec{V}^{n}}{\Delta t}=-\nabla^2(\vec{V}\cdot\vec{V})^n-\frac{1}{\rho^n}\nabla^2 p^{n+1}+\nabla\cdot(\frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n+\vec{g}^n+\frac{\vec{F}}{\rho^n})$$

連続の式③を満足する圧力を p^{n+1} とすると、このとき

$\nabla\cdot\vec{V}^{n+1}=0$ であるから、

$$\nabla^2 p^{n+1}=\frac{\rho^n}{\Delta t}\nabla\cdot\vec{V}^n-\rho^n\nabla^2(\vec{V}\cdot\vec{V})^n+\rho^n\nabla\cdot(\frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n+\vec{g}^n+\frac{\vec{F}}{\rho^n})$$

時刻nにおいて、右辺は全て既知であるから、上式は p^{n+1} についてのポアッソン方程式となる。一旦 p^{n+1} が求まると、

$$\vec{V}^{n+1}=\vec{V}^n+\Delta t\cdot[-\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^n-\frac{1}{\rho^n}\nabla p^{n+1}+\frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n+\vec{g}^n+\frac{\vec{F}}{\rho^n}]$$

より、 $\vec{V}^{n+1}$ が決定できる。

MAC法の解法手順

初期値 : $\vec{V}^n$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho^n}{\Delta t}\nabla\cdot\vec{V} - \rho^n\nabla^2(\vec{V}\cdot\vec{V})^n + \rho^n\nabla\cdot(\frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n + \vec{g}^n + \frac{\vec{F}}{\rho^n})$$

ポアソン方程式より p^{n+1} を求める

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^n + \Delta t\cdot[-\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^n - \frac{1}{\rho^n}\nabla p^{n+1} + \frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n + \vec{g}^n + \frac{\vec{F}}{\rho^n}]$$

速度 $\vec{V}^{n+1}$ を求める

SMAC法

求めるべき圧力場を $p^{n+1} = p^n + \delta P$ と分解すると、

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} = -\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^n - \frac{1}{\rho^n}\nabla p^n - \frac{1}{\rho^n}\nabla(\delta p) + \frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n + \vec{g}^n + \frac{\vec{F}}{\rho^n}$$

上式を、陽的部分と陰的部分に分解する。

$$\frac{\tilde{V} - \vec{V}^n}{\Delta t} = -\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^n - \frac{1}{\rho^n}\nabla p^n + \frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n + \vec{g}^n + \frac{\vec{F}}{\rho^n}$$ （陽的部分）

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \tilde{V}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n}\nabla(\delta p)$$ （陰的部分）

上式の両辺の発散(divergence, $\nabla\cdot$)をとる

$$\frac{\nabla\cdot\vec{V}^{n+1} - \nabla\cdot\tilde{V}}{\Delta t} = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho^n}\nabla(\delta p)\right)$$

連続の式 $\nabla\cdot\vec{V}^{n+1} = 0$ が満足される圧力を p^{n+1} とすると、

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{\rho^n}{\Delta t}\nabla\cdot\tilde{V}$$

SMAC法の解法手順

初期値 : $\vec{V}^n \quad p^n$

$$\frac{\tilde{\vec{V}}-\vec{V}^n}{\Delta t} = -\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^n - \frac{1}{\rho^n}\nabla^2 p^n + \frac{1}{\rho^n}\nabla\cdot\tau^n + \vec{g}^n + \frac{\vec{F}}{\rho^n}$$

$\tilde{\vec{V}}$ を求める

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{\rho^n}{\Delta t}\nabla\cdot\tilde{\vec{V}}$$

ポアソン方程式より δp を求める

$p^{n+1} = p^n + \delta p$ を求める

$$\frac{\vec{V}^{n+1}-\tilde{\vec{V}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n}\nabla(\delta p)$$

速度 $\vec{V}^{n+1}$ を求める

FS法 (Two Step Projection法)

$$\frac{\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^{n}}{\Delta t}=-\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^{n}-\frac{1}{\rho^{n}}\nabla p^{n+1}+\frac{1}{\rho^{n}}\nabla\cdot\tau^{n}+\vec{g}^{n}+\frac{\vec{F}}{\rho^{n}}$$

を、直接陽的部分と陰的部分に分解する。

$$\frac{\tilde{V}-\vec{V}^{n}}{\Delta t}=-\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^{n}+\frac{1}{\rho^{n}}\nabla\cdot\tau^{n}+\vec{g}^{n}+\frac{\vec{F}}{\rho^{n}} \qquad \text{(陽的部分)}$$

$$\frac{\vec{V}^{n+1}-\tilde{V}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho^{n}}\nabla(p^{n+1}) \qquad \text{(陰的部分)}$$

連続の式が満足されているとすると $\nabla\cdot\vec{V}^{n+1}=0$ であるから
上式の両辺の発散(divergence, $\nabla\cdot$)をとると、

$$\nabla^{2}(p^{n+1})=\frac{\rho^{n}}{\Delta t}\nabla\cdot\tilde{V}$$

このポアッソン方程式を解くことによって p^{n+1} が求まり、
最終的に、速度場が求められる。

$$\vec{V}^{n+1}=\tilde{V}+\Delta t\cdot\left(\frac{1}{\rho^{n}}\nabla(p^{n+1})\right)$$

FS法の解法手順

初期値 : $\vec{V}^{n} \quad p^{n}$

$\tilde{V}$ を求める

$$\frac{\tilde{V}-\vec{V}^{n}}{\Delta t} = -\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})^{n} + \frac{1}{\rho^{n}}\nabla\cdot\tau^{n} + \vec{g}^{n} + \frac{\vec{F}}{\rho^{n}}$$

