講義予定(案)

1. (9/ 2) 数値シミュレーションの手続き (テキスト第１章)
2. (9/ 9) 偏微分方程式と解析解 (テキスト第２章)
3. (9/16) 休講
4. (9/30) 差分方程式とそのスキーム (テキスト第３章) +変換 (テキスト第４章)
5. (10/ 7) 計算 (テキスト第５章)+連立一次方程式の解法(テキスト第６章)
6. (10/21) 流れ関数-ポテンシャルによる解法(テキスト第７章)
7. (10/28) 流速-圧力を用いた解法 (テキスト第７章)
8. (11/ 4) 熱流体解析と多相流解析
9. (11/11) 乱流の数値解析 by 金子暁子先生
10. (11/18) 数値解析の実際 by 渡辺正先生(JAEA)
11. (11/25) (予備日)

流体運動の基礎方程式

質量保存式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

u : x方向流速　v : y方向流速

２次元非圧縮性流れのNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

p : 圧力　ν : 動粘性係数　ρ : 密度

渦度と流れ関数

渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

渦度輸送方程式

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)}$$

流れ関数（コーシーリーマンの関係式）

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

流れ関数ψについてのPoisson方程式

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta}$$

渦度輸送方程式の導出

非保存系表示のNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

上式をyで微分した式から、下式をxで微分した式を差し引く。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$ ： 渦度輸送方程式

ここで

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$ ： 渦度

流れ関数についてのPoisson方程式の導出

流れ関数の定義式（コーシーリーマンの関係式）

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

を、以下の渦度の定義式に代入する

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

流れ関数ψについてのPoisson方程式

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta}$$

渦度移動方程式

２次元渦度移動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

渦度移動方程式を1次元とし、$\nu = 1/\mathrm{Re}$ として書き換えると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)$$

対流拡散方程式となる。

圧力方程式

保存系表示のNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

上式をxで、下式をyで微分して足し合わせる。

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=S_p}$$

： 圧力pについてのPoisson方程式

$$S_p=\rho\left[2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}-\frac{\partial D}{\partial t}+\nu\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

： 発散

圧力についてのポアソン方程式

圧力pについてのPoisson方程式を流れ関数を用いて表すと、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=S_\psi$$

ここで

$$S_\psi=2\rho\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\equiv S_p$$

計算フローチャート

流速分布 u^n, v^n

渦度移動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

流れ関数に関するポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

流れ関数 ψ

コーシーリーマンの関係式

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

速度場 u^{n+1}, v^{n+1}

流れ関数表示のソース項

$$S_\psi = 2\left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \equiv S_p$$

圧力に関するポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S_\psi$$

圧力 p

計算手順

i. $t=0(n=0)$での初期値から初めて$t=n\Delta t$まで計算が完了しているとする。したがって、変数値u^n, v^n, ζ^n,ψ^nは既知である。

ii. 渦度移動方程式にしたがって、内点の新しい変数値ζ^{n+1}を計算する。

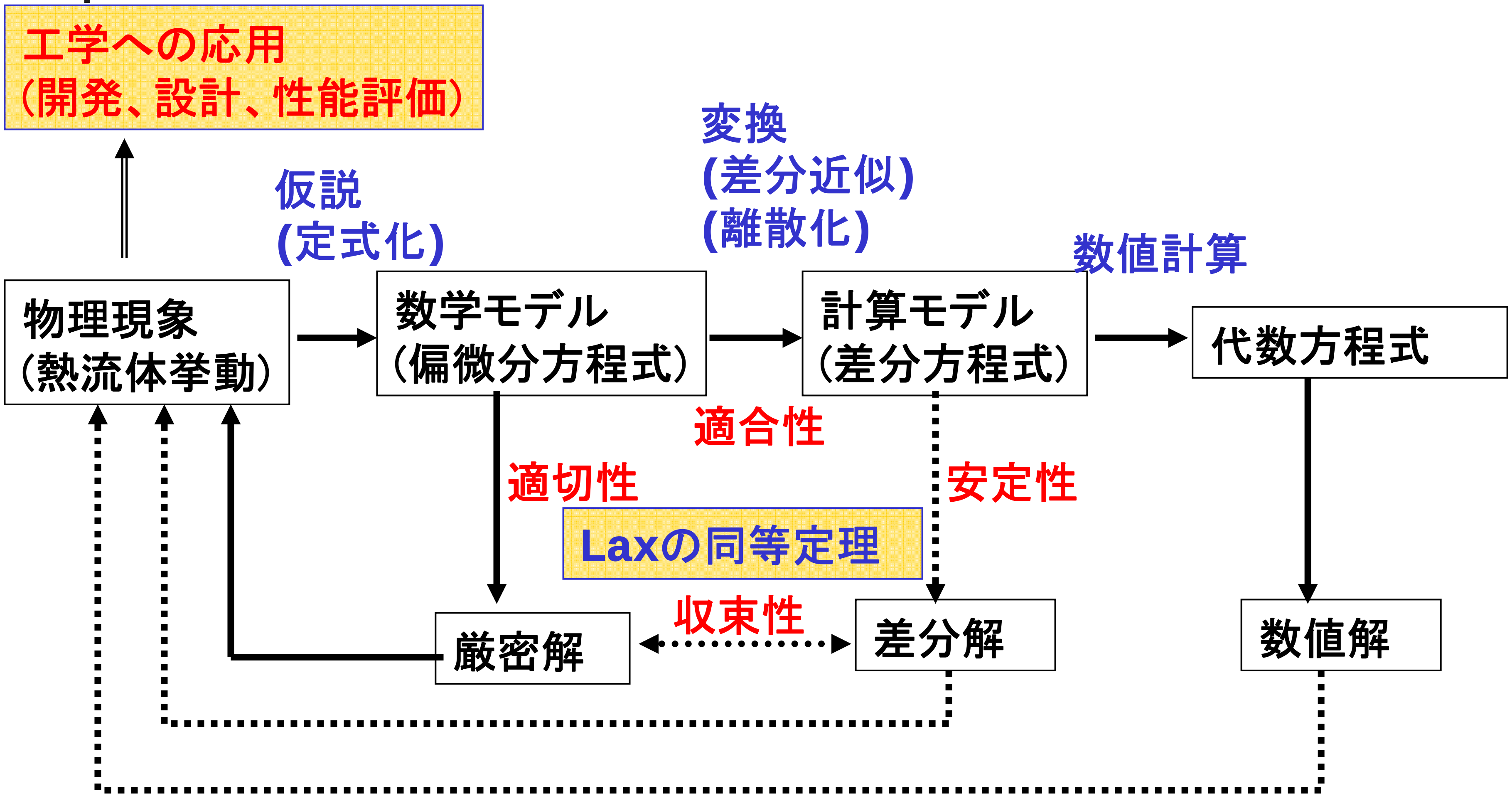
iii. 内点での新しいζ^{n+1}を用い、流れ関数方程式にしたがって内点の新しいψ^{n+1}を反復収束過程から計算する。