ポアソン方程式より p^{n+1} を求める

$$\nabla^{2}(p^{n+1}) = \frac{\rho^{n}}{\Delta t}\nabla\cdot\tilde{V}$$

速度 $\vec{V}^{n+1}$ を求める

$$\vec{V}^{n+1} = \tilde{V} + \Delta t\cdot\left(\frac{1}{\rho^{n}}\nabla(p^{n+1})\right)$$

HSMAC法(SOLA法)

セル(i,j)における発散$D_{i,j}$ を定義する

$$D_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\left(u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}\right)$$

これは、変数 $\left\{u_{i,j}^{n+1}\right\}$, $\left\{v_{i,j}^{n+1}\right\}$ が質量保存式を満足していない程度を表す指標となりうる。D<0ならば、このセルに向かって正味で質量の流入が生じることに対応し、このセルにおける圧力を増加させる必要がある。逆に、D>0ならば、このセルより正味で質量の流出が生じることに対応し、このセルにおける圧力を減少させる必要がある。故に、圧力を調整してDを0に調節すればよいことがわかる。

圧力の補正

セル(i,j)における発散$D_{i,j}$をそのセルの圧力$p_{i,j}$の関数とみなす。つまり、$D_{i,j}=D(p_{i,j})$である。D=0の根を求めるためにNewton法を用いると、

$$\delta p_{i,j} = p_{i,j}^{(k+1)} - p_{i,j}^{(k)} = -D_{i,j}^{(k)} / \left(\frac{\partial D_{i,j}}{\partial p_{i,j}} \right)^{(k)}$$

ここで、kは第k番目の反復を表す。まず質量保存式をDとおき、$u_{i,j}^{n+1},\ u_{i-1,j}^{n+1},\ u_{i,j}^{n+1},\ u_{i,j-1}^{n+1}$ を求めてから同式に代入する。求められた$D_{i,j}$を$p_{i,j}$で偏微分すれば次式のようになる。

$$\delta p = -D \Bigg/ \left\{ 2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right\}$$

流速の更新

この式に$D^{(k)}$を代入して$\delta p^{(k)}$が計算されると、発散を0とすべく流速が更新される。

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$u_{i-1,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$v_{i,j}^{(k+1)} = v_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

$$v_{i,j-1}^{(k+1)} = v_{i,j-1}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

ここで加速係数を取り入れて、早く収束させる。

$$\delta p^{(k+1)} = -\omega D^{(k)} \Bigg/ \left\{ 2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right\} \qquad (1 \le \omega < 2)$$

対流項の差分

対流項　f_{ux}^n, f_{uy}^n, f_{vx}^n, f_{vy}^n

$$f_{ux}^n = \frac{1}{4\Delta x} \times$$

$$\left[\left(u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n\right)^2 + \alpha\left|u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n\right|\left(u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n\right)\right.$$

$$\left. - \left(u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n\right)^2 - \alpha\left|u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n\right|\left(u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n\right)\right]$$

$$f_{uy}^n = \frac{1}{4\Delta y} \times$$

$$\left[\left(v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n\right)\left(u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n\right) + \alpha\left|v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n\right|\left(v_{i,j}^n - v_{i,j+1}^n\right)\right.$$

$$- \left(v_{i,j-1}^n + v_{i+1,j-1}^n\right)\left(u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n\right) - \alpha\left|v_{i,j-1}^n + v_{i+1,j-1}^n\right|\left(u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n\right)$$

対流項の差分

$$f_{vx}^{n} = \frac{1}{4\Delta x} \times$$

$$\Bigl[\left(u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}\right)\left(v_{i,j}^{n} + v_{i+1,j}^{n}\right) + \alpha\left|u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right|\left(v_{i,j}^{n} - v_{i,j+1}^{n}\right)$$

$$-\left(u_{i,j-1}^{n} + u_{i+1,j-1}^{n}\right)\left(v_{i,j-1}^{n} + v_{i,j}^{n}\right) - \alpha\left|u_{i,j-1}^{n} + u_{i+1,j-1}^{n}\right|\left(v_{i,j-1}^{n} - v_{i,j}^{n}\right)$$

$$f_{vy}^{n} = \frac{1}{4\Delta y} \times$$

$$\Bigl[\left(v_{i,j}^{n} + v_{i,j+1}^{n}\right)^{2} - \alpha\left|v_{i,j}^{n} + v_{i,j+1}^{n}\right|\left(u_{i,j}^{n} - u_{i,j+1}^{n}\right)$$

$$-\left(u_{i,j-1}^{n} + u_{i,j}^{n}\right)^{2} - \alpha\left|u_{i,j-1}^{n} + u_{i,j}^{n}\right|\left(u_{i,j-1}^{n} - u_{i,j}^{n}\right)\Bigr]$$

ここで重みaは、α=0のときは中心差分となり差分近似の精度が高くなり、α=1の時には風上差分となり安定性が確保されやすくなるという効果をもつ。

ドナー・セル差分(風上差分)

変化の激しい現象を扱う場合、

$$u_{i+1/2}^{n} > 0, \quad u_{i+1/2}^{n+1} < 0 \quad \text{または} \quad u_{i-1/2}^{n} > 0, \quad u_{i+1/2}^{n} < 0,$$

であった場合、数値的不安定性が発生しやすい。たとえば、

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_{i-1}^n u_{i-1/2}^n - \rho_i^n u_{i+1/2}^n\right) \quad (u \geq 0)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_{i+1}^n u_{i+1/2}^n - \rho_i^n u_{i-1/2}^n\right) \quad (u < 0)$$