iv. 新しい値ψ^{n+1}を用いて新しい流速u, vを $u^{n+1}=\partial\psi^{n+1}/\partial y$

$v^{n+1}=-\partial\psi^{n+1}/\partial x$ から計算する。

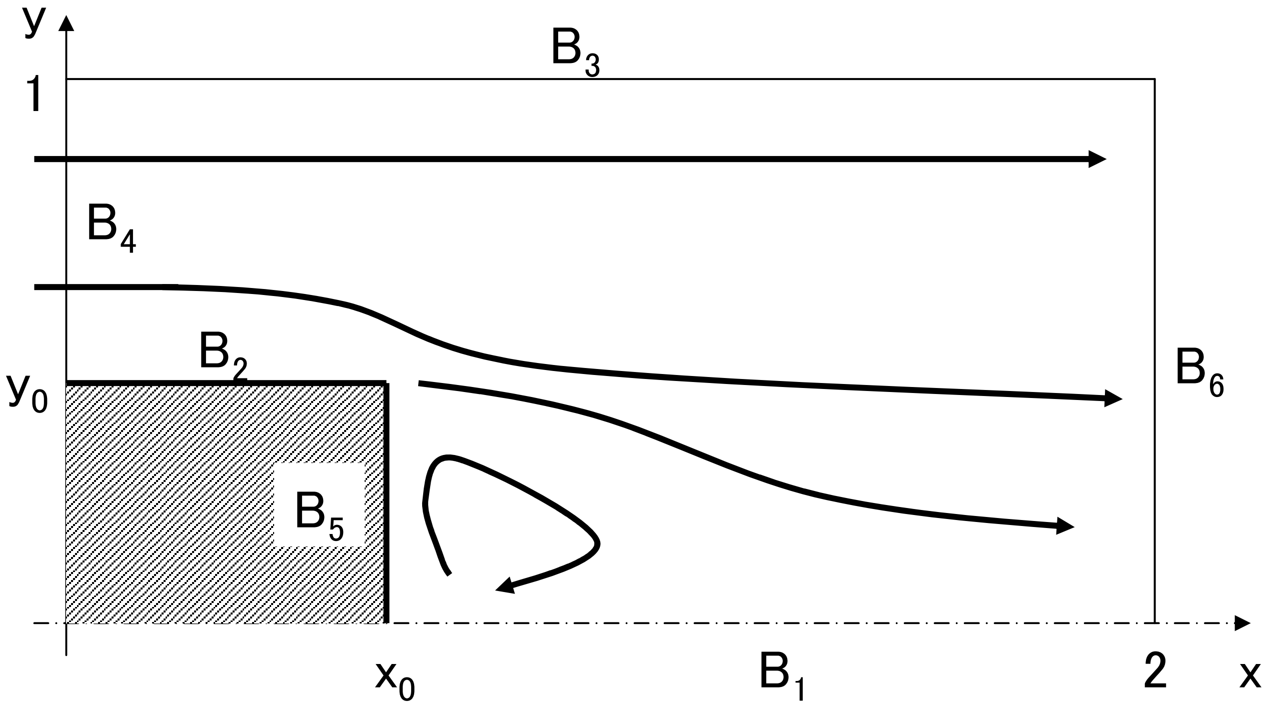
i. 内点における新しいζ^{n+1} 、ψ^{n+1}を用い、境界条件から新しい境界値を計算する。

代数方程式(連立一次方程式)の解法



問題設定

下図に示したように境界B_1, B_2, …, B_6がある。
領域（ $0 \le y \le y_0$ 、 $0 \le x \le x_0$ ）は流れに置かれた障害物である。障害物後方の流れを計算しなさい。