とする。つまり流速の向きを考えてドナーが風上にいるようにする。上式では(i−1)がドナーで(i)がアクセプターとなる。この差分をドナー・セル差分という。

粘性項の差分

粘性項　f_{visx}^{n}，　f_{visy}^{n}

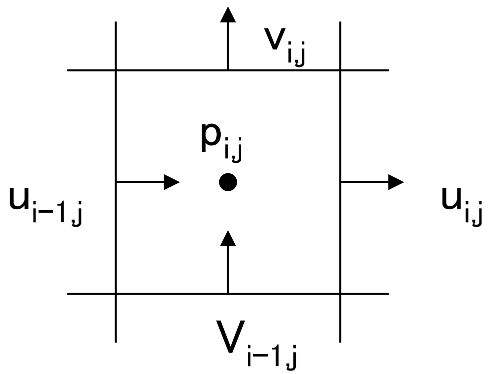
$$f_{visx}^{n} = \nu\left[\frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}\right)\right]$$

$$f_{visy}^{n} = \nu\left[\frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{i+1,j}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(v_{i,j+1}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i,j-1}^{n}\right)\right]$$

スタガード・メッシュ

セル(i,j)に対しして、圧力をセル中心、流速はセルエッジで定義する。(スタガード・メッシュ)。
質量保存式を陰スキームで近似し、

$$\frac{1}{\Delta x}\left(u_{i,j}^{n+1}-u_{i-1,j}^{n+1}\right)+\frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j}^{n+1}-v_{i,j-1}^{n+1}\right)=0$$



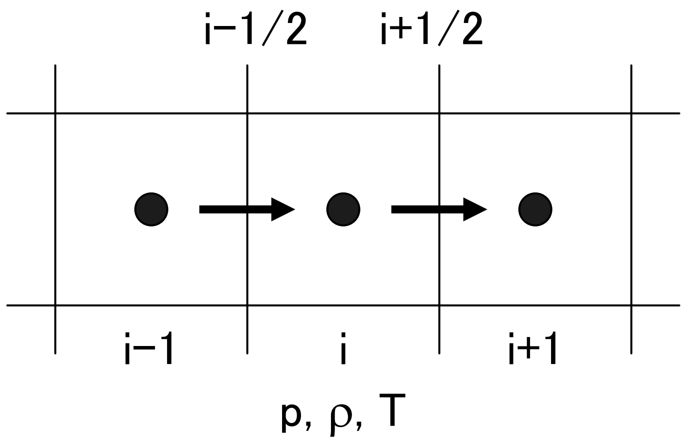
Navier−Stokes方程式を陽スキーム近似すると、

$$u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n}+\Delta t\left[\frac{1}{\Delta x}\left(p_{i,j}^{n}-p_{i+1,j}^{n}\right)-g_x-f_{ux}^{n}-f_{uy}^{n}+f_{visx}^{n}\right]$$

$$v_{i,j}^{n+1}=v_{i,j}^{n}+\Delta t\left[\frac{1}{\Delta x}\left(p_{i,j}^{n}-p_{i,j+1}^{n}\right)-g_y-f_{vx}^{n}-f_{vy}^{n}+f_{visy}^{n}\right]$$

スタガード・メッシュの物理的意味

右図のように物理的考察によって初めから格子点あるいはメッシュ系をずらすものがある。圧力p、密度ρ、温度Tはセルの中心(i)で定義し、流速uはセルエッジ(i+1/2)で定義する。このようなメッシュ系をスタガード・メッシュという。



この系では物理学的直感によく訴える。圧力p_{i-1}とp_iの圧力差によって流体運動が生じ$u_{i-1/2}$が駆動される。また、セル中心の密度は$u_{i-1/2}$で運び込まれる質量と$u_{i+1/2}$で運び出される質量によって蓄積量が定まると考えたのである。

HSMAC法の解法手順

初期値 : $\vec{V}^{n} \quad p^{n}$

$\tilde{V}$　を求める

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \Delta t\left[\frac{1}{\Delta x}\left(p_{i,j}^{n} - p_{i+1,j}^{n}\right) - g_x - f_{ux}^{n} - f_{uy}^{n} + f_{visx}^{n}\right]$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n} + \Delta t\left[\frac{1}{\Delta x}\left(p_{i,j}^{n} - p_{i,j+1}^{n}\right) - g_y - f_{vx}^{n} - f_{vy}^{n} + f_{visy}^{n}\right]$$

D　を求める

$$D_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\left(u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}\right)$$

δp　を求める

$$\delta p_{i,j} = p_{i,j}^{(k+1)} - p_{i,j}^{(k)} = -D_{i,j}^{(k)} / \left(\frac{\partial D_{i,j}}{\partial p_{i,j}}\right)^{(k)}$$

p^{k+1}, V^{k+1}　を求める

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

$$u_{i-1,j}^{(k+1)} = u_{i-1,j}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta x$$

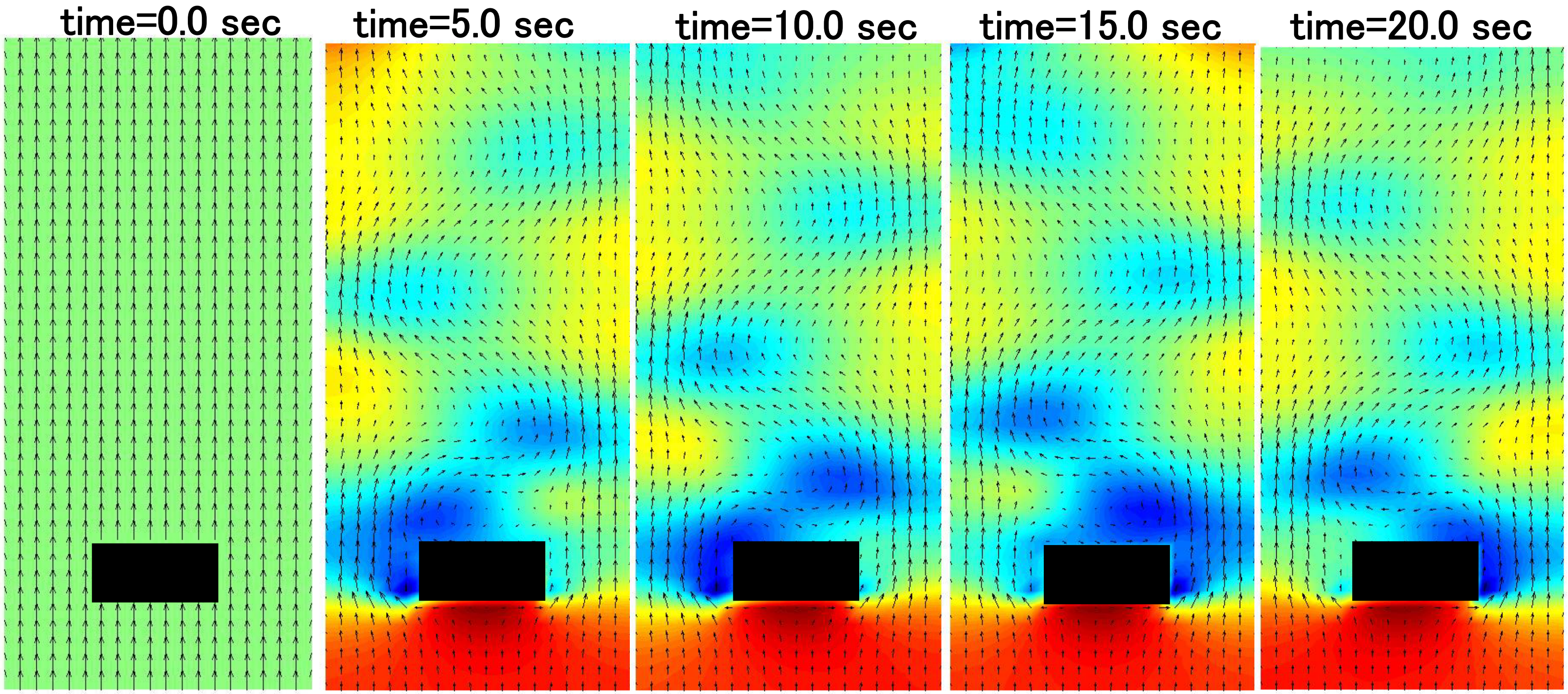
$$v_{i,j}^{(k+1)} = v_{i,j}^{(k)} + \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

$$v_{i,j-1}^{(k+1)} = v_{i,j-1}^{(k)} - \Delta t \delta p^{(k)} / \Delta y$$

速度 $\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^{k+1}$ とする

カルマン渦列の計算結果

計算条件: Inlet velocity = 15.0 cm/s
kinematic viscosity = 0.15 cm^2/s
Δx=0.2, Δy=0.4, IMAX=20, JMAX=40



VOF関数の輸送方程式

関数Fの時間空間での変化をセル中心で定義し、
流速u、vは、セルエッジで定義するスタガード・メッシュ
を採用すると、VOF関数の輸送方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla F = 0$$

の差分近似は次式で与えられる。

$$F_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{n} - \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} \left(u_{i+1/2,j}^{n} F_{i+1/2,j}^{n} - u_{i-1/2,j}^{n} F_{i-1/2,j}^{n} \right) \right.$$
$$\left. \frac{1}{\Delta y} \left(u_{i,j+1/2}^{n} F_{i,j+1/2}^{n} - u_{i,j-1/2}^{n} F_{i,j-1/2}^{n} \right) \right]$$

上式を解くことによって、関数Fの輸送が数値的に計算される。

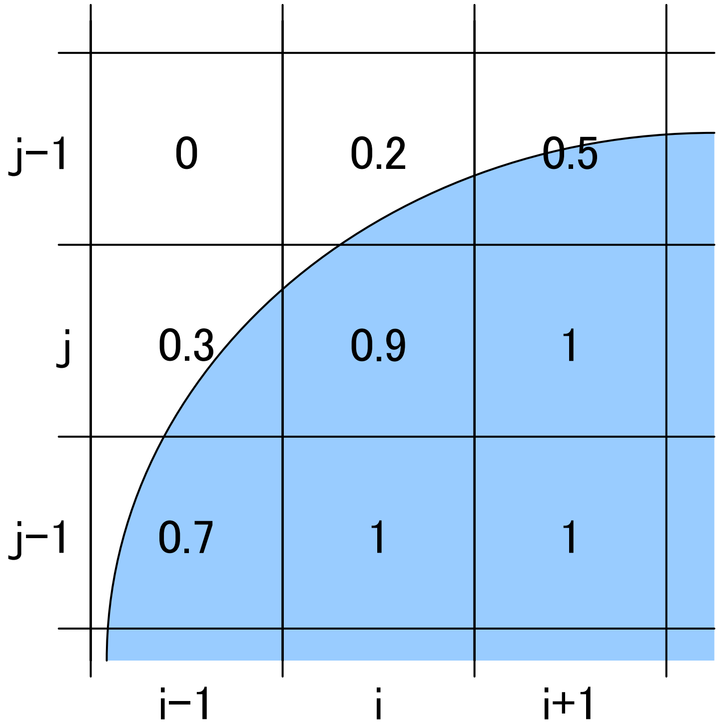
VOF法 － VOF関数

自由表面を記述する方法の1つに VOF 法がある。これは、Δx×Δyなるセル体積に占める流体体積の比率をVOF関数または単にF関数と定義して流体の領域を記述するものである。図中のセル(I,J)では流体占有率は0.7でセル(I−1,j)では0.3であると読む。表現の便利のために