基礎方程式と基本関係式

バックステップ流れを渦度ζと流れ関数ψで記述すると基礎方程式は

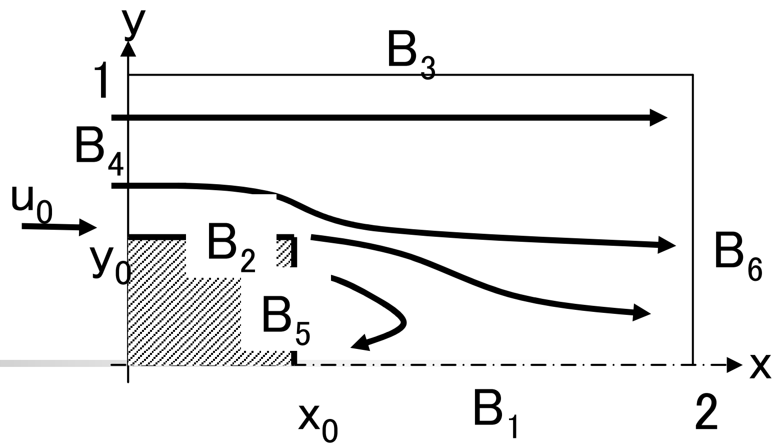
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である。

境界条件1



B_1は中心線とし、B_2とB_5はそれぞれ障害物の上面と底面とする。
B_3は上方境界、B_4は上流境界、B_6は流出境界と呼ばれる。
境界B_2–B_5–B_1は流線であるからψ=Constである。
記述の便利のために

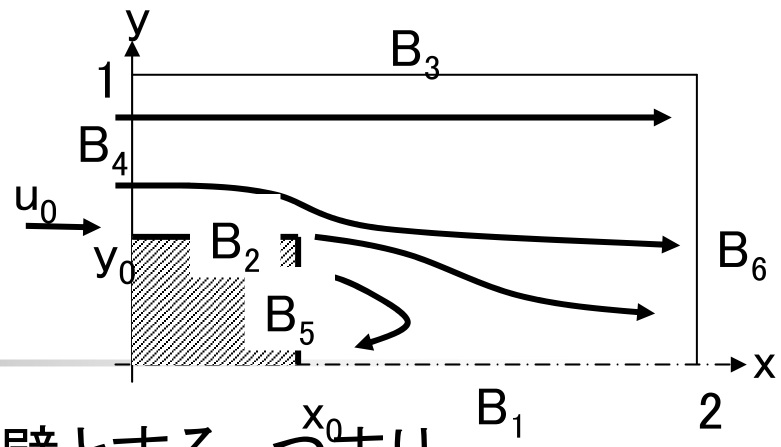
$$\psi(B_2 - B_5 - B_1) = 0$$

と書く。上流境界B_4では一様な流速u_0で流れが体系に入る。
つまり次の条件である。

$$u(0, y, t) = u_0 \qquad (y_0 \le y \le 1)$$

$$\psi(0, y, t) = u_0(y - y_0) \qquad (y_0 \le y \le 1) \Longleftarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\zeta(0, y, t) = 0 \qquad (y_0 \le y \le 1) \Longleftarrow \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



境界条件2

障害物の上面B_2ではすべりなしの壁とする。つまり、

$$u(x, y_0) = v(x, y_0) = 0 \quad (0 \le x \le x_0)$$

B_2のうえでは $\partial v / \partial x = 0$ である。したがって

$$\zeta(x, y_0) = -\partial u(x, y_0) / \partial y \quad (0 \le x \le x_0)$$

境界B_2の上では流線の条件式より

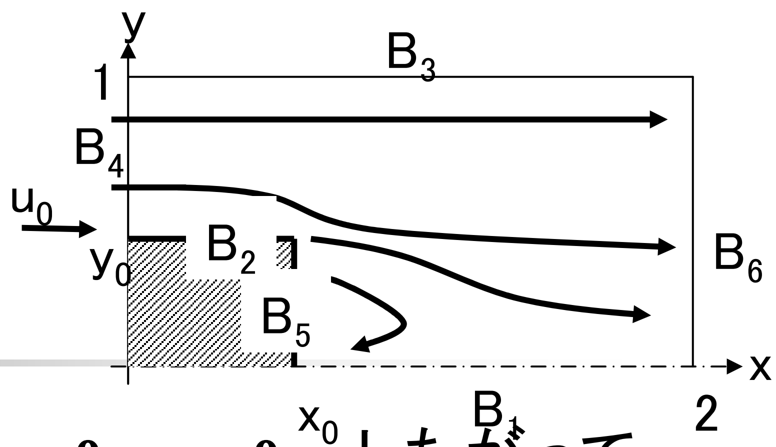
$$\psi(x, y_0) = 0$$

同じように障害物の底面B_5では

$$\zeta(x_0, y) = \partial v(x_0, y) / \partial x \quad (0 \le y \le y_0)$$

$$\psi(x_0, y) = 0 \quad (0 \le y \le y_0)$$

境界条件3



境界B_1は中心線であるから、$\partial u/\partial y = 0, \quad v = 0$ したがって、

$$\zeta(x,0) = 0 \quad (x_0 \le x \le 2)$$

B_4における速度の条件より

$$\psi(x,0) = 0 \quad (x_0 \le x \le 2)$$

上方境界B_3もすべりなしの壁とした。この境界も流線であるからψ=Constである。B_4における流線の条件より

$$\psi(x,1) = u_0(1 - y_0) \quad (0 \le x \le 2)$$

また、B_2における条件より

$$\zeta(x,1) = \partial u(x,1)/\partial y \quad (0 \le x \le 2)$$

計算フローチャート

流速分布 u^n, v^n

渦度移動方程式
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

渦度
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

流れ関数に関するポアソン方程式
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

流れ関数 ψ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

コーシーリーマンの関係式

速度場 u^{n+1}, v^{n+1}

流れ関数表示のソース項
$$S_\psi = 2\left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \equiv S_p$$