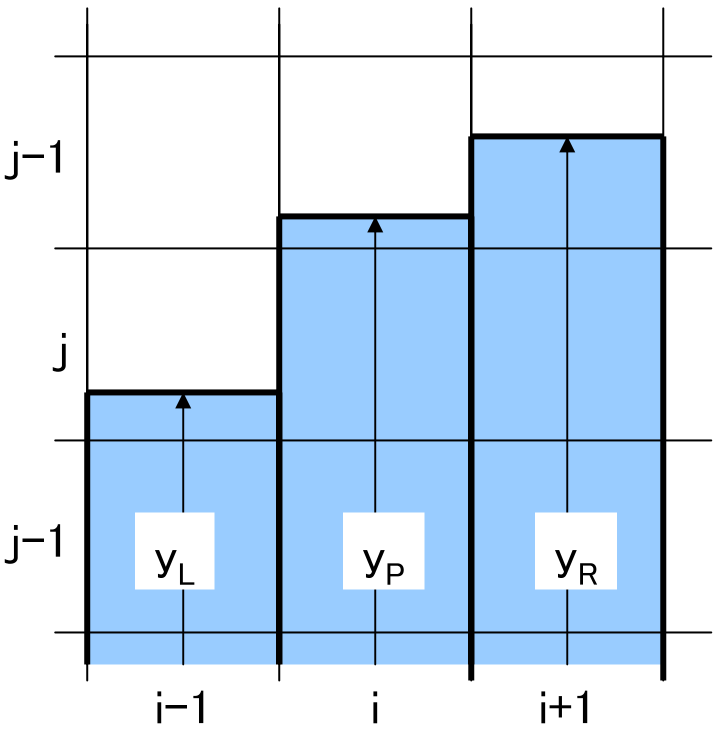
$F_{i,j}=0.9$

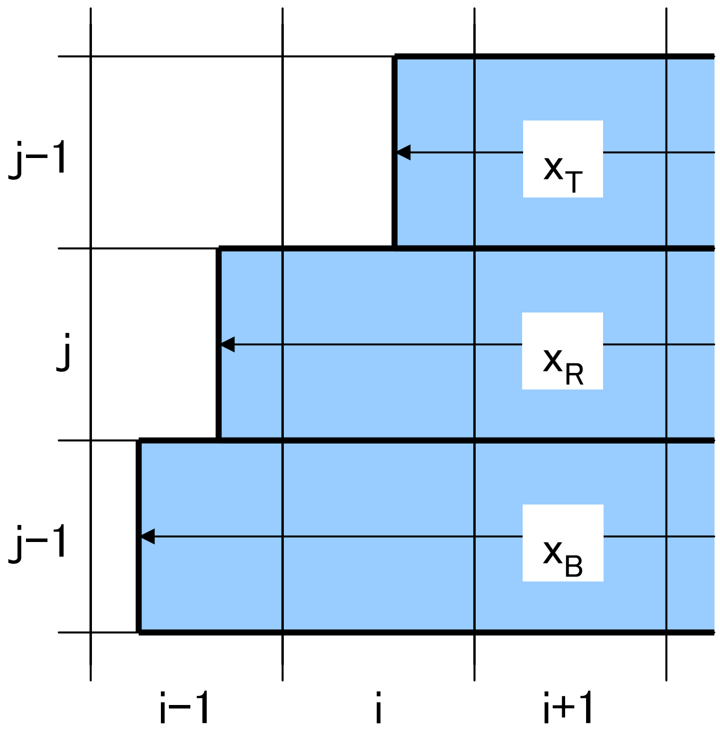
$F_{i-1,j}=0.3$

のように記す



界面位置





VOF関数による界面位置の決定

y方向の自由表面位置

$$y_p = \cdots + F_{i,j-1}\Delta y_{j-1} + F_{i,j}\Delta y_j + + F_{i,j+1}\Delta y_{j+1} + \cdots$$

x方向の自由表面位置

$$x_p = \cdots + F_{i-1,j}\Delta x_{i-1} + F_{i,j}\Delta x_i + + F_{i+1,j}\Delta x_{i+1} + \cdots$$

表面こう配の差分近似

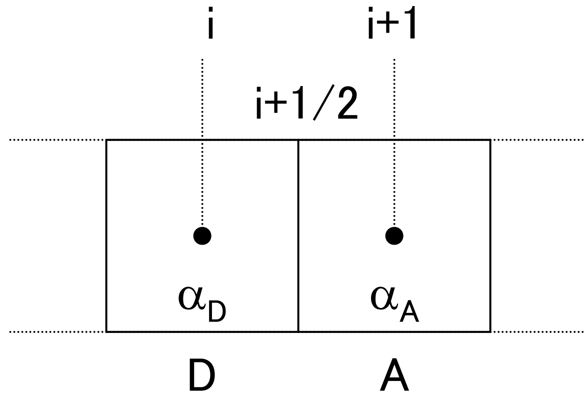
$$\left(y_P - y_L\right)/\Delta x_{x-1/2}, \quad \left(y_R - y_P\right)/\Delta x_{x+1/2}$$

これらを内分すると次式のようになる

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_i = \frac{\left(y_R - y_P\right)\Big/\left(\dfrac{\Delta x_{x-1/2}}{\Delta x_{x+1/2}}\right) + \left(y_P - y_L\right)\Big/\left(\dfrac{\Delta x_{x-1/2}}{\Delta x_{x+1/2}}\right)}{\Delta x_{x-1/2} + \Delta x_{x+1/2}}$$