圧力に関するポアソン方程式
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S_\psi$$

圧力 p

渦度移動方程式の差分表現

渦度移動方程式のFTCS近似

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} + \Delta t\left(fux + fuy + visx + visy \right)$$

$$fux = -u_{i,j}\frac{\zeta_{i+1,j}^{n} - \zeta_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}$$

$$fuy = -v_{i,j}\frac{\zeta_{i,j+1}^{n} - \zeta_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}$$

$$visx = \nu\frac{\zeta_{i+1,j}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^{2}}$$

$$visy = \nu\frac{\zeta_{i,j+1}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^{2}}$$

SOR法によるPoisson方程式の数値解析

流れ関数ψについてのPoisson方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

この式は連立一次方程式となる。これをSOR法で解くこととする。つまり、第k回目の反復値を$\psi^{(k)}$とすると

$$\psi_{i,j}^{(k+1)} = \psi_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{2(1+\beta^2)} \left[\psi_{i-1,j}^{(k+1)} + \psi_{i+1,j}^{(k+1)} + \beta^2 \left(\psi_{i,j+1}^{(k+1)} + \psi_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - 2\left(1+\beta^2\right) \psi_{i,j}^{(k)} - \Delta x^2 \zeta_{i,j}^{n} \right]$$

$$\beta = \Delta x / \Delta y$$

Poisson方程式の差分スキーム(1/6)

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-g$$

空間に中心差分近似を用いた差分方程式

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}=-g_{i,j}$$

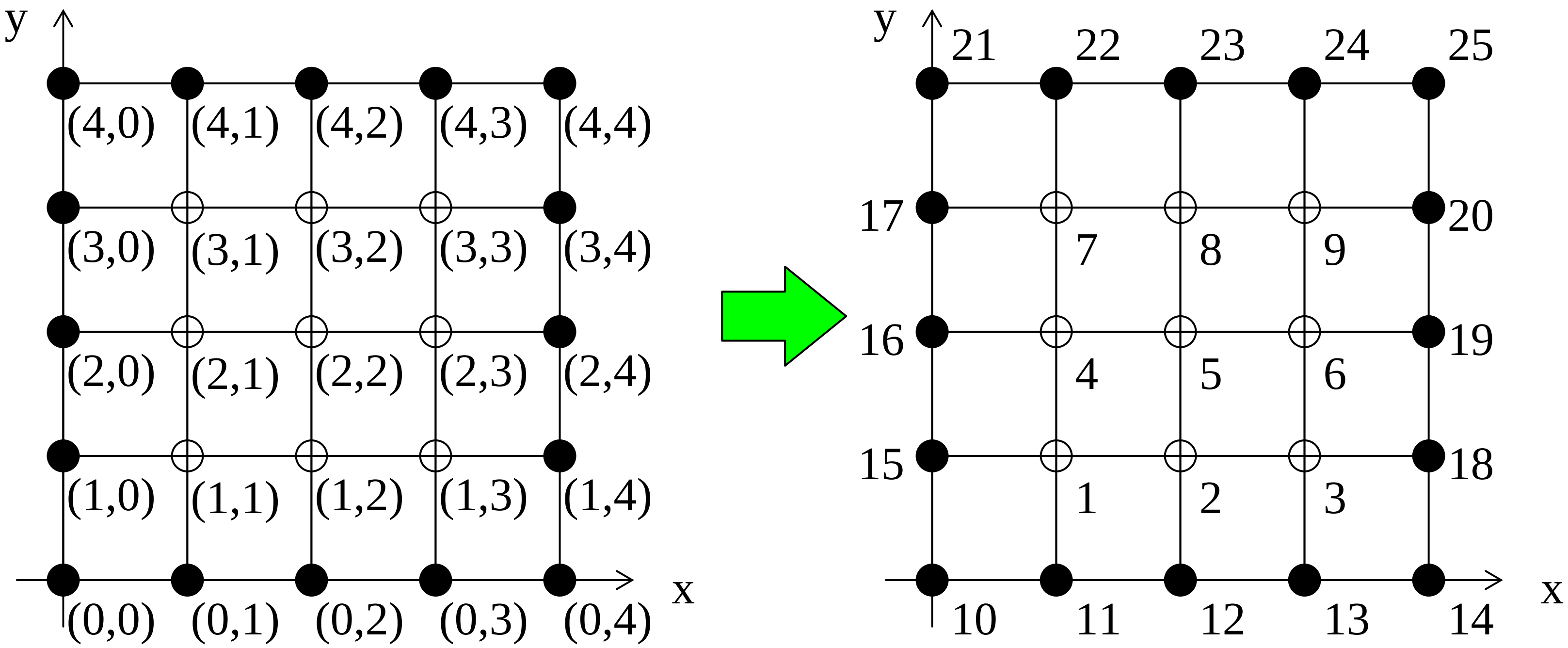
Δx=Δyとする。

$$-u_{i+1,j}-u_{i-1,j}+4u_{i,j}-u_{i,j+1}-u_{i,j-1}=\Delta x^2 g_{i,j}$$

Poisson方程式の差分スキーム(2/6)

Natural ordering:

$u_{1,1}$, $u_{1,2}$,……, $u_{3,3}$をu_1, u_2, ……, u_9と番号を付け直す



Poisson方程式の差分スキーム(3/6)

Natural ordering によって差分式は以下のように表すことができる

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^2 g_1 + u_{11} + u_{15} \\ \Delta x^2 g_2 + u_{12} \\ \Delta x^2 g_3 + u_{13} + u_{18} \\ \Delta x^2 g_4 + u_{16} \\ \Delta x^2 g_5 \\ \Delta x^2 g_6 + u_{19} \\ \Delta x^2 g_7 + u_{17} + u_{22} \\ \Delta x^2 g_8 + u_{23} \\ \Delta x^2 g_9 + u_{20} + u_{24} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

Poisson方程式の差分スキーム(4/6)

$$U_1 = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T, \quad U_2 = (u_4 \quad u_5 \quad u_6)^T, \quad U_3 = (u_7 \quad u_8 \quad u_9)^T$$
$$B_1 = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T, \quad B_2 = (b_4 \quad b_5 \quad b_6)^T, \quad B_3 = (b_7 \quad b_8 \quad b_9)^T$$

以上の置き換えによって、行列式は、以下の形に書き換わる

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

ここで

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad (i, j = 1,2,3 : i \neq j)$$

Poisson方程式の差分スキーム(5/6)

ブロック三重対角行列の解法プログラム

係数行列の設定：

A行列の設定：

```
1710 '*specification of A
1720 *MTRX
1740 FOR I=1 TO IBAR:AII(I,I)=4:NEXT I
1750 FOR I=2 TO IBAR:AII(I,I-1)=-1:NEXT I
1760 FOR I=1 TO IBAR-1:AII(I,I+1)=-1:NEXT I
1770 FOR I=1 TO IBAR:AIJ(I,I)=-1:NEXT I
1780 FOR J0=1 TO JBAR
1790 FOR I=1 TO IBAR:FOR J=1 TO JBAR
1800 IP=I+JBAR*(J0-1):JP=J+JBAR*(J0-1)
1810 A(IP,JP)=AII(I,J):NEXT J:NEXT I
1820 NEXT J0
1830 FOR J0=1 TO JBAR-1
1840 FOR I=1 TO IBAR:FOR J=1 TO JBAR
1850 IP=I+JBAR*J0: JP=J+JBAR*(J0-1)
1860 A(IP,JP)=AIJ(I,J):NEXT J:NEXT I
1870 NEXT J0
1880 FOR J0=1 TO JBAR-1
1890 FOR I=1 TO IBAR:FOR J=1 TO JBAR
1900 IP=I+JBAR*(J0-1):JP=J+JBAR*J0
1910 A(IP,JP)=AIJ(I,J):NEXT J:NEXT I
1920 NEXT J0:RETURN
```

b行列の設定：

```
1940 '*specification of b
1950 *RHS
1960 FOR I=1 TO IJBAR:B(I)=G0*DXDY:NEXT I:RETURN
1970 'FOR I=IBAR TO IJBAR STEP IBAR:B(I)=U0:NEXT I:RETURN
```

Poisson方程式の差分スキーム(6/6)

ガウスの消去法による行列の解法

```
1440 '*Gaussian eliminator for A*u=b
1450 *GAUSS
1470 FOR K=1 TO IJBAR
1480 D1(K)=1/A(K,K)
1490 FOR I=K+1 TO IJBAR
1500 M(I,K)=A(I,K)*D1(K)
1510 FOR J=K+1 TO IJBAR
1520 A(I,J)=A(I,J)-M(I,K)*A(K,J)
1530 NEXT J
1540 B(I)=B(I)-M(I,K)*B(K)
1550 A(I,K)=0
1560 NEXT I
1580 NEXT K
1590 D1(IJBAR)=1/A(IJBAR,IJBAR)
```

```
1600 '*backward substitution
1610 U(IJBAR)=B(IJBAR)*D1(IJBAR)
1620 FOR I= 2 TO IJBAR
1630 IR1=IJBAR-I+1
1640 SUM=0:FOR J=IR1+1 TO IJBAR
1650 SUM=SUM+A(IR1,J)*U(J):NEXT J
1660 U(IR1)=(B(IR1)-SUM)/A(IR1,IR1)
1690 NEXT I
```

疎な行列(Sparse Matrix)

格子分割の数:　n分割とすると

変数の数:　$n \times n = n^2$

係数行列の全要素数:　$n^2 \times n^2 = n^4$

非零の要素数:　$(n+2(n-1)) \times n + n \times (n-1) \times 2 = (5n-4)n$

非零の要素数の割合:　$(5n-4)/ n^3$

n=1	100 %
n=2	75 %
n=5	16.8 %
n=10	4.6 %
n=20	1.2 %
n=50	0.1968 %
n=100	0.0496 %

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$A_{ij} = A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad (i, j = 1,2,3, \quad i \neq j)$$

SOR法１

Gauss−Seidel法を書き、その左辺を仮の反復値 $\tilde{u}_i^{(k+1)}$ と見る。すなわち、

$$a_{i,i}\tilde{u}_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{i,j}u_j^{(k)} + b_i$$

と定義する。反復値 $u_i^{(k+1)}$ は重みωとして

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} + \omega\left[\tilde{u}_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}\right]$$

あるいは変形して

$$u_i^{(k+1)} = (1-\omega)u_i^{(k)} + \omega\tilde{u}_i^{(k+1)}$$

ωは緩和係数と呼ばれる。

SOR法2

ω＞1を過緩和といい、ω＜1を不足緩和という。
上式から $\tilde{u}_i^{(k+1)}$を消去すると、

$$a_{i,i}u_i^{(k+1)} = a_{i,i}u_i^{(k)} + \omega\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}u_j^{(k)} + b_i - a_{i,i}u_j^{(k)}\right]$$