ドナーアクセプター法

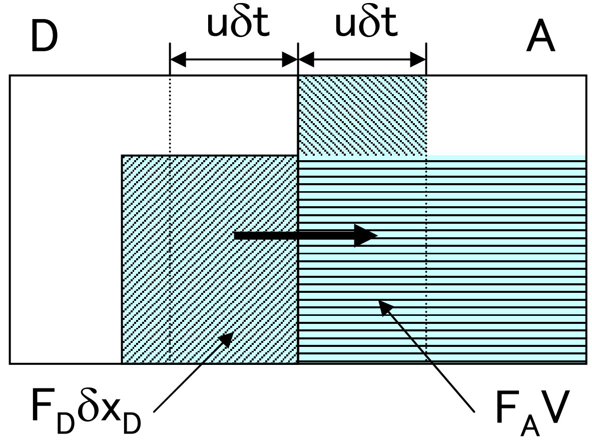
関数Fを数値的に解く工夫のひとつとしてドナーアクセプター法がある。ドナーとアクセプターにおける気相と液相の割合をそれぞれα_D、α_Aとする。セルエッジ(i+1/2)の密度を次式のようにする。



$$\rho_{i+1/2} = \begin{cases} \rho_l & (\alpha_D = 0) \\ \rho_g \alpha_A + \rho_l (1 - \alpha_A) & (0 < \alpha_D < 1) \\ \rho_g & (\alpha_D = 1) \end{cases}$$

ここで、気相の密度をρ_g、液相の密度をρ_lとした。

ドナーアクセプター法



セルエッジの流速をuと表し、ドナーをD、アクセプターをAと表す。Dセルには全体$F_D\delta x_D$の流体がある。これを斜線を引いた長方形とする。δt時間にセルエッジの単位面積あたりを通過してDからAに輸送される体積Vは

$$V = u\delta t$$

である。これは点線で囲んだ領域内である。δt内にDからAに輸送される変数Fは

$$F_{AD}u\delta t = F_{AD}V = F_AV$$

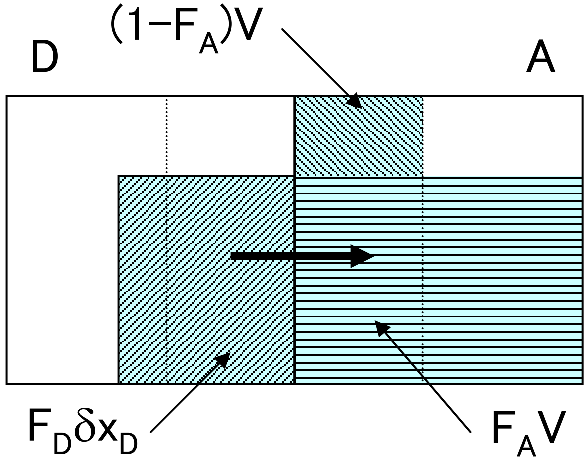
したがって、Dセルの流体は全てAセルに輸送されずにDセルに流体が残る。

ドナーアクセプター法

右図のように$F_AV>F_D\delta x_D$の場合、$F_D\delta x_D$よりも多い流体をDからAに送ることができない。そこで、輸送量は

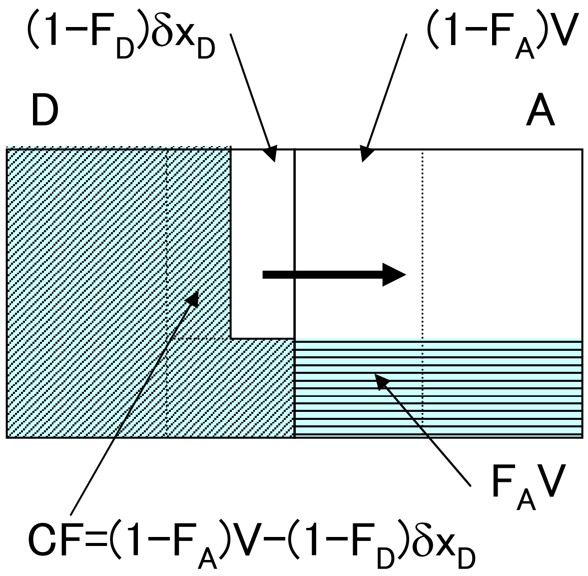
$$F_{AD}u\delta t = F_D\delta x_D$$

となる。



ドナーアクセプター法

右図の場合、Dセルのボイド保有量$(1-F_D)\delta x_D$よりも多い$(1-F_A)V$のボイド量がAセルに伝播され、物理的解釈から好ましくない。したがって、次式で求められる流体の量