この表現をSOR法という。行列Aを分離すると、この式のベクトル形式は

$$(D - \omega)Eu^{(k+1)} = [(1-\omega)D + \omega F]u^{(k)} + \omega b$$

である。

SOR法3

$$L = D^{-1}E,\quad U = D^{-1}F$$

と定義するとこの式は

$$u^{(k+1)} = (1-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega U\right]u^{(k)} + \omega(1-\omega L)^{-1}D^{-1}b$$

となる。この式を整理して、

$$u^{(k+1)} = \mathrm{L}_{\omega}u^{(k)} + \omega(1-\omega L)^{-1}D^{-1}b$$

$$\mathrm{L}_{\omega} = (1-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)I + \omega U\right]$$

が反復法の行列形式による表現である。$\mathcal{L}_{\omega}$ はSOR行列と呼ばれ、$\mathcal{L}_{\omega=1}$ はGauss−Seidel行列を意味している。

SOR法4

$$a_{i,i}u_i^{(k+1)} = a_{i,i}u_i^{(k)} + \omega\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}u_j^{(k)} + b_i - a_{i,i}u_j^{(k)}\right]$$

この式中において

$$R = D^{-1}\omega$$

とし、右辺第2項の[ ]の中の1, 2, 3項は

$$b - A\tilde{u}^{(k)}$$

とかける。こうすると上式は、

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + R\left[b - A\tilde{u}^{(k)}\right]$$

よって、SOR法は残差修正法である。 ⟶ Program SOR

境界条件の差分表現1

すべりなしの壁を考える。つまり、次の条件

$$u_{i,j0}=0,\quad v_{i,j0}=0,$$

が指定される壁である。(i,j0+1)の流れ関数$\psi_{i,j0+1}$を点(i,j0)でTaylor展開すると

$$\psi_{i,j0+1}=\psi_{i,j0}+\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{i,j0}\Delta y+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{i,j0}\Delta y^2+\cdots$$

である。壁面(i,j0)はひとつの流線を形成し、$\psi_{i,j0}$=const (i=1,2,･･･)である。B_2−B_5−B_1も流線であって、この場合$\psi_{B2-B5-B1}$ =0とした。

境界条件の差分表現2

すべりなしの壁では、

$$\boldsymbol{u}_{i,j0} = \partial\psi/\partial y\big|_{i,j0} = \mathbf{0}$$

となる。しかし、y方向には流速uは分布をもつ。つまり

$$\partial^2\psi/\partial y^2\big|_{i,j0} = \partial\boldsymbol{u}/\partial y\big|_{i,j0} \neq \mathbf{0}$$

である。ところで、壁面での渦度　$\zeta = \partial\boldsymbol{v}/\partial x - \partial\boldsymbol{u}/\partial y$ は、

$\partial\boldsymbol{v}/\partial x\big|_{i,j0} = \mathbf{0}$　であるから

$$\zeta = -\partial\boldsymbol{u}/\partial y$$

となる。すべりのない壁では$u_{i,j0}$=$v_{i,j0}$=0であるが、「渦度の生成」はある。

境界条件の差分表現3

これらの式を流れ関数をTaylor展開した式に代入すると、

$$\psi_{i,j0+1} = \frac{1}{2}\zeta_{i,j0}\Delta y^2$$ あるいは $$\zeta_{i,j0} = 2\psi_{i,j0+1}/\Delta y^2$$

となる。一般に壁面を点(i,w)とすると、この点の境界条件は、

$$\zeta_{i,w} = 2\left(\psi_{i,w+1} - \psi_{i,w+1}\right)/\Delta n^2$$

である。ところで、壁面での渦度　$\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$　は、

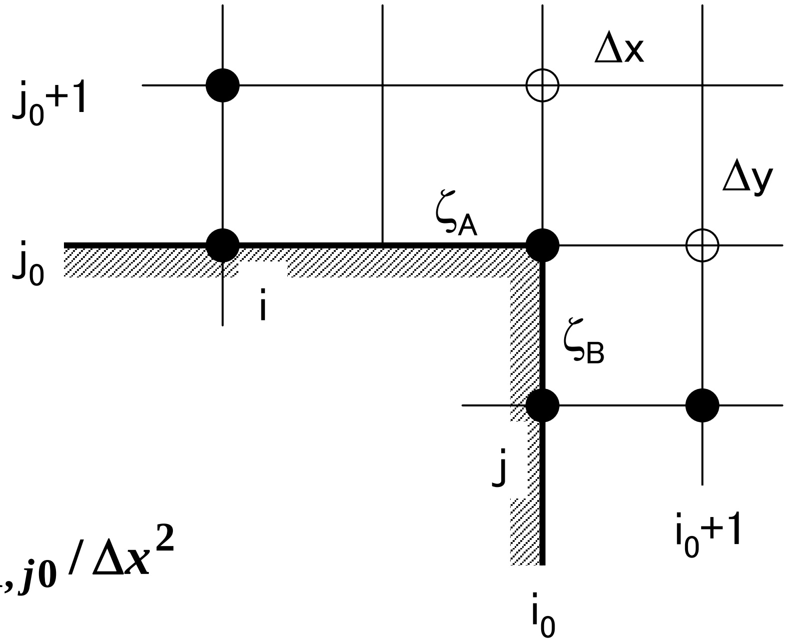
$$\partial v/\partial x\big|_{i,j0} = 0$$ であるから

$$\zeta = -\partial u/\partial y$$

となる。すべりのない壁では$u_{i,j0}=v_{i,j0}=0$であるが、「渦度の生成」はある。ここでΔn^2は壁面に垂直にはなれた次の格子点までの距離である。

境界条件の差分表現4

鋭い角$(i_0 j_0)$について考える。鋭い角の流れ関数 $\psi_{i0,j0}$ の評価は心配ない。
鋭い角の渦度 $\zeta_{i0,j0}$ の指定には以下の式が用いられる。



- 不連続近似

$$\zeta_A = 2\psi_{i0,j0+1}/\Delta y^2, \quad \zeta_B = 2\psi_{i0+1,j0}/\Delta x^2$$

- ψ対称近似

$$\zeta_A = 2\psi_{i0,j0+1}/\Delta y^2 + 2\psi_{i0+1,j0}/\Delta x^2$$

- 壁面平均値近似

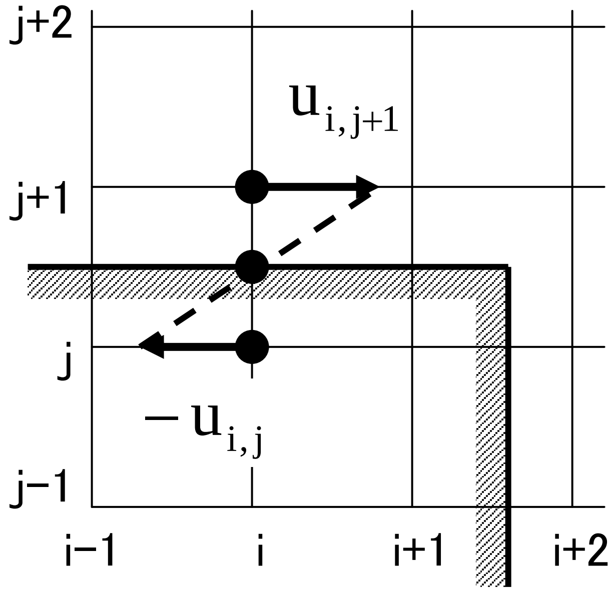
$$\zeta_A = \psi_{i0,j0+1}/\Delta y^2 + \psi_{i0+1,j0}/\Delta x^2$$

境界条件の差分表現5

右図のように格子状に壁を設定しないが点(i,j+1/2)は壁として表現可能である。この境界をすべりのない壁とする。つまり、$u_{i,j+1/2}$=0である。図中のui,j+1に対して境界点(i,j)について、

$$u_{i,j} = -u_{i,j+1}$$

とおけば点(i,j+1/2)では$u_{i,j+1/2}$=0となってすべりのない壁の近似となる。



時間ステップΔtの制御法

Courant条件

$$c\Delta t / \Delta x < 1$$

拡散数の条件（α：拡散係数）

$$\alpha\Delta t / \Delta x^2 < 1/2$$

変係数の熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

FTCSスキームの安定条件

$$\alpha(u)\Delta t / \Delta x^2 < 1/2$$

Δt_0の決定法

$$\Delta t_0 = \left[u_0 / \Delta x + 2\nu / \left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)\right]^{-1}$$

計算フローチャート

流速分布　u^n, v^n

渦度移動方程式　$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

渦度　$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

流れ関数に関するポアソン方程式　$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

流れ関数　ψ

コーシーリーマンの関係式　$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

速度場　u^{n+1}, v^{n+1}

流れ関数表示のソース項　$$S_\psi = 2\left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \equiv S_p$$

圧力に関するポアソン方程式　$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S_\psi$$

圧力　p

バックステップ問題の流れ関数-ポテンシャル法による解法計算例

計算フロー

- 1480 'computation
- 1490 T=0:N=0:GOSUB *PLOT
- 1500 '*boundary condition
- 1510 GOSUB *BNDC1　境界条件
- 1520 '*initial guess for f
- 1530 GOSUB *STRM　流れ関数の初期設定算
- 1540 '*initial guess for u, v
- 1550 GOSUB *VELCI　速度場の初期設定
- 1560 'start cycle
- 1570 T=T+DT
- 1580 N=N+1
- 1590 'vorticity
- 1600 LOCATE 48,6:PRINT"eq.(7.5)"
- 1610 GOSUB *VORTC　渦度輸送方程式の解法(FTCS)
- 1620 'GOSUB *VORTD　渦度輸送方程式の解法(風上差分)
- 1630 'stream function
- 1640 LOCATE 48,6:PRINT"eq.(7.7)"
- 1650 GOSUB *STRM　ポアッソン方程式の解法
- 1660 '*velocity
- 1670 GOSUB *VELCI　コーシーリーマンの関係式からの流れ関数の評価

渦度移動方程式のFTCS差分解法

```
1840 '------------------------------------------------------
1850 '*vorticity by FTCS
1860 *VORTC
1870 FOR I=2 TO IM1
1880 JS=2
1890 IF I<=IO THEN JS=JO1
1900 FOR J=JS TO JM1
1910  IF (I=IO AND J=JO1) THEN G(I,J-1)=BCON1
1920  IF (I=IO1 AND J=JO) THEN G(I-1,J)=BCON2
1930  FUX=DX1C*(G(I+1,J)-G(I-1,J))*U(I,J)
1940  FUY=DY1C*(G(I,J+1)-G(I,J-1))*V(I,J)
1950  VISX=RDX2*VISC*(G(I+1,J)-2*G(I,J)+G(I-1,J))
1960  VISY=RDY2*VISC*(G(I,J+1)-2*G(I,J)+G(I,J-1))
1970  G1(I,J)=G(I,J)+DT*(-FUX-FUY+VISX+VISY):NEXT J
1980 NEXT I
1990 '*boundary codition
2000 FOR I=2 TO IM1:FOR J=2 TO JM1:G(I,J)=G1(I,J):NEXT J:NEXT I
2010 RETURN
2020 '------------------------------------------------------
```