$$CF = (1 - F_A)V - (1 - F_D)\delta x_D$$

を追加してAセルに輸送する。つまりδt時間内にDからAに伝播される変数Fの量は

$$F_{AD} u \delta t = F_A V + CF$$

である。

ドナーアクセプター法

以上の式をまとめると、

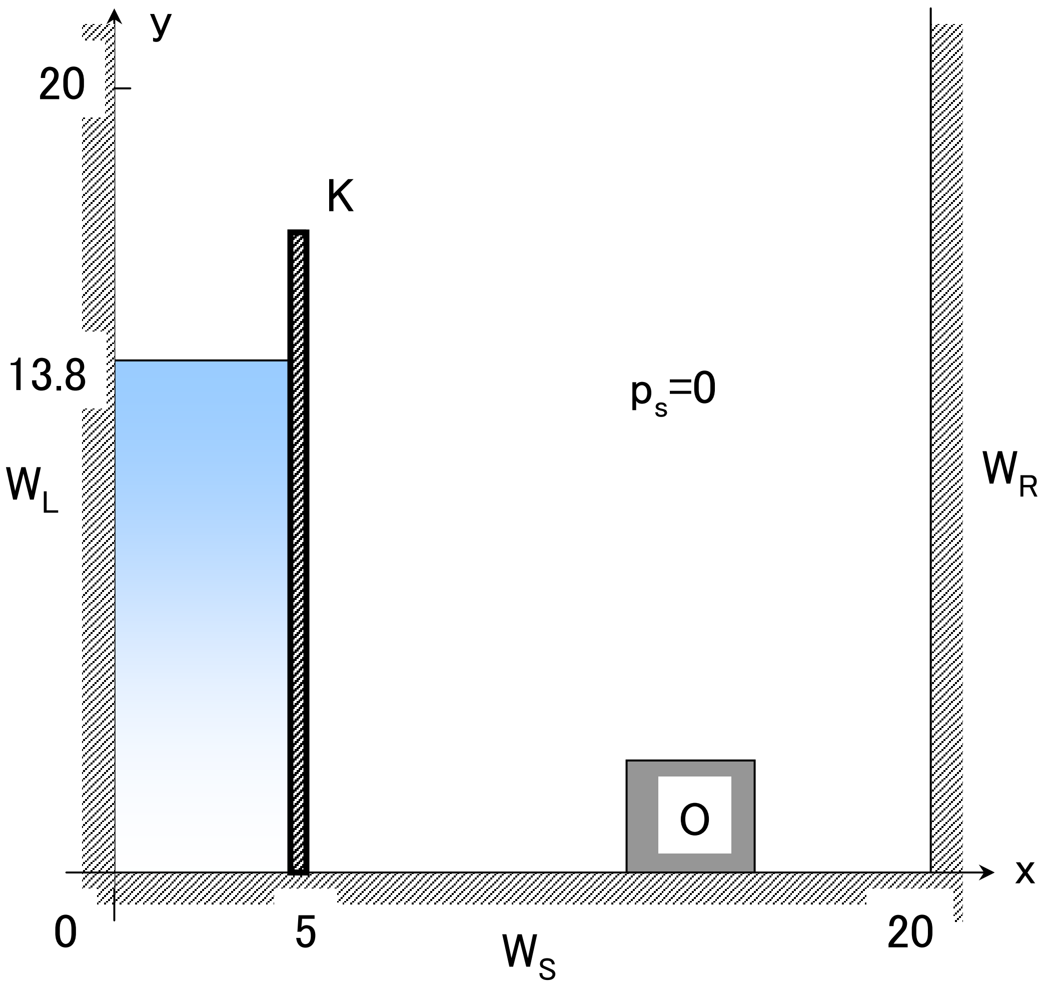
$$F_{AD}u_{i+1/2,j}\delta t = \mathrm{sgn}\left(u_{i+1/2,j}\right)\times \min\left[F_{AD}\left|V_x\right| + CF, F_D\delta x_D\right]$$

$$V_x = u_{i+1/2,j}\delta t$$

$$CF = \max\left[\left(1-F_{AD}\right)\left|V_x\right| - \left(1-F_D\right)\delta x_D, 0\right]$$

ここで、式の演算minはDセルが保有する流体$F_D\delta x_D$以上の流体が輸送されるのを防ぎ、この式の演算maxはDセルが保有するボイド以上のボイドが輸送されるのを禁止している

壊れたダムの流れ



壊れたダムの流れ

非圧縮性の流体の運動方程式を速度u、vと圧力pで記述すると、基礎式は質量保存式ならびにNavier–Stokes方程式である。図に示すように長方形 $(0 \le x \le 5,\quad 0 \le y \le 13.8)$ のように水が蓄えられている。t=0において板Kを瞬時に取り除く。水は形状を変化させながら下流の障害物Oを乗り越えて右壁W_Rに到達する。自由表面の変化に注目しつつ水の運動を求めよ。

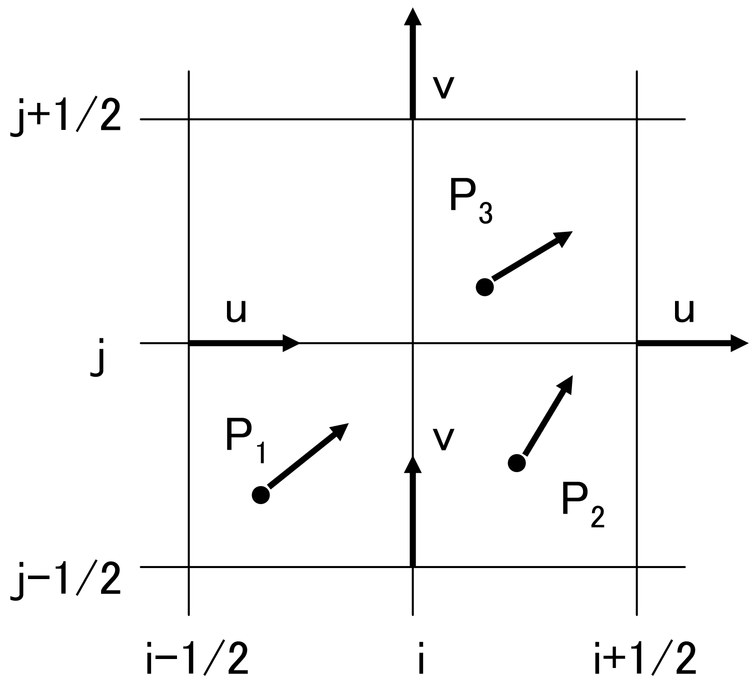
この図の初期条件と境界条件を付帯させて質量保存式ならびにNavier–Stokes方程式を解け。ただし壁面WL、WB、WRと障害物O壁面はすべりなしの壁とする。