渦度移動方程式の風上差分解法

```
2030 '*vorticity by donor-difference
2040 *VORTD
2050 FOR I = 2 TO IM1
2060 JS=2
2070 IF I<=IO THEN JS=JO1
2080 FOR J=JS TO JM1
2090  IF (I=IO AND J=JO1) THEN G(I,J-1)=BCON1
2100  IF (I=IO1 AND J=JO) THEN G(I-1,J)=BCON2
2110  FUX=DX1C*(U(I,J)*(G(I+1,J)-G(I-1,J)))
2120  FUX=FUX+DX1C*(ABS(U(I,J))*(2*G(I,J)-G(I+1,J)-G(I-1,J)))
2130  FUY=DY1C*(V(I,J)*(G(I,J+1)-G(I,J-1)))
2140  FUY=FUY+DY1C*(ABS(V(I,J))*(2*G(I,J)-G(I,J+1)-G(I,J-1)))
2150  VISX=RDX2*VISC*(G(I+1,J)-2*G(I,J)+G(I-1,J))
2160  VISY=RDY2*VISC*(G(I,J+1)-2*G(I,J)+G(I,J-1))
2170  G1(I,J)=G(I,J)+DT*(-FUX-FUY+VISX+VISY):NEXT J
2180 NEXT I
2190 '*boundary codition
2200 FOR I=2 TO IM1:FOR J = 2 TO JM1:G(I,J)=G1(I,J):NEXT J:NEXT I
2210 RETURN
```

SOR法によるPoisson方程式の数値解析

```
2230 '*stream function by SOR-method
2240 *STRM
2250 ITER=0
2260 '*iteration start
2270 ITER=ITER+1
2280 LOCATE 48,7:PRINT USING"(k)=##";ITER
2290 EMAX=0:FOR I=2 TO IM1
2300 JS=2
2310 IF I<=IO THEN JS=JO1
2320 FOR J=JS TO JM1
2330 TP=F(I,J)
2340 ZR=F(I+1,J)+F(I-1,J)+BETA2*(F(I,J+1)+F(I,J-1))
2350 ER=ZR-C1*F(I,J)-DX2*G(I,J)
2360 F(I,J)=F(I,J)+OMG*C2*ER
2370 TP=F(I,J)-TP:TP=ABS(TP)/F0
2380 IF TP>EMAX THEN EMAX=TP
2390 NEXT J:NEXT I
2400 IF EMAX>EPSI THEN GOTO 2260
2410 '*boundary codition
2420 FOR J=2 TO JM1:F(IMAX,J)=F(IM1,J):NEXT J:RETURN
```

コーシーリーマンの関係式からの流れ関数の評価

```
2540 '-----------------------------------------------
2550 '*velocity u,v from f(i,j)
2560 *VELCI
2570 FOR I=2 TO IM1
2580 JS=2
2590 IF I<=IO THEN JS=JO1
2600 FOR J=JS TO JM1
2610 U(I,J)=DY1C*(F(I,J+1)-F(I,J-1))
2620 V(I,J)=DX1C*(F(I-1,J)-F(I+1,J)):NEXT J:NEXT I
2630 FOR J=2 TO JM1
2640 U(IMAX,J)=U(IM1,J):V(IMAX,J)=V(IM1,J):NEXT J:RETURN
2650 '-----------------------------------------------
```

境界条件の設定

```
2430 '-----------------------------------------------
2440 '*initial guess + boundary condition
2450 *BNDC1
2460 FOR I=1 TO IMAX:FOR J=1 TO JMAX
2470 F(I,J)=0:G(I,J)=0:G1(I,J)=0
2480 U(I,J)=0:V(I,J)=0
2490 NEXT J:NEXT I
2500 '*inflow
2510 FOR J=JO TO JM1:F(1,J+1)=F(1,J)+U0*DY:NEXT J
2520 FOR I=2 TO IMAX:F(I,JMAX)=F(1,JMAX):NEXT I
2530 F0=F(1,JMAX):RETURN
2540 '-----------------------------------------------

2650 '-----------------------------------------------
2660 '*boundary condition
2670 *BNDC2
2680 '*corner
2690 BCON1=2*F(IO,JO1)*RDY2:BCON2=2*F(IO1,JO)*RDX2
2700 '*obstacle
2710 FOR I=2 TO IO:G(I,JO)=2*F(I,JO1)*RDY2:NEXT I
2720 FOR J=2 TO JO:G(IO,J)=2*F(IO1,J)*RDX2:NEXT J
2730 FOR I=2 TO IM1:G(I,JMAX)=2*(F(I,JM1)-F(I,JMAX))*RDY2
2740 NEXT I
2750 G(IMAX,JMAX)=G(IM1,JMAX):RETURN
2760 '-----------------------------------------------
```

数値解析結果

基礎方程式に付帯する境界条件が指定された。流れが十分に発達すると定常状態に到達する。ここでは、ζとψに、したがってuとvに、初期推測値を与えて方程式のも固有の性質にまかせて時間発展させ定常状態を求める。

↓

Program:　BCKSTP