↓

Program: BVOF

MAC法（マーカーセル法）

右図に示すようにスタガードメッシュ系とし、セルエッジで流速が定義されるとする。セルの中に質量のない粒子を配置する。この粒子は流速とともに移動する。このマーカー粒子の位置と動きを点や線で描くと条痕線が得られる。その結果として表面形状が記述できる、と考えるものである。



MAC法（マーカーセル法）

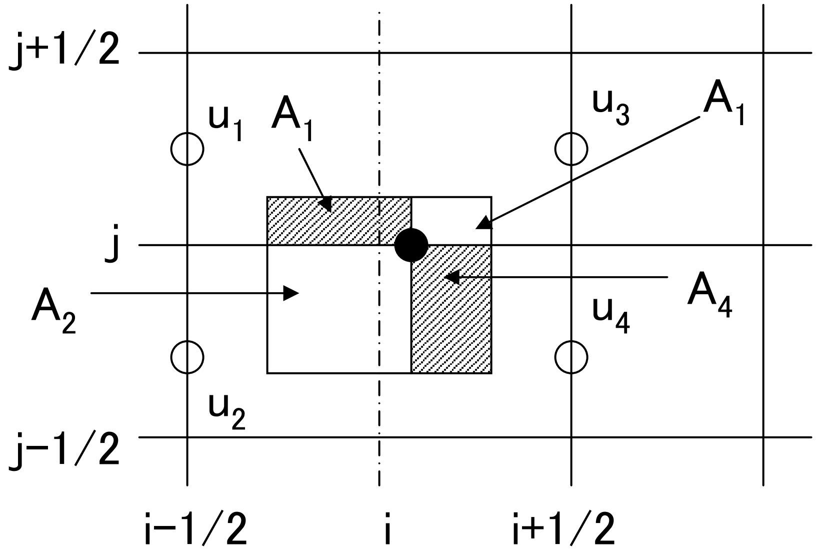
マーカー粒子の移動の計算は、セルエッジで定義された流速を内挿し、個々の粒子の速度を定めて時間積分することである。
時間t=nΔtにおける第p番目の粒子の位置 $\left(x_p^n, y_p^n\right)$ は、時刻t=0の初期位置 $\left(x_p^0, y_p^0\right)$ から次式によって求められる。

$$x_p^{n+1} = x_p^n + u_p^n \Delta t$$

$$y_p^{n+1} = y_p^n + v_p^n \Delta t$$

MAC法（マーカーセル法）

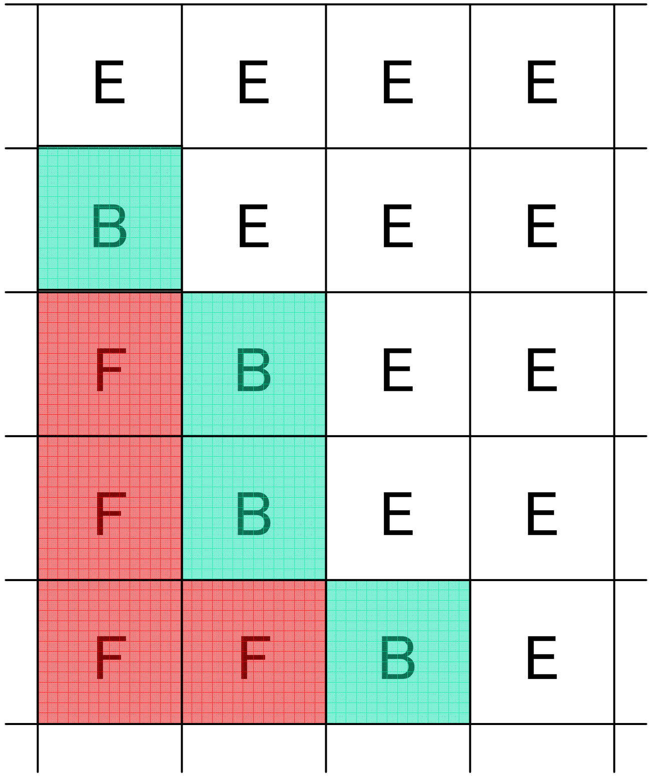
右図を元にしてマーカー粒子の流速u_p、v_pの内挿を考える。点P$\left(x_p^n, y_p^n\right)$ の周辺に$\Delta x \times \Delta y$の大きさの領域を設定し、その分割領域A_1、A_2、A_3、A_4を重みとして次式のように2方向の線形補完して、

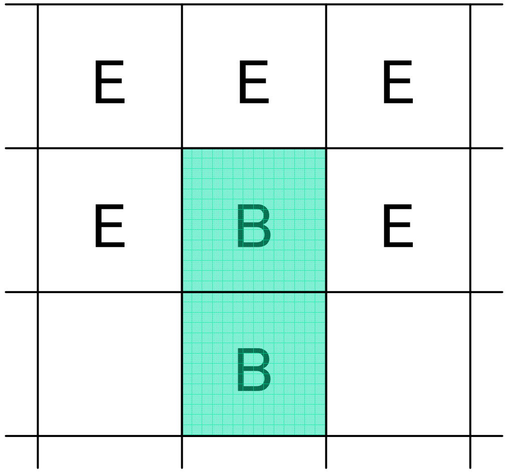


$$u_p = \frac{A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 + A_4u_4}{\Delta x \Delta y}$$

のようにu_pが決定される。

マーカーセル法におけるセルの定義





F :Full cell
E :Empty cell
B :Boundary cell

水滴の衝突

右図に示すように点(X_C,Y_C)に半径Rの水滴が速度$(0,v_1)$で厚さの小さい静水に衝突する。自由表面の変化に注目しつつ過渡状態を求めよ。ただし対称の条件とし、左壁、底面はすべりなし壁とする。

↓

Program: DROP (SMAC